جامعة الجيلالي بونعامة - خميس مليانة
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية
وعلوم التسيير

السداسي الثاني
المجموعات: 2 و 3 و 4

السنة الأولى جذع مشترك LMD

رياضيات 02

من مطبوعة :

الرياضيات للتخصصات الاقتصادية

المحور الثاني:

ملخص درس : **الدوال بمتغيرين حقيقيين**

1. دالة بمتغيرين حقيقيين
2. التمثيل البياني لدالة بمتغيرين حقيقيين
3. مجموعة تعريف الدوال ذات متغيرين
4. نهاية واستمرار دالة بمتغيرين
5. الاشتقاق الجزئي من الرتبة الأولى
6. الاشتقاق الجزئي من الرتبة الثانية
7. أمثلة وتمارين محلولة

السنة الجامعية 2023 -2024

1. دالة بمتغيرين حقيقيين ذات قيم حقيقية

دالة ذات عدة متغيرات هي دالة مجموعة تعريفها هي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$. حيث تمثل الدالة في فضاء ثلاثي الأبعاد بحيث يكون الإحداثي العمودي لأي نقطة هو قيمة الدالة عند الثنائية الممثلة في الإحداثين الأولين، وهذا التمثيل يسمى «السطح الممثل للدالة».

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y), x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

$$A \times B = \{(x,y), x \in A \wedge y \in B\}$$

مجموعة تعريف دالة ذات متغيرين حقيقيين، هي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$ و مجموعة وصول هذه الدالة هي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$. بعض الدوال تكون معرفة لجميع الأعداد $\mathbb{R}^2$، والبعض الآخر تكون معرفة على لمجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$

2.1 مجموعة تعريف دالة بمتغيرين حقيقيين

تعريف: ليكن D جزء من $\mathbb{R}^2$. نسمي دالة بمتغيرين معرفية على D، الدالة التي يرفق بكل ثنائية (x,y) من D العدد الحقيقي الوحيد z، والذي نرمز له بـ: $f(x,y) = z$

z : تمثل الارتفاع المعرف عند كل نقطة (x,y) من D.

نرمز للدالة f ذات المتغيرين بالرمز :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) \end{aligned}$$

مجموعة تعريف f ونرمز لها بالرمز D_f هي المجموعة:

$$D_f = \{(x,y), f(x,y) \text{ définie}\}$$

مثال

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) = \frac{1}{x-y} \end{aligned}$$

$f(x,y)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $x - y \neq 0$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y\}$$

$$f(2,3) = \frac{1}{2-3} = -1$$

تمرين رقم 1

عين مجموعة تعريف الدالة الآتية:

$$f : (x,y) \mapsto \frac{x+y}{\ln(x)}$$

الحل

$f(x,y)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $x > 0$ ومهما كان y من $\mathbb{R}$. ومنه $D_f = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

تمرين رقم 2

عين مجموعة تعريف الدالة الآتية:

$$f:(x,y)\mapsto \frac{x^2+y^2-3}{x^2+y^4+1}$$

الحل

$f(x,y)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $x^2+y^4+1\neq 0$

نعلم بأن $x^2\geq 0$ و $y^4\geq 0$ من أجل كل x و y من $\mathbb{R}$

ومنه بأن $x^2+y^4\geq 0$ من أجل كل x و y من $\mathbb{R}$

من أجل كل x و y من $\mathbb{R}$، يكون لدينا $x^2+y^4+1\geq 1$

وأخيرا $x^2+y^4+1\neq 0$ مهما كان x و y من $\mathbb{R}$. ومنه $D_f=\mathbb{R}^2$

2.1 التمثيل البياني لدالة بمتغيرين

لتكن $f:A\to\mathbb{R}^2$ حيث A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$ السطح الممثل للدالة f هو مجموعة النقاط.

$$G(f)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,(x,y)\in A\wedge z=f(x,y)\}$$

