جامعة الجيلالي بونعامة - خميس مليانة

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية

وعلوم التسيير

السداسي الثاني

المجموعات: 2 و 3 و 4

السنة الأولى جذع مشترك LMD

رياضيات 02

من مطبوعة :

الرياضيات للتخصصات الاقتصادية

المحور الخامس:

ملخص درس : جمل المعادلات الخطية

1. جمل المعادلات الخطية
2. تمثيل وحل جمل خطية بالشكل المصفوفي
3. حل جملة بطريقة مقلوب مصفوفة
4. حل بطريقة كرامر
6. جل جمل المعادلات بطريقة المحددات
7. أمثلة وتمارين محلولة

السنة الجامعية 2023- 2024

1. جمل المعادلات الخطية

1.1 دراسة المعادلات الخطية

باستخدام جداء المصفوفات: $AX = B$

إذا كان B شعاع عمود معلوم من $\mathbb{R}^n$، و A مصفوفة معلومة من $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$

X : شعاع عمود مجهول من $\mathbb{R}^P$، المعادلة $AX = B$ تأخذ التمثيل المصفوفي الآتي :

$$(*) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

إذا كان $\mathbb{R}^n$ مزودا بالأساس $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ وكانت $u_1, u_2, \cdots, u_p$ أشعة كيفية من $\mathbb{R}^n$ و b شعاع معطى من $\mathbb{R}^P$، فإن المعادلة $x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_p u_p = b$ ذات المجاهيل $u_1, u_2, \cdots, u_p$ من $\mathbb{R}^n$ تكافئ الجملة الآتية:

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1p} x_p = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2p} x_p = b_2 \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{np} x_p = b_n \end{cases}$$

حيث مركبات b في الأساس $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ هي $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$

يمكن التعبير عن السطر L_j في هذا التمثيل بالمعادلة : $a_{j1} x_1 + a_{j2} x_2 + \cdots + a_{jp} x_p = b_j$.

تكون الجملة (S) متجانسة إذا كان الطرف الثاني b_j و j من $\{1, 2, \cdots, n\}$ معدوما ، وعندئذ تأخذ الجملة المتجانسة (H) المرفقة بـ (S) الشكل المكافئ لـ $AX = 0$:

$$a_{j1} x_1 + a_{j2} x_2 + \cdots + a_{jp} x_p = 0 \quad \forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

والجملة المتجانسة تقبل على الأقل حلا (الحل الصفري).

إذا كان $f : \mathbb{R}^P \to \mathbb{R}^n$ هو التطبيق الخطي المرفق بالمصفوفة A بالنسبة لأساسي $\mathbb{R}^P$ و $\mathbb{R}^n$.

وإذا اعتبرنا $x = (x_1, x_2, \cdots, x_p)$ من $\mathbb{R}^P$ و $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ من $\mathbb{R}^n$ ، فإن الجملة (S) تكافئ المعادلة الشعاعية $f(x) = b$ ، وبالتالي يصبح حل الجملة يعني تعيين $\ker f$.

2.1 بنية حلول جملة معادلات خطية

لدينا : $\ker f$ فضاء جزئي من $\mathbb{R}^P$ بعده $\dim \ker f = p - \mathrm{rg}(f)$

المعادلة $f(x) = b$ تقبل على الأقل حل x_0 من $\mathbb{R}^P$، وعندئذ يكون لدينا :

$$f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow f(x-x_0)=0_{\mathbb{R}^n}$$

هذا يعني أن الشعاع $x-x_0$ ينتمي إلى $\ker f$. ومنه يكون $(x-x_0)$ حل للمعادلة المتجانسة (H). يمكن أن نضعه بالشكل $x=x_0+h$، حيث h هو حل كيفي لـ (H).

ونحصل على حل للجملة (S) إن لم يكن خاليا، بإضافة حل خاص لـ (S) إلى الحل العام لـ (H).

يعني وجود حل على الأقل الجملة (S)، تحديد x من $\mathbb{R}^p$ بحيث $f(x)=b$ ينتمي إلى $\mathrm{Im} f$، وهذا مرتبط طبعا بالشعاع b.

– إذا كان f غامر $(\mathrm{rg}(A)=n)$ فإن (S) تقبل على الأقل حلا مهما كان b.

– وإذا كان f متباين أي $\mathrm{rg}(f)=p$، فإن الجملة (S) تقبل على الأكثر حلا مهما كان b (حل المعدوم لـ (H)).

إذا لم تكن مجموعة حلول (S) خالية يمكن إرجاعها إلى الحل الصفري (حالة f تقابل) أو إلى $+\infty$ من الحلول إذا كان $\dim\ker f>0$.

إن المعادلة الشعاعية $x_1u_1+x_2u_2+\cdots+x_pu_p=b$ لا تتبدل إذا ما تم تغيير ترتيب مجاهيلها، أو تم تغيير ترتيب المعادلات في الجملة المكافئة لها، أو أجريت عمليات أولية على أسطر (معادلات) الجملة المرفقة بها.

وهذه العمليات هي:

$$L_i \leftrightarrow L_j \quad (i\neq j) \quad ، \quad L_i \to L_i+\lambda\cdot L_j \quad (i\neq j) \quad ، \quad L_i \to \alpha L_i \quad (\alpha\neq 0)$$

كل ما يحدث يمس تمثيلها فقط (في أسس أخرى).

