جامعة الجيلالي بونعامة - خميس مليانة
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية
وعلوم التسيير

السداسي الثاني
المجموعات: 2 و 3 و 4

السنة الأولى جذع مشترك LMD

رياضيات 02

من مطبوعة :

الرياضيات للتخصصات الاقتصادية

المحور الرابع:

ملخص درس : محدد المصفوفة ومقلوبها

1. محدد ومقلوب مصفوفة
2. خواص المحددات
3. مقلوب مصفوفة
4. ايجاد المقلوب بطريقة المصفوفة المرافقة
5. ايجاد المقلوب بطريقة غوص
6. حساب مقلوب مصفوفة بالعمليات الأولية
7. أمثلة وتمارين محلولة

السنة الجامعية 2023 -2024

1. محدد مصفوفة

1.1 مفاهيم عامة

ليكن E فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$.

الشكل **المتعدد الخطية** على الفضاء الشعاعي E هو التطبيق المتعدد الخطية $f : E^n \to \mathbb{R}$.

يكون هذا الشكل **متناوبا** في الحالة التي إذا وجد فيها شعاعين متساويين من $v_1, v_2, \cdots, v_n$ فإنه يكون $f(v_1, v_2, \cdots, v_n) = 0$.

إذا كان $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ أساس لـ E. نسمي **تطبيق المحدد بالنسبة للأساس** $\mathcal{B}$، ونرمز له بـ $\det$، الشكل الخطي الوحيد على E بحيث $\det\{e_1, e_2, \cdots, e_n\} = 1$.

ويسمي عندئذ $\det\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ محدد المجموعة $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ بالنسبة للأساس $\mathcal{B}$.

2.1 محدد مصفوفة مربعة

لتكن A مصفوفة مربعة.

نسمي **محدد** A، ونرمز له بـ $\det A$ محدد عائلة أشعة الأعمدة بالنسبة للأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^n$.

محدد A هو $\det A$.

محدد من الرتبة 1: $A = (a) \quad / a \in \mathbb{R}$

$$\det A = |a| = a$$

محدد من الرتبة 2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{12} \cdot a_{21})$$

محدد من الرتبة 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22} \cdot a_{33} - a_{21} \cdot a_{32}) - a_{12}(a_{21} \cdot a_{23} - a_{21} \cdot a_{31}) + a_{13}(a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31})$$

3.1 نشر محدد مصفوفة

في المصفوفة المربعة $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$، إذا رمزنا بـ A_{ij} للمصفوفة الناتجة عن حذف السطر i والعمود j في المصفوفة A، سيتحدد محدد A بالعلاقة:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} \cdot \det A_{1k}$$

الذي يسمى **نشر** أو **تحليل محدد** A على السطر الأول.

ويمكن نشر $\det A$ على السطر i كما يلي:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A_{ij} \qquad j \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

كما يمكن نشر $\det A$ على العمود j كما يلي:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A_{ij} \qquad i \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

مثال

نشر $\det A$ على العمود الأول، حيث

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(0\times 2 - 4\times 1) - 1((-1)\times 2 - 4\times 1) + 3((-1)\times 1 - 0\times 1) = -5$$

4.1 حساب محدد مصفوفة بطريقة SARRUS

في حساب محدد $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ بهذه الطريقة نتبع ما يلي:

نكتب العمود الأول والعمود الثاني في المصفوفة A **على يمين أعمدة المصفوفة** A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

فيكون

$$\det A = +a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$$
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

مثال

في المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ نكتب العمود الأول والعمود الثاني في A **على اليمين:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{matrix}$$

ومنه

$$\det A = +2\cdot 0\cdot 2+1\cdot 1\cdot 3+1\cdot 1\cdot 4 \\ -1\cdot 0\cdot 3-2\cdot 1\cdot 4-1\cdot 1\cdot 2=-3$$