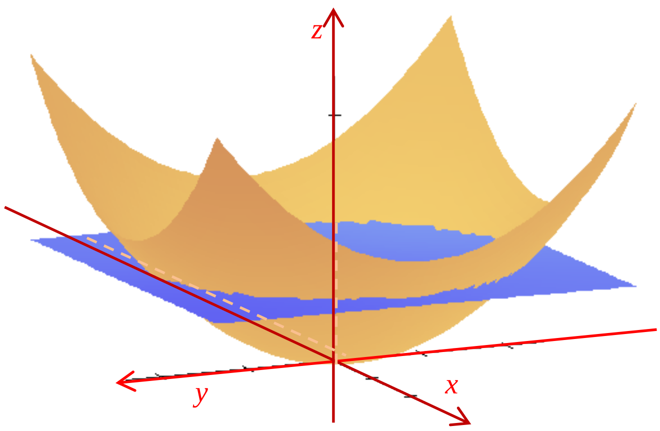
تسمى التمثيل البياني للدالة f .

ملاحظة:

لتمثيل دالة من $\mathbb{R}^2$ في $\mathbb{R}$، نمثل النقاط ذات الإحداثيات $M(x,y,f(x,y))$

مثلا: $f(x,y)=x^2+y^2=z$

كتقاطع المساحة ذات المعادلة $z=x^2+y^2$ والمستوي ذي المعادلة $z=k$ $(0<k)$ (الموازي للمستوي xOy)



- يمكن تعريف الدالة المحدودة، القيم الحدية للدوال ذات متغيرين حقيقيين كما هو معمول به في الدوال ذات المتغير الحقيقي.

$$f:\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R}:\quad (x,y)\mapsto\frac{x\cdot y}{x^2+y^2}$$

- الدالة f محدودة: باستخدام المتباينة $2|a\cdot b|\leq a^2+b^2$

نستنتج من اجل كل (x,y) من $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$: $|f(x,y)|\leq\frac{1}{2}$

مثال1

$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}:\quad (x,y)\mapsto f(x,y)=x^2+y^2$$

محدودة من الأدنى ب $(0,0)$

لأنه لدينا $f(x,y)=x^2+y^2\geq(0,0)=(0,0)$

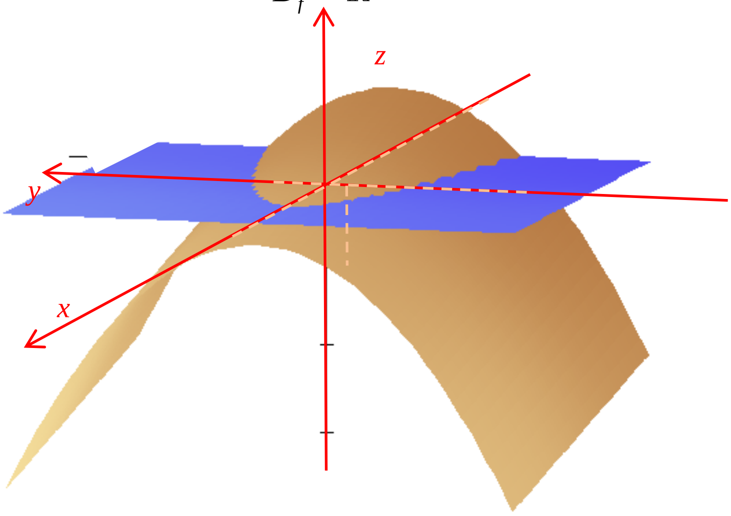
تمرين رقم3

عين مجموعة تعريف الدالة الآتية وأنشئ بيانها

$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$(x,y)\mapsto f(x,y)=-x^2+y$$

الحل

$$D_f=\mathbb{R}^2$$



تمرين رقم 4

عين مجموعة تعريف الدالة

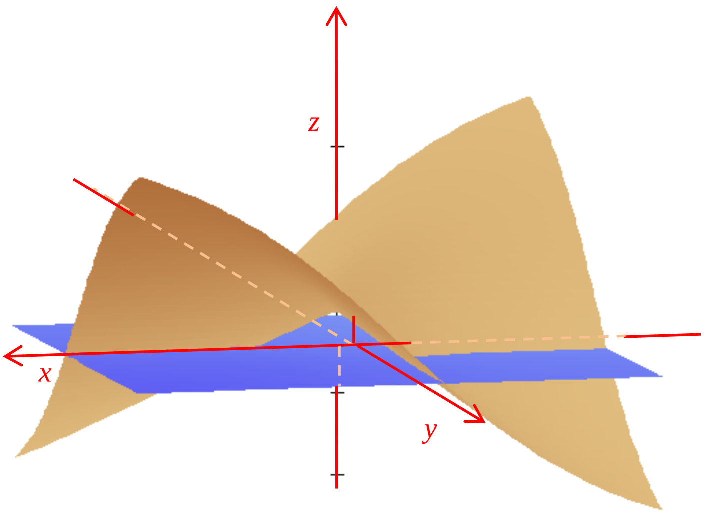
$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}:\quad (x,y)\mapsto\frac{x\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