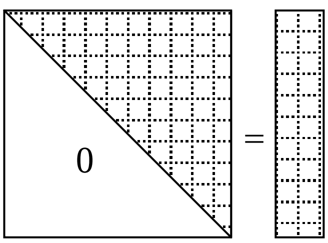
تؤول طرق تحويل حل هذه الجملة إلى إجراء تحويلات بين أسس E. مثلا تغيير ترتيب حدود المجموع $x_1u_1+x_2u_2+\cdots+x_pu_p$، أو ترتيب المعادلات في الجملة الخطية المرفقة، يرافقه ترتيب أشعة الأساس $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$. فهما لا يبدلان المعادلة: $x_1u_1+x_2u_2+\cdots+x_pu_p=b$. بل عبارتها أو تمثيلها فقط.

مثلا في العملية $L_i \to L_i+\lambda\cdot L_j$: تبديل السطر L_i بالسطر $L_i \to L_i+\lambda\cdot L_j$ تمكن من التعبير عن المعادلة الشعاعية في الأساس $\{e'_1,e'_2,\cdots,e'_n\}$ الناتج عن تبديل الشعاع ذي المرتبة j في الأساس $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ بالشعاع $e_j-\lambda e_i$.

بطريقة العمليات على الأسطر يتم تحويل مصفوفة التطبيق f إلى مصفوفة (Σ) يظهر فيها مصفوفة مثلثية.

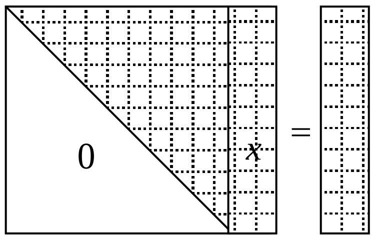
يمكن تصور ثلاثة أشكال باستخدام المخططات:

- **الحالة الأولى** $(n=p)$:



حيث عدد المجاهيل يساوي عدد المعادلات، والمصفوفة (Σ) تأخذ شكل المقابل، حيث القطر الرئيسي لعناصر الارتكاز غير معدومة، والجملة تقبل حلا وحيدا).

- **الحالة الثانية** $(n<p)$:

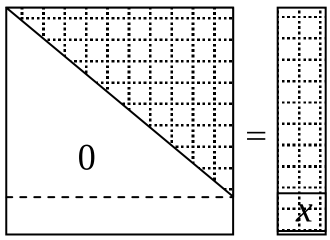


حيث المجاهيل تفوق المعادلات. المجاهيل "الفائضة" (يشار إليها بـ x في الشكل) غير أساسية، إذن نحملها إلى الطرف الأيمن، لتلعب دور وسائط اختيارية في حل الجملة بالنسبة إلى المجاهيل الأساسية.

والحل سيكون بدلالة هذه الوسائط الاختيارية .

- **الحالة الثالثة** $(n<p)$:

هنا عدد المعادلات يفوق عدد المجاهيل، تكون المعادلات "الفائضة" غير أساسية، حيث طرفها الأيسر يكون معدوما. وهي مرتبطة، بطرفها الثاني (المشار إليها بـ x في الشكل).



إذا وحد واحد على الأقل من عناصر الطرف الأيمن في المعادلات غير الأساسية غير معدوما فإن (Σ) لا تقبل حلا،

بالتالي الجملة (S) لا تقبل حلا .

وإذا كانت كل معاملات الطرف الأول معدومة، في المعادلات غير الأساسية،

فإن (Σ) ترجع إلى جملة معادلاتها الأساسية، وعندئذ تتشكل جملة مربعة يمكن حلها.

تمرين رقم 1

باستخدام طريقة العمليات على الأسطر، أدرس الجملة الخطية (I):

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} 8x+2y-2z=a \\ 2x+5y+4z=b \\ -2x+4y+5z=c \end{cases}$$

(a و b و c وسائط حقيقية)

الحل

دراسة الجملة (I) باستخدام العمليات على الأسطر:

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} 8x+2y-2z=a \\ 2x+5y+4z=b \\ -2x+4y+5z=c \end{cases}$$

(a و b و c وسائط حقيقية)

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3\to 4L_3+L_1]{L_2\to 4L_2-L_1} \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 0 & 18 & 18 \\ 0 & 18 & 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ 4b-a \\ 4c-a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3\to L_3-L_2} \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 0 & 18 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ 4b-a \\ 4c-4b \end{pmatrix}$$

- في المصفوفة الأخيرة، العمودان الأولان يدلان بأن :

$v_1=(4,1,-1)$ و $v_1=(2,5,4)$ يشكلان أساسا لـ $\operatorname{Im} f$ ، ومنه $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg}(f)=2$