2. خواص المحددات وتطبيقاتها

1.2 نتائج حول المحددات

- في مصفوفة مربعة A من الرتبة n، تكون : A قابلة للقلب $\Leftrightarrow$ $\det A\neq 0$
- إذا كانت $A=(0)$، فإن $\det A=0$ و $\operatorname{rg} A=0$
- إذا تساوا عمودان أو كان أحد الأعمدة معدوما، أو أحد الأعمدة هو عبارة خطية لأعمدة أخرى في مصفوفة A ، فإن $\det A=0$.
- إذا أضفنا إلى أي عمود عبارة خطية لأعمدة أخرى، فإن قيمة المحدد لا تتغير.
- $\det A=\det {}^tA$ و $\det(\lambda A)=\lambda^n\det A$ حيث $\lambda\neq 0$.
- إذا كانت A قابلة للقلب، أي وجدت A^{-1}، فإن $\det A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}$ (لأن $\det I_n=1$)
- $\det AB=\det A\times\det B$ (B هي أيضا مصفوفة مربعة من الرتبة n).
- إذا كانت A من $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$، فإن $\operatorname{rg}(A)\leq\min(n,p)$، زيادة على ذلك، إذا كانت B من $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$، فإن $\operatorname{rg}(A)+\operatorname{rg}(B)-p\leq\operatorname{rg}(A\cdot B)\leq\min(n,q)$
- إن رتبة A لا تتغير إذا أجريتا عملية أولية على أسطرها. وهذه العمليات هي :
  - تبديل سطرين : $\ell_i\longleftrightarrow\ell_j$ $(i\neq j)$
  - ضرب سطر بعدد حقيقي : $\ell_i\longrightarrow\lambda\ell_i$ $(\lambda\in\mathbb{R})$
  - إضافة عبارة خطية لبعض الأسطر إلى أسطر أخرى : $\ell_i\longrightarrow\ell_i+\beta\ell_j$ $(i\neq j,\beta\neq 0)$
- للتبسيط ، نضع المصفوفة المربعة A من النمط 3 بشكل ثلاثة أسطر كالآتي، ونتحقق من الخواص :

$$A=\begin{pmatrix}\ell_1\\ \ell_2\\ \ell_3\end{pmatrix}$$

- $\det\begin{pmatrix}\ell_1\\ \lambda\ell_2\\ \ell_3\end{pmatrix}=\lambda\det\begin{pmatrix}\ell_1\\ \ell_2\\ \ell_3\end{pmatrix}\quad /\lambda\neq 0$
- $\det\begin{pmatrix}\ell_3\\ \ell_2\\ \ell_1\end{pmatrix}=-\det\begin{pmatrix}\ell_1\\ \ell_2\\ \ell_3\end{pmatrix}$

- $\det\begin{pmatrix}\ell_1\\ \ell_2\\ \ell_3+\ell'_3\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\ell_1\\ \ell_2\\ \ell_3\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\ell_1\\ \ell_2\\ \ell'_3\end{pmatrix}$
- $\det\begin{pmatrix}\ell_1+\alpha\ell_2+\beta\ell_3\\ \ell_2\\ \ell_3\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\ell_1\\ \ell_2\\ \ell_3\end{pmatrix}\qquad (\alpha,\beta\in\mathbb{R})$

2.2 حساب مقلوب مصفوفة باستخدام المحددات

A مصفوفة قابلة للقلب، حيث $A=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1,2,\cdots,n}$

إذا كان $\det A\neq 0$ فإن A قابلة للقلب أي أن المصفوفة A^{-1} موجودة.

نعتبر المصفوفة المجاورة لـ A المعرفة كالآتي : $\tilde{A}=\left(\tilde{a}_{ij}\right)_{i,j=1,2,\cdots,n}$ حيث $\tilde{a}_{ij}=(-1)^{i+j}\det A_{ji}$

بالتجريب نحصل:

$$C=A\cdot\tilde{A}=\begin{pmatrix}\det A & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & \det A\end{pmatrix}$$

فنضع $C=\left(c_{ij}\right)_{i,j=1,2,\cdots,n}$ حيث $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot\tilde{a}_{kj}$.