الحل

$f(x,y)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $x^2+y^2\neq0$

ونعلم بأن $x^2+y^2=0$ إذا وفقط إذا كان $x^2=0$ و $y^2=0$

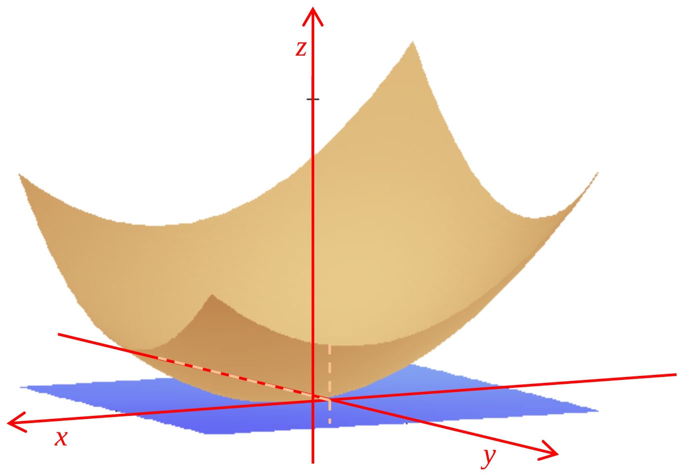
ومنه $D_f=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$



مثال1

$$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y)\mapsto f(x,y)=x^2-3x+y^2-2y+5$$

$f(x,y)$ معرفة على $\mathbb{R}^2$. ومنه مجموعة تعريف هي $D_f=\mathbb{R}^2$



2.1 النهايات

تعريف: نقول أن الدالة ℓ هي نهاية الدالة f عند (a_1,a_2). ونكتب:

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y)=\ell$$

مثال

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\sqrt{x^2+x\cdot y+y^2}=1 \quad ، \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+x\cdot y+y^2}=0$$

مثال

$x^2+y^2>0$ مع $x^2+y^2\longrightarrow 0$ لأن $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{x^2+y^2}=+\infty$

مثال:

نعرف على $\mathbb{R}^2=\{(x,-x)\}$ الدالة العددية $f(x,y)=\dfrac{\sin(x+y)}{s+y}$

بوضع $x+y=U$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{U\to 0} f(u)=1$$

تمرين رقم 5

1. بين أنه من أجل كل x و y من $\mathbb{R}$ ، يكون لدينا: $2|x\cdot y|\leq x^2+y^2$

لتكن الدالة
$$f:\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\longrightarrow\mathbb{R}:\quad (x,y)\mapsto f(x,y)=\frac{3x^2+x\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

2. بين أنه من أجل كل (x,y) من $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ ، يكون لدينا:
$$|f(x,y)|\leq 4\sqrt{x^2+y^2}$$

استنتج أن f تقبل نهاية عند $(0,0)$.

الحل

1. لدينا
$$\left(|x|+|x|\right)^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2|x\cdot y|\geq 0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2\geq 2|x\cdot y|$$

2. يمكن كتابة العلاقة السابقة كما يلي:
$$|x\cdot y|\leq\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{2}$$

ومنه نستنتج:
$$|f(x,y)|\leq\frac{3\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+\dfrac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq 4\sqrt{x^2+y^2}$$

ومنه $\lim\limits_{(x,y)\to(0_1,0)}|f(x,y)|=0$

2.1 الاستمرار

تعريف1: نقول أن الدالة $f:X\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ مستمرة عند (a_1,a_2) إذا وفقط إذا كانت:
$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y)=f(a_1,a_2)$$

تعريف2: نقول أن $f:X\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ مستمرة على X إذا وفقط إذا كانت مستمرة عند كل نقطة من X

تمرين رقم 6

f دالة معرفة كما يلي:
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\cdot y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ (0,0) & , \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

هل f مستمرة عند $(0,0)$ ؟

الحل

نضع $x=y=t$ فيكون $\lim_{t\to 0} f(t,t)=\frac{1}{2}$

وبالتالي $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\neq(0,0)$ والدالة f غير مستمرة عند $(0,0)$.