- السطر الأخير من المصفوفة الأخيرة، يفيد بأن :

$$f(\mathbb{R}^3)=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : b=c\right\}=\langle(-1,1,0);(-1,0,1)\rangle$$

$$\operatorname{rg}(f)=2$$

- من السطرين الأولين في المصفوفة الأخيرة ، يمكن تعيين نواة f كالآتي :

$$\ker f=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \begin{cases} 8x+2y-2z=0 \\ y+z=0 \end{cases}\right\}$$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2x=-y=z\right\}=\langle(1,-2,2)\rangle$$

$$\dim\ker f=1$$

- على العموم الجملة (II) تقبل حلا تحت الشرط $b=c$، وعندئذ مجموعة الحلول $\mathcal{S}$ تحقق الشرط :

$$\begin{cases} 8x+2y-2z=a \\ 18y+18z=4b-a \end{cases}$$

الذي يكافئ

$$\begin{cases} 8x=-2y-2z+a \\ 18y=-18z+4b-a \end{cases}$$

ومنه مجموعة الحلول:

$$\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{1}{2}z-\frac{b}{18}+\frac{13c}{72},-z+\frac{2b}{9}-\frac{a}{18},z\right):\ z\in\mathbb{R}\right\}$$

3.1 تمثيل جمل المعادلات الخطية

نعتبر جملة المعادلات الخطية (S') ذات n مجهول حقيقي و n معادلة :

$$S'\ \begin{cases} \alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n=b_1 \\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\ldots+\alpha_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

الكتابة المصفوفية للجملة (S') :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

نرفق بالجملة (S') المصفوفة M'

$$M' \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & | & b_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} & | & b_n \end{pmatrix}$$

يأخذ التحويل الأولي ϕ على أسطر المصفوفة M، إحدى الصيغ : $L_i \to L_i + \lambda \cdot L_j \quad (i \neq j)$،

$L_i \to \alpha L_i \quad (\alpha \neq 0)$ ، $(i \neq j) \quad L_i \leftrightarrow L_j$ ويكون لـ M و $\phi(M)$ نفس الرتبة ويمثلان نفس التطبيق.

أي تحويل أو عملية أولية على أسطر (M') تقابلها نفس العملية في (S').

يعني أن الجملتين $M \cdot X = B$ و $\phi(M) \cdot X = \phi(B)$ متكافئتان، أي لهما نفس الحلول .

إذا كانت M قابلة للقلب فإن الجملة (S') تقبل حلا وحيدا .

وعندئذ، بسلسلة (منتهية) من التحويلات الأولية، انطلاقا من S' ، نحصل على جملة خطية مثلثية (T') بالشكل:

$$T' \begin{cases} \beta_{11} x_1 + \beta_{12} x_2 + \ldots + \beta_{1n} x_n = c_1 \\ \quad 0 \quad \beta_{22} x_2 + \ldots + \beta_{2n} x_n = c_2 \\ \quad \vdots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad 0 \ + \ 0 \ + \ldots + \beta_{nn} x_n = c_n \end{cases}$$

حيث $\beta_{11} \neq 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$

حل الجملة (T') يبتدئ من المعادلة الأخيرة للحصول على x_n وبالتعويض في المعادلة رقم $(n-1)$ للحصول على x_{n-1} وهكذا..

وحل الجملة (T') هو نفسه حل الجملة (S')

تمرين رقم2

باستخدام طريقة العمليات على الأسطر، حل الجملة الخطية (I):

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} -x + y + 3z = 1 \\ x - y + 3z = 2 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

الحل

نرفق بالجملة (I) المصفوفة $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$

التي يمكن تحويلها إلى مصفوفة مثلثية باستخدام التحويلات الأولية على النحو :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3+L_1]{L_2 \to L_2+L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right)$$

وبالتالي الجملة (I) تكافئ :

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} -x + y + 3z = 1 \\ \quad\;\; 3y + 3z = 0 \\ \qquad\quad 2z = 3 \end{cases}$$

حل الجملة (II) يبتدئ بالمعادلة الأخيرة فنحصل على $z = \frac{3}{2}$ وبالتعويض في المعادلة الثانية نحصل على $y = -\frac{3}{2}$ وبالتعويض في المعادلة الثالثة نحصل على $x = 2$.

2. مصفوفات قابلة للقلب

1.2 مصفوفة تشاكل خطي

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات من الرتبة n على $\mathbb{R}$ لها بنية فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$. $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$

نضع $A = M_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ونعتبر التطبيق الخطي $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

عندما يكون f تقابلي التطبيق العكسي f^{-1} لـ f موجود. ويكون لدينا : $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{R}^n}$.

ولدينا أيضا : $M(f \circ f^{-1}) = M(f) \cdot M(f^{-1}) = M(id_{\mathbb{R}^n}) = I_n$

$M(f^{-1})$ هي مصفوفة التطبيق العكسي f^{-1} التي نرمز لها بالرمز A^{-1} والتي تسمى مقلوب المصفوفة A :

$$A^{-1} = M^{-1}(f) = M(f^{-1})$$

2.2 التطبيق المطابق في أساسين مختلفين

ليكن $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ و $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, \cdots, e'_n\}$ أساسين مختلفين لـ E.