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot(-1)^{i+j}\det A_{jk}$$

$$c_{ij}=\begin{cases}\det A & , \quad i=j\\ 0 & , \quad i\neq j\end{cases}\quad ,\quad \forall i\in\{1,2,\dots,n\}$$

وهذا يعني بأن $C=\det A\cdot I_n$

وبالتالي $A\cdot\tilde{A}=\det A\cdot I_n$ ومنه $A\cdot\left(\frac{1}{\det A}\tilde{A}\right)=\left(\frac{1}{\det A}\tilde{A}\right)\cdot A=I_n$

أي أن A قابلة للقلب ومقلوبها هو: $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\times\tilde{A}$

خلاصة

إذا كانت المصفوفة A قابلة للقلب فإن مقلوبها هو المصفوفة $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\tilde{A}$

حيث $\tilde{A}=\left(\tilde{a}_{ij}\right)_{i,j=1,2,\cdots,n}$ و $\tilde{a}_{ij}=(-1)^{i+j}\det A_{ji}$

مثلا في المصفوفة: $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ يكون لدينا $\det B=2(-4)-(1)(3)=-11$. ومنه B قابلة للقلب .

$${}^t\tilde{B}=\begin{pmatrix}+(-4) & -(3)\\ -(1) & +(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

ومنه
$$^{t}(^{t}\tilde{B})=\tilde{B}=\begin{pmatrix}-4 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{1}{\det B}\tilde{B}=\frac{1}{(-11)}\begin{pmatrix}-4 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4/11 & 1/11\\ 3/11 & -2/11\end{pmatrix}$$

وفي المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 3 & 4\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ يكون لدينا : $\det A=-59$ و $^{t}\tilde{A}=\begin{pmatrix}-5 & -14 & 13\\ -6 & -5 & -8\\ 14 & -8 & -1\end{pmatrix}$

ومنه

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\tilde{A}=-\frac{1}{59}\begin{pmatrix}-5 & -6 & 13\\ -14 & -5 & -8\\ 13 & -8 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{59} & \frac{6}{59} & -\frac{13}{59}\\ \frac{14}{59} & \frac{5}{59} & \frac{8}{59}\\ \frac{13}{59} & \frac{8}{59} & \frac{1}{59}\end{pmatrix}$$

3.2 استخدام المحددات في الجمل الخطية

إذا كانت المصفوفة A قابلة للقلب في المعادلة : $A\cdot X=B$ التي يمكن تمثيلها مصفوفيا بالشكل :

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

حيث A مصفوفة المعاملات و X مصفوفة عمود المتغيرات. و B مصفوفة الأعداد الثابتة، فإن حلول هذه المعادلة تكون : $X=A^{-1}\cdot B$

إذن، إذا كانت A قابلة للقلب فإن : $A\cdot X=B \iff X=A^{-1}\cdot X$

ومنه حل المعادلة الآنفة : $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$

تمرين رقم 1

حل المعادلة $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$

الحل

نضع $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&3&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ ، $B=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ ، $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. فنحصل على : $A\cdot X=B$

بالحساب نجد $\det A=4$ والمصفوفة A قابلة للقلب ومقلوبها هو : $A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&1&-3\\-2&1&1\\2&-1&3\end{pmatrix}$

ومنه الحل :
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&1&-3\\-2&1&1\\2&-1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\7\\5\end{pmatrix}$$

3. طريقة Gauss

1.3 مصفوفة مرفقة بجملة خطية

نعتبر الجملة:
$$\begin{cases}\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n=b_1\\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2n}x_n=b_2\\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\ldots+\alpha_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