يمكن أن نكتب أشعة أحدهما بدلالة أشعة الأساس الثاني :

$$\begin{cases} e'_1 = \alpha_{11} e_1 + \alpha_{12} e_2 + \ldots + \alpha_{1n} e_n \\ e' = \alpha_{21} e_1 + \alpha_{22} e_2 + \ldots + \alpha_{2n} e_n \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e'_n = \alpha_{n1} e_1 + \alpha_{n2} e_2 + \ldots + \alpha_{nn} e_n \end{cases}$$

لنعرف التطبيق الخطي $p : E \to E$ بالشكل : $\quad p(e_j) = e'_j \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

p تقابلي (صورة أساس بتطبيق تقابلي) ، مصفوفته هي:

$P = (p_{ij})_{1 \le i, j \le n}$ (P قابلة للقلب) .

يتعرف التطبيق الخطي العكسي p^{-1} كما يلي : $\quad p^{-1}(e'_j) = e_j \quad \forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$

التطبيق p ما هو إلا التطبيق الخطي المطابق في E .

3.2 مركبات شعاع في أساسين مختلفين

ليكن $\mathcal{B}=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ و $\mathcal{B}'=\{e'_1, e'_2, \cdots, e'_n\}$ أساسين مختلفين لفضاء شعاعي E .

$$\begin{aligned} E \ni x &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n \\ &= x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + \ldots + x'_n e'_n \end{aligned}$$

من أجل كل j من $\{1, 2, \cdots, n\}$: $e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$

ولدينا : $x = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \right) e_i$

وبما أن كتابة الشعاع x وحيدة ، تنتج المساواة : $x_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j p_{ij}$

إذن $x = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \right)}_{x_i} e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

ونستخلص العلاقة التي تربط بين x'_j و x_i : $x_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j p_{ij} \qquad i = 1, 2, \cdots, n$

3.2 مصفوفة الانتقال

مصفوفة الانتقال (مصفوفة تغيير الأساس) من الأساس $\mathcal{B}$ إلى الأساس $\mathcal{B}'$ هي مصفوفة التطبيق المطابق في E عندما يكون الأساس في فضاء البدء هو $\mathcal{B}'$ والأساس في فضاء الوصول هو $\mathcal{B}$.

ونرمز لها: $P = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(id_E)$ ، ويكون لدينا : $P = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(id_E) = P(id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})$

$$P^{-1} = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(id_E) = P(id_E, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

تمرين رقم3

ليكن $\mathcal{B}=\{e_1, e_2, e_3\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$. والأساس

$\mathcal{B}'=\{e'_1=(1,1,1), e'_2=(2,1,3), e'_3=(0,-1,2)\}$.

ما هي مصفوفة الانتقال من $\mathcal{B}$ إلى $\mathcal{B}'$ ؟

الحل

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ومنه (p_1, p_2, p_3) مركبات التطبيق الخطي المرفق بمصفوفة الانتقال $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ تحقق :

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

وأخيرا التطبيق الخطي p المرفق بمصفوفة الانتقال $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$:

$$p(x,y,z) = (x+2y\,,\, x+y-z\,,\, x+3y+2z)$$

هو نفسه التطبيق الخطي المطابق في $\mathbb{R}^3$ بحيث الأساس في فضاء البدء هو $\mathcal{B}'$ والأساس في فضاء الوصول هو $\mathcal{B}$

4.2 الكتابة المصفوفية

مصفوفة الانتقال من $\mathcal{B}$ إلى $\mathcal{B}'$: $P = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = (p_{ij})_{1\le i,j\le n}$ ،

المركبات بالنسبة للأساسين $\mathcal{B}'$ و $\mathcal{B}$ هما :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;,\; X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

ومنه علاقة التحويل: $X = P \cdot X'$ التي تكافئ $X' = P^{-1} \cdot X$

تمرين رقم 4

في $\mathbb{R}^3$، $\mathcal{B}$ الأساس القانوني، والأساس $\mathcal{B}' = \{e'_1 = (1,2,3), e'_2 = (-1,0,1), e'_3 = (2,3,0)\}$

ليكن الشعاع X من $\mathbb{R}^3$ الذي مركباته في الأساس القانوني هي $A = (5,6,-3)$.

ما هي مركباته في الأساس $\mathcal{B}'$ ؟

الحل

لدينا

$$X = X_{|\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;,\; X' = X_{|\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -10/9 \\ -5/9 \end{pmatrix}, \; P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

من علاقة التحويل: $X = P \cdot X'$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

وهي تكافئ $X' = P^{-1} \cdot X$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3/9 & -2/9 & 3/9 \\ -1 & 6/9 & -1/9 \\ -2/9 & 4/9 & -5/9 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -10/9 \\ -5/9 \end{pmatrix}$$

3. جملة Cramer

1.3 جمل معادلات: معدلاتها مساويا لعدد مجاهيلها

جملة Cramer هي جملة معادلات خطية من n مجهول و n معادلة، هذه الجملة تقبل حل وحيد.

يمكن التعبير عن هذه الجملة بكتابة المصفوفة $A.X = B \quad / \det A \neq 0$

هذه الجملة تقبل حلا وحيدا : $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$

إذا رمزنا ب A_i للمصفوفة الناتجة من تبديل العمود رقم i بشعاع العمود B $(i = 1, 2, ..., n)$،

سيكون لدينا: $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A} \quad /(i = 1, 2, ..., n)$

مثال

الجملة $\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 2x + 6y - z = 0 \\ x - 2y + 2z = 3 \end{cases}$ تكافئ $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

ولدينا $\det A = 10$ ، ومنه هذه الجملة تقبل الحل الوحيد (x, y, z) حيث :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{17}{5} \quad , \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-16}{10} \quad , \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-8}{10}$$

تمرين رقم 5

حل، باستخدام الحساب المصفوفي، جملة المعادلات ذات المجاهيل x و y و z الآتية :

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} x - 2z = a \\ y + z = b \\ -2x + y = 0 \end{cases}$$

(a و b وسيطين حقيقيين)

حل الجملة $(\mathbf{I})$ باستخدام طريقة (CRAMER) .

الحل

نلاحظ بأن $\det A = -5$ ومنه تكون المصفوفة A قابلة للقلب، والجملة (I) تقبل حلا وحيدا :

$$x=\frac{\det A_x}{\det A}=\frac{\begin{vmatrix} a & 0 & -2 \\ b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{1}{5}a+\frac{2}{5}b$$

$$y=\frac{\det A_y}{\det A}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & a & -2 \\ 0 & b & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{2}{5}a+\frac{4}{5}b$$

$$z=\frac{\det A_z}{\det A}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-5}=-\frac{2}{5}a+\frac{1}{5}b$$

تمرين رقم 6

نعتبر المصفوفة $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. أحسب مقلوب المصفوفة A باستخدام العمليات الأولية على الأسطر .
2. حل، باستخدام الحساب المصفوفي، جملة المعادلات ذات المجاهيل x و y و z الآتية :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=1 \\ -y+z=1 \end{cases}$$

3. أعد حل الجملة السابقة، باستخدام طريقة المحددات (CRAMER) .

الحل

1. أحسب مقلوب المصفوفة A باستخدام العمليات الأولية على الأسطر .

نلاحظ بأن $\det A=-1$ يمكن تحويل A إلى I_3 :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{L_2\to L_2-2L_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{L_3\to L_3-L_2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1\to L_1-L_3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{L_1\to L_1+L_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{L_2\to -L_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I_3$$

تحويل I_3 إلى A^{-1} :

$$I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{L_2\to L_2-2L_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3\to L_3-L_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\2&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1\to L_1-L_3}\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-2&1&0\\2&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{L_1\to L_1+L_2}\begin{pmatrix}-3&2&-1\\-2&1&0\\2&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{L_2\to -L_2}\begin{pmatrix}-3&2&-1\\2&-1&0\\2&-1&1\end{pmatrix}=A^{-1}$$

2. حل الجملة باستخدام الحساب المصفوفي :

$$\begin{cases}x+y+z&=1\\2x+y+2z&=1\\-y+z&=1\end{cases}\Leftrightarrow A\cdot X=B\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&2\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\left(A^{-1}\cdot A\right)\cdot X=X=A^{-1}\cdot B\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&2&-1\\2&-1&0\\2&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$$

3. حل الجملة باستخدام طريقة المحددات (CRAMER) .

لدينا $\det A=-1$ ومنه تكون المصفوفة A قابلة للقلب، والجملة تقبل حلا وحيدا :

$$x=\frac{\det A_x}{\det A}=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&-1&1\end{vmatrix}}{-1}=-2$$

$$y=\frac{\det A_y}{\det A}=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&2\\0&1&1\end{vmatrix}}{-1}=1$$

$$z=\frac{\det A_z}{\det A}=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&1\\0&-1&1\end{vmatrix}}{-1}=-2$$

4. مصفوفة تطبيق خطي بالنسبة لأساسين مختلفين

M و M' مصفوفتان تمثلان نفس التطبيق الخطي f من $\mathbb{R}^n$ في $\mathbb{R}^n$ بالنسبة للأساسين $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$:

ليكن $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ و $\mathcal{B}'=\{e'_1,e'_2,\cdots,e'_n\}$ بحيث :

$$M'=M_{\mathcal{B}'}(f)\quad و\quad M=M_{\mathcal{B}}(f)$$

ولتكن P هي مصفوفة الانتقال من الأساس $\mathcal{B}$ إلى الأساس $\mathcal{B}'$.

$$P = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = M\,(id_E\,,\mathcal{B}',\mathcal{B})$$

$$\begin{tikzcd}
\underset{\mathcal{B}'}{\mathbb{R}^n} \arrow[r, "id", "P"'] \arrow[rrr, bend right, "M'"'] & \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^n} \arrow[r, "f", "M"'] & \underset{\mathcal{B}'}{\mathbb{R}^n} \arrow[r, "id", "P^{-1}"'] & \underset{\mathcal{B}'}{\mathbb{R}^n}
\end{tikzcd}$$

$$\underset{\mathcal{B}\mathcal{B}'}{M}(id)\circ \underset{\mathcal{B}'\mathcal{B}}{M}(id) = \underset{\mathcal{B}\mathcal{B}}{M}(id\circ id) = \underset{\mathcal{B}}{M}(id) = I_n$$

$$\underset{\mathcal{B}'\mathcal{B}}{M}(id)\circ \underset{\mathcal{B}\mathcal{B}'}{M}(id) = \underset{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}{M}(id\circ id) = \underset{\mathcal{B}'}{M}(id) = I_n$$

$$\begin{tikzcd}
 & \underset{\mathcal{B}'}{\mathbb{R}^n} \arrow[dr, "id", "P"'] & \\
\underset{\mathcal{B}'}{\mathbb{R}^n} \arrow[ur, "f", "M'"'] \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[dr, "P", "id"'] & & \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^n} \\
 & \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^n} \arrow[ur, "M", "f"'] &
\end{tikzcd}$$