التي مصفوفتها المرفقة هي :
$$\left(\begin{array}{cccc|c}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\cdots&\alpha_{1n}&b_1\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\cdots&\alpha_{2n}&b_2\\ \vdots&\cdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ \alpha_{n1}&\alpha_{n2}&\cdots&\alpha_{nn}&b_n\end{array}\right)$$

2.3 خوارزمية Gauss

- نبدل (إن تطلب الأمر) أسطر الجملة بحيث يكون معامل المجهول الأول في المعادلة الأولى (السطر الأول) غير معدوم. يسمى هذا المعامل بعنصر الارتكاز Pivot .
- نعدم المجهول الأول في بقية المعادلات، عددها $(n-1)$ باستخدام التحويل :

$$\ell_i\longrightarrow a_{11}\ell_i+a_{i1}\ell_1\qquad(i>1)$$

- نجري نفس العمل السابق من أجل الجملة ذات $(n-1)$ مجهول و $(n-1)$ معادلة الناتجة من حذف السطر الأول والعمود الأول .

ملاحظة: في أثناء الحساب إذا :

- ظهر سطر يمثل المعادلة $0x_1+\ldots.+0x_n=0$ نحذف هذا السطر ونواصل العمل.

- وجد سطر من الشكل $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \mid b_k \end{pmatrix}$ $b_k \neq 0$ فإن الجملة لا تقبل حل.

تمرين رقم 2

1. حل، باستخدام الحساب المصفوفي، جملة المعادلات ذات المجاهيل x و y و z الآتية :

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} x \quad -2z &= a \\ \quad y + z &= b \\ -2x + y &= 0 \end{cases}$$ (a و b وسيطان حقيقيان)

واستنتج أن المصفوفة A المرفقة بالجملة (I) هي مصفوفة قابلة للقلب .

2. حل الجملة (I)، باستخدام العمليات الأولية على الأسطر (METHODE DU PIVOT DE GAUSS)

الحل

1. حل جملة المعادلات (I) :

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} x \quad -2z &= a \\ \quad y + z &= b \\ -2x + y &= 0 \end{cases}$$ (a و b وسيطان حقيقيان)

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5$ ومنه تكون المصفوفة A قابلة للقلب، والجملة تقبل حلا وحيدا :

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b \\ y = \frac{2}{5}a + \frac{4}{5}b \\ z = -\frac{2}{5}a + \frac{1}{5}b \end{cases}$$

2. حل الجملة (I) باستخدام العمليات الأولية على الأسطر .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to L_3 + 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & -4 & 2a \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & -5 & 2a-b \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z = a \\ y + z = b \\ -5z = 2a - b \end{cases}$$

ومنه الحل الوحيد :
$$\begin{cases} x &= \frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b \\ y &= \frac{2}{5}a + \frac{4}{5}b \\ z &= -\frac{2}{5}a + \frac{1}{5}b \end{cases}$$

5. حساب مقلوب مصفوفة بالعمليات الأولية

1.5 التحويلات الأولية وعكسها

التحويل الأولي ϕ على الأسطر تقابلي، وإذا رمزنا بـ ϕ^{-1} لتحويله العكسي ، يكون لدينا :

ϕ	$L_i \to \alpha L_i \quad (\alpha \neq 0)$	$L_i \leftrightarrow L_j \quad (\alpha \neq 0)$	$L_i \to L_i + \lambda \cdot L_j \quad (i \neq j)$
ϕ^{-1}	$L_i \to \frac{1}{\alpha} L_i$	$L_j \leftrightarrow L_i$	$L_j \to \frac{1}{\lambda}\left(L_j - L_i\right)$

وإذا كانت M قابلة للقلب، أي عندما يكون $\det M \neq 0$ ، فإنه يمكن تحويلها إلى مصفوفة الوحدة I_n، باستخدام التحويلات الأولية على أسطرها (عمليا: يتم تحويلها إلى مثلثية من الأعلى ثم إلى مثلثية من الأسفل فتصبح قطرية ثم إلى مصفوفة الوحدة).