ينتج أن $id\circ f = f\circ id = f$ ، ومنه $\underset{\mathcal{B}\mathcal{B}'}{M}(id)\circ \underset{\mathcal{B}'}{M}(f) = \underset{\mathcal{B}}{M}(f)\circ \underset{\mathcal{B}\mathcal{B}'}{M}(id)$ أي $P\cdot M' = M\cdot P$.

وأخيرا تكون مصفوفة f بالنسبة للأساس $\mathcal{B}'$: $\boxed{M' = P^{-1}\cdot M\cdot P}$

تمرين رقم 7

f تطبيق خطي مصفوفته في الأساس القانوني $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$، هي

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

نعتبر في $\mathbb{R}^3$ الأساس: $\mathcal{B}' = \{e_1' = (2,1,1),\ e_2' = (2,3,1),\ e_3' = (-1,0,1)\}$

عين مصفوفة الانتقال P من الأساس $\mathcal{B}$ إلى الأساس $\mathcal{B}'$، أحسب P^{-1}.

واستنتج مصفوفة f في الأساس $\mathcal{B}'$.

الحل

مصفوفة الانتقال P من $\mathcal{B}$ إلى $\mathcal{B}'$:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

P قابلة للقلب ومقلوبها هو $P^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

ومنه M' مصفوفة f في الأساس $\mathcal{B}'$ تحقق : $M'=P^{-1}\cdot M\cdot P$ ، وبإجراء هذين الجدائين نجد :

$$M'=\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 15 & 24 & -3 \\ -6 & -10 & 2 \\ 6 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

تمرين رقم 8

f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^3$ معرف في الأساس القانوني $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$ ، بالشكل :

$$f(e_1)=(8,1,1) \quad ، \quad f(e_2)=(3,4,3) \quad ، \quad f(e_3)=(2,2,6)$$

4. ليكن $u=x\,e_1+y\,e_2+z\,e_3$ شعاعا من $\mathbb{R}^3$. احسب $f(u)$ و $(f\circ f)(u)$.
5. حل في $\mathbb{R}^3$، جملة المعادلات ذات المجاهيل x و y و z الآتية :

$$\begin{cases} 8x+3y+2z &=0 \\ x+4y+2z &=0 \\ x+3y+6z &=0 \end{cases}$$

1. عين جملة خطية، تكون مجموعة حلولها $\mathcal{S}$ من $\mathbb{R}^3$ هي الفضاء الشعاعي المعدوم .
2. عين مجموعة الأشعة (x,y,z) من $\mathbb{R}^3$ بحيث $f(x,y,z)-10(x,y,z)=(0,0,0)$.

استنتج من هذه الأشعة، الأشعة التي تحقق: $x+y+z=1$.

نعتبر في $\mathbb{R}^3$ الأساس $\mathcal{C}=\{u_1=(0,0,1),u_2=(0,1,0),u_3=(1,0,0)\}$

3. جد مركبات الأشعة $f(u_1)$ و $f(u_2)$ و $f(u_3)$ في الأساس $\mathcal{B}$ ثم في الأساس $\mathcal{C}$.

الحل

f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^3$ معرف في الأساس القانوني $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$ ، بالشكل :

$$f(e_1)=(8,1,1) \quad ، \quad f(e_2)=(3,4,3) \quad ، \quad f(e_3)=(2,2,6)$$

1. حساب $f(u)$ و $(f\circ f)(u)$

ليكن $u=(x,y,z)$ شعاعا من $\mathbb{R}^3$. نحسب $f(x,y,z)$ و $(f\circ f)(x,y,z)$:

$$f(u)=f(x,y,z)=x(8,1,1)+y(3,4,3)+z(2,2,6)$$
$$f(x,y,z)=(8x+3y+2z,\ x+4y+2z,\ x+3y+6z)$$
$$(f\circ f)(u)=f(f(x,y,z))=f(\underbrace{8x+3y+2z}_{x'},\ \underbrace{x+4y+2z}_{y'},\ \underbrace{x+3y+6z}_{z'})$$
$$f^2(x,y,z)=f(x',y',z')=(8x'+3y'+2z',\ x'+4y'+2z',\ x'+3y'+6z')$$
$$f^2(x,y,z)=(69x+42y+34z,\ 14x+25y+22z,\ 17x+33y+44z)$$

بطريقة المصفوفات :

نحسب M مصفوفة التطبيق f في الأساس القانوني $\mathcal{B}$:

$$M=\begin{pmatrix}8&3&2\\1&4&2\\1&3&6\end{pmatrix}$$

$$M\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&3&2\\1&4&2\\1&3&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8x+3y+2z\\x+4y+2z\\x+3y+6z\end{pmatrix}$$

فيكون التطبيق الخطي المطلوب

$$^{t}\begin{pmatrix}8x+3y+2z\\x+4y+2z\\x+3y+6z\end{pmatrix}=(8x+3y+2z,\,x+4y+2z,\,x+3y+6z)$$

نحسب M^2 مصفوفة التطبيق $(f\circ f)$ في الأساس القانوني $\mathcal{B}$:

$$M^2=M\cdot M=\begin{pmatrix}8&3&2\\1&4&2\\1&3&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8&3&2\\1&4&2\\1&3&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}69&42&34\\14&25&22\\17&33&44\end{pmatrix}$$

$$M^2\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}69&42&34\\14&25&22\\17&33&44\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}69x+42y+34z\\14x+25y+22z\\17x+33y+44z\end{pmatrix}$$

$$^{t}\begin{pmatrix}69x+42y+34z\\14x+25y+22z\\17x+33y+44z\end{pmatrix}=(69x+42y+34z,\,14x+25y+22z,\,17x+33y+44z)$$

2. حل في $\mathbb{R}^3$، جملة المعادلات ذات المجاهيل x و y و z :

$$(*)\ \begin{cases}8x+3y+2z&=0\\x+4y+2z&=0\\x+3y+6z&=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}8&3&2\\1&4&2\\1&3&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\quad x=0,\,y=0,\,z=0$$

ومنه $\ker f=\{(0,0,0)\}$، والتطبيق f متباين، وكذلك التطبيق f تقابلي.

3. نلاحظ أن مجموعة حلول الجملة الخطية $(*)$ هي الفضاء الشعاعي المعدوم.

4. مجموعة الأشعة (x,y,z) من $\mathbb{R}^3$: $f(x,y,z)-10(x,y,z)=(0,0,0)$.

$$f(x,y,z)-10(x,y,z)=(0,0,0)$$
$$(8x+3y+2z,\,x+4y+2z,\,x+3y+6z)-10(x,y,z)=(0,0,0)$$
$$(-2x+3y+2z,\,x-6y+2z,\,x+3y-4z)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases}-2x+3y+2z&=0\\x-6y+2z&=0\\x+3y-4z&=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3y\\3y=2z\end{cases}\Leftrightarrow\ x=2\lambda,\,y=\frac{2}{3}\lambda,\,z=\lambda\quad(\lambda\in\mathbb{R})$$

$$\ker\left(f-10\, id_{\mathbb{R}^3}\right)=\langle(2,\tfrac{2}{3},1)\rangle$$

باستخدام **المصفوفات**:

$$M-10I_3=\begin{pmatrix}8&3&2\\1&4&2\\1&3&6\end{pmatrix}-10\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3&2\\1&-6&2\\1&3&-4\end{pmatrix}$$

$$(M-10I_3)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3&2\\1&-6&2\\1&3&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+3y+2z&=0\\x-6y+2z&=0\\x+3y-4z&=0\end{cases}$$

استنتاج من هذه الأشعة، الأشعة التي تحقق: $x+y+z=1$:

$$x+y+z=2\lambda+\frac{2}{3}\lambda+\lambda=\frac{11}{3}\lambda=1\quad\Leftrightarrow\quad\lambda=\frac{3}{11}$$

5. في الأساس $\mathcal{C}=\{u_1=(0,0,1),u_2=(0,1,0),u_3=(1,0,0)\}$ لـ $\mathbb{R}^3$

نوجد مركبات الأشعة $f(u_1)$ و $f(u_2)$ و $f(u_3)$ في الأساس $\mathcal{B}$ ثم في الأساس $\mathcal{C}$.

- $f(u_1)$ في الأساس $\mathcal{B}$: $f(u_1)=f(e_3)=(2,2,6)$

لدينا: $(2,2,6)=\alpha(0,0,1)+\beta(0,1,0)+\delta(1,0,0)$

$\Leftrightarrow\quad \alpha=6,\beta=2,\delta=2$

ومنه مركبات $f(u_1)$ في الأساس $\mathcal{C}$: $f(u_1)=(6,2,2)$

- $f(u_2)$ في الأساس $\mathcal{B}$: $f(u_2)=f(e_2)=(3,4,3)$

لدينا: $(3,4,3)=\alpha(0,0,1)+\beta(0,1,0)+\delta(1,0,0)$

$\Leftrightarrow\quad \alpha=3,\beta=4,\delta=3$

ومنه مركبات $f(u_2)$ في الأساس $\mathcal{C}$: $f(u_2)=(3,4,3)$

- $f(u_3)$ في الأساس $\mathcal{B}$: $f(u_3)=f(e_1)=(8,1,1)$

لدينا: $(8,1,1)=\alpha(0,0,1)+\beta(0,1,0)+\delta(1,0,0)$

$\Leftrightarrow\quad \alpha=1,\beta=1,\delta=8$

ومنه مركبات $f(u_2)$ في الأساس $\mathcal{C}$: $f(u_3)=(1,1,8)$

تمرين رقم 9

أ) في الأساس القانوني $\mathcal{B}=\{e_1, e_2, e_3\}$ للفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$، نعتبر الفضاء الجزئي:

$$\mathrm{F}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x=0\}$$

1. هات أساساً للفضاء الجزئي F .
2. بين أن $\mathrm{G}=\langle e_1+e_2+e_3\rangle$ هو فضاء شعاعي جزئي إضافي لـ F في $\mathbb{R}^3$.