فإذا كان $I_n = \phi_k \circ \phi_{k-1} \circ .... \circ \phi_1(M)$، حيث ϕ_k العملية الأولية رقم k على أسطر المصفوفة M ،

فإن $M^{-1} = \phi_k \circ \phi_{k-1} \circ .... \circ \phi_1(I_n)$

بعبارة أخرى : بنفس عمليات التحويل على أسطر M إلى I_n يتم الحصول على M^{-1} انطلاقا من I_n .

مثال

نحول المصفوفة A إلى مصفوفة مثلثية عليا، حيث $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

باستخدام المتتالي للتحويلات $L_i \to L_i + \lambda \cdot L_j$ في المصفوفة A لإرجاعها إلى مصفوفة تشمل أصفارا في "مثلثها السفلي"، كالآتي:

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0_1 & \bullet & \bullet \\ 0_2 & 0_3 & \bullet \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

تمرين رقم 3

نعتبر المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&2\\0&-1&1\end{pmatrix}$

أحسب مقلوب المصفوفة A باستخدام العمليات الأولية على الأسطر .

الحل

نلاحظ بأن $\det A=-1$ يمكن تحويل A إلى I_3 :

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&2\\0&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{L_2\to L_2-2L_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3\to L_3-L_2}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1\to L_1-L_3}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{L_1\to L_1+L_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{L_2\to -L_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$$

تحويل I_3 إلى A^{-1} :

$$I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{L_2\to L_2-2L_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3\to L_3-L_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\2&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1\to L_1-L_3}\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-2&1&0\\2&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{L_1\to L_1+L_2}\begin{pmatrix}-3&2&-1\\-2&1&0\\2&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{L_2\to -L_2}\begin{pmatrix}-3&2&-1\\2&-1&0\\2&-1&1\end{pmatrix}=A^{-1}$$

تمرين رقم 4

نعتبر في الأساس القانون لـ $\mathbb{R}^3$ المصفوفة $M=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$

1. أحسب M^2 و M^3 واستنتج M^n $(k\in\mathbb{N})$
2. استنتج بأن المصفوفة M قابلة للقلب. عين مصفوفتها العكسية M^{-1} بدلالة M .
3. حل المعادلة: $M\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

الحل

1. بالحساب نجد $M^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ ، $M^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$ ،

$$(k\in\mathbb{N})\quad M^n=\begin{cases}I_3 & ,n=3k\\ M & ,n=3k+1\\ M^2 & ,n=3k+2\end{cases}$$

2. استنتاج بأن المصفوفة M قابلة للقلب، وتعيين مصفوفتها العكسية M^{-1} بدلالة M.

لدينا $M^3=I_3$ **ومنه** $M\cdot M^2=M^2\cdot M=I_3$ أي المصفوفة M قابلة للقلب: $M^{-1}=M^2$

قلوب M هو : $M^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

3. من التكافؤ: $M\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=M^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ ، نجد : $z=2$ ، $y=1$ ، $x=3$

تمرين رقم 5

في الفضائين $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ المزودين بأسسهما القانونية، نعتبر A و B مصفوفتا التطبيقين الخطيين f و g:

$$A=M(f)=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&2&4\end{pmatrix}\quad,\quad B=M(g)=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\1&3&2\end{pmatrix}$$

1. عين التطبيقين f و g المرفقين بالمصفوفتين A و B، بالنسبة للأسس القانونية لفضاءات البدء والوصول.
2. عين مصفوفة التطبيق الخطي $f\circ g$ ، واستنتج التطبيق $f\circ g$.