ب) ليكن f التطبيق الخطي المعرف بالشكل :

$$f:\mathbb{R}^3=\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}\to\mathbb{R}^3$$
$$u=u_1+u_2\mapsto u_1 \qquad (u_1\in\mathrm{F},\ u_2\in\mathrm{G})$$

1. ليكن $u=x\,e_1+y\,e_2+z\,e_3$ شعاعا من $\mathbb{R}^3$. عبِّر عن $f(u)$ بدلالة x و y و z .
2. عين M مصفوفة f بالنسبة للأساس القانوني. ما هي رتبة M ، هل M قابلة للقلب ؟
3. حدد الفضائين الجزئيين: $\mathrm{Ker}\, f$ و $\mathrm{Im}\, f$.

جـ) g تطبيق خطي من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^3$ مصفوفته في الأساس القانوني $\mathcal{B}$ ، هي

$$N=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

1. أحسب الجداء $M\cdot N$ ، واستنتج مصفوفة التطبيق الخطي $h=f\circ g$ في الأساس القانوني $\mathcal{B}$.

الحل

أ) الفضاء الجزئي $\mathrm{F}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x=0\}$ من الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$:

1. الشعاع (x,y,z) من الفضاء الجزئي F ، يكون بالشكل: $(0,y,z)$ حيث x و y حقيقيان كيفيان.

$$\mathrm{F}=\langle u_1=(0,1,0), u_2=(0,0,1)\rangle \quad \text{و} \quad \dim \mathrm{F}=2$$

2. نبين أن الفضاء $\mathrm{G}=\langle e_1+e_2+e_3\rangle$ هو فضاء إضافي لـ F في $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{G}=\langle v=(1,1,1)\rangle \quad \text{و} \quad \dim \mathrm{G}=1$$
$$\mathrm{F}+\mathrm{G}=\langle u_1=(0,1,0), u_2=(0,0,1), v=(1,1,1)\rangle$$

الأشعة u_1 و u_2 و v مستقلة خطيا. ومنه المجموع $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ مباشر. $\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G})=3$، ومنه: $\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}=\mathbb{R}^3$

ب) f التطبيق الخطي المعرف بالشكل :

$$f:\mathbb{R}^3=\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}\to\mathbb{R}^3$$
$$u=u_1+u_2\mapsto u_1 \qquad (u_1\in\mathrm{F},\ u_2\in\mathrm{G})$$

1. ليكن $u=(x,y,z)$ شعاعا من $\mathbb{R}^3$. نكتب $f(u)=f(x,y,z)$ بدلالة x و y و z.

لدينا $u=(x,y,z)=u_1+u_2=\alpha(0,1,0)+\beta(0,0,1)+\delta(1,1,1)$

$$(x,y,z)=(0,\alpha+\delta,\beta+\delta) \Leftrightarrow \alpha=-x+y,\beta=-x+z,\delta=x$$

ومنه $f(x,y,z)=(-x+y)(0,1,0)+(-x+z)(0,0,1)=(0,-x+y,-x+z)$

2. تعيين M مصفوفة التطبيق f في الأساس القانوني $\mathcal{B}$:

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نلاحظ بأن أشعة الأعمدة أو الأسطر في المصفوفة M مرتبطة خطيا، نلاحظ أن الشعاعين الأخيرين مستقلان خطيا، فهما يشكلان أساس لـ $\operatorname{Im} f$. ومنه الرتبة: $\dim \operatorname{Im} f=\operatorname{rg} f=\operatorname{rg} M=2$، ومن نظرية البعد نستنتج: $\dim\ker f=1$، والتطبيق f غير متباين ومنه f غير تقابلي.

يمكن ملاحظة أن $\det M=0$ والمصفوفة M غير قابلة للقلب .

3. تعيين الفضائيين الجزئيين $\ker f$ و $\operatorname{Im} f$: $\ker f=\mathrm{G}$ و $\operatorname{Im} f=\mathrm{F}$.

جـ) مصفوفة g في الأساس القانوني $\mathcal{B}$ هي N

1. حساب الجداء $M\cdot N$:

$$M\cdot N=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ومنه عبارة التطبيق الخطي $h=f\circ g$ في الأساس القانوني $\mathcal{B}$:

$$h(x,y,z)=(f\circ g)(x,y,z)=(0,\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y,\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}y-\frac{1}{2}z)$$

المراجع:

- L. Amyotte, *Introduction à l'algèbre linéaire et à ses applications*, 2ème éd., kanada: édition du renouveau pédagogique INC, 2003.
- Y. Dodge, *Mathématiques de base pour économistes*, Paris, Springer, 2002.
- J. Cellier, *Algèbre linéaire: des bases aux applications*, Rennes: presses universitaires de Rennes, 2008.
- B. Guerrien, *Algèbre linéaire pour économistes*, 4ème éd., Paris, Economica, 1997.
- P. Tauvel, *Exercices d'algèbre générale et arithmétique*: 470 *énoncés avec solutions détaillées*, Paris, Dunod, 2004.