الحل

في الفضائين $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ المزودين بأسسهما القانونية، نعتبر A و B مصفوفتا التطبيقين الخطيين f و g:

$$A=M(f)=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&2&4\end{pmatrix}\quad,\quad B=M(g)=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\1&3&2\end{pmatrix}$$

1. التطبيقان f و g المرفقان بالمصفوفتين A و B، بالنسبة للأسس القانونية لفضاءات البدء والوصول، هما

$$f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2,\ (x,y,z)\mapsto(2x-3y+z\,,\,x+2y+4z)\quad;\quad g:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3,\ (x,y,z)\mapsto(2x+y-z\,,\,x+2y+z\,,\,x+3y+2z)$$

2. تعطى مصفوفة التطبيق الخطي $f\circ g$ بالعلاقة : $C=M(f\circ g)=M(f)\cdot M(g)=A\cdot B$، حيث:

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&-3\\8&17&9\end{pmatrix}$$

ومنه التطبيق الخطي $f\circ g$ يكون معرفا كما يلي:

$$(f\circ g)(x,y,z)=(2x-y-3z\,,\,8x+17y+9z)$$

تمرين رقم 6

باستخدام طريقة العمليات على الأسطر، حل الجملة الخطية الآتية:

$$(\mathrm{I})\cdots\begin{cases}2x+y+z=1\\-x+2y+z=2\\x+y+2z=3\end{cases}$$

الحل

نعبر عن الجملة الخطية بالكتابة المصفوفية، ونجري العمليات على أسطرها:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&1&1\\-1&2&1&2\\1&1&2&3\end{array}\right)\xrightarrow[\ell_3\to 2\ell_3-\ell_1]{\ell_2\to 2\ell_2+\ell_1}\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&1&1\\0&5&3&5\\0&1&3&5\end{array}\right)\xrightarrow{\ell_3\to 5\ell_3-\ell_2}\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&1&1\\0&5&3&5\\0&0&12&20\end{array}\right)$$

المصفوفة الاخيرة تكافئ:

$$(\mathrm{II})\cdots\begin{cases}2x+y+z=1\\5y+3z=5\\12z=20\end{cases}$$

حل هذه الجملة، يبتدئ بالمعادلة الأخيرة، فنحصل على $z=\frac{5}{3}$ ، وبالتعويض في المعادلة الثانية، نحصل على $y=0$. وأخيرا، **وبالتعويض** في المعادلة الأولى نحصل على $x=-\frac{1}{3}$

تمرين رقم 7

نعتبر في الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$ المصفوفة:

$$M=\begin{pmatrix}0&1&-1\\4&-3&4\\3&-3&4\end{pmatrix}$$

1. أحسب M^n $(n\in\mathbb{N})$
2. استنتج بأن المصفوفة M قابلة للقلب، وعين مصفوفتها العكسية M^{-1} بدلالة M.
3. حل المعادلة $M\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$

الحل

$$M=\begin{pmatrix}0&1&-1\\4&-3&4\\3&-3&4\end{pmatrix}$$

1. بالحساب المباشر نجد: $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، $M^n = \begin{cases} M & , n = 2k \\ I_3 & , n = 2k+1 \end{cases} \quad (\mathbb{N} \ni k)$

2. استنتاج بأن المصفوفة M قابلة للقلب، وتعيين مصفوفتها العكسية M^{-1} بدلالة M.

لدينا $M^2 = I_3$ ومنه $M \cdot M = M \cdot M = I_3$ أي المصفوفة M قابلة للقلب: $M^{-1} = M$

3. من التكافؤ $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ، نجد : $z = 18$, $y = 22$, $x = -1$

المراجع:

- L. Amyotte, *Introduction à l'algèbre linéaire et à ses applications*, 2ème éd., kanada: édition du renouveau pédagogique INC, 2003.
- Y. Dodge, *Mathématiques de base pour économistes*, Paris, Springer, 2002.
- J. Cellier, *Algèbre linéaire: des bases aux applications*, Rennes: presses universitaires de Rennes, 2008.
- B. Guerrien, *Algèbre linéaire pour économistes*, 4ème éd., Paris, Economica, 1997.
- P. Tauvel, *Exercices d'algèbre générale et arithmétique*: 470 *énoncés avec solutions détaillées*, Paris, Dunod, 2004.