2.1 المشتقات الجزئية

إذا كانت f دالة ذات متغيرين حقيقيين x و y و $m_0(x_0,y_0)\in D_f$

1. إذا كانت الدالة $f_x: x\mapsto f(x,y_0)$ معرفة في جوار x_0 بحيث $(x_0,y_0)\in D_f$.

- إذا قبلت الدالة f_x الاشتقاق عند x_0 نقول بأن هذه المشتقة هي المشتقة الجزئية للدالة f بالنسبة للمتغير الحقيقي x عند (x_0,y_0).

ونرمز إلى هذه المشتقة بالرمز f_x' أو $\frac{\partial f}{\partial x}$ بحيث:

$$f_x'(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

إذا كانت الدالة $f_y: y\mapsto f(x,y)$ معرفة في جوار y_0 بحيث $(x_0,y_0)\in D_f$.

- إذا قبلت الدالة f_y الاشتقاق عند y_0 نقول بأن هذه المشتقة هي المشتقة الجزئية للدالة f بالنسبة للمتغير الحقيقي y عند (x_0,y_0)
- ونرمز إلى هذه المشتقة بالرمز f_y' أو $\frac{\partial f}{\partial y}$ بحيث:

$$f_y'(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

ملاحظة:

إذا وجدت المشتقات الجزئية f_x' و f_y' نقول أن الدالة f قابلة للانشقاق.

قاعدة:

مشتقة الدالة f هي مشتقتها بالنسبة لأحد المتغيرين مع إبقاء المتغير الثاني ثابت.

$$\frac{\partial f}{\partial x}:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$(x,y)\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

حساب المشتقات لدالة بمتغيرين x,y تُحسب بالشكل:

بالنسبة لـ x: نعتبر y كثابت وتشتق f كدالة لـ x.

وبالنسبة لـ y: نعتبر x كثابت وتشتق f كدالة لـ y.

تمرين رقم 7

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}^2$ كما يلي: $f(x,y)=x^4\cdot y^3$

الحل

لدينا

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x^3\cdot y^3\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=32$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3x^4\cdot y^2\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=12$$

تمرين رقم 8

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}^2$ كما يلي: $f(x,y)=x^2\cdot\sqrt{y}+y$

الحل

لدينا $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\sqrt{y}\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^2}{2\sqrt{y}}+1$

تمرين رقم 9

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}^2$ كما يلي: $f(x,y)=x^2+y^2$

الحل

لدينا $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y$

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}^3$ كما يلي: $f(x,y,z)=5x+y^3-2z^2$

لدينا $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=5,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=3y^2\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=-4z$

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ كما يلي: $f(x,y)=\frac{2x+y}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2(x^2+y^2)-(2x+y)\cdot(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2x^2+2y^2-4x^2-4x\cdot y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-2x^2+2y^2-4x\cdot y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{(x^2+y^2)-(2x+y)\cdot(2y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2+y^2-2y^2-4x\cdot y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2-4x\cdot y}{(x^2+y^2)^2}$$

مشتقات جزئية من رتب أعلى

إذا كانت f دالة ذات متغيرين حقيقيين x و y تقبل الاشتقاق مرتين، فإننا نعرف المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية كالتالي:

$$f''_{x^2}=\frac{\partial f}{\partial x}(f'_x)=\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial x}f\ ,\quad f''_{y^2}=\frac{\partial f}{\partial y}(f'_y)=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial y}f$$

$$f''_{xy}=\frac{\partial f}{\partial x}(f'_y)=\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}f\ ,\quad f''_{yx}=\frac{\partial f}{\partial y}(f'_x)=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}f$$

مثال

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^2$ كما يلي: $f(x,y)=x^4\cdot y^3$

$$f_x'(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x^3\cdot y^3\ ,\quad f_{xy}''(x,y)=\frac{\partial f_y'}{\partial x}(x,y)=12x^3\cdot y^2$$

$$f_y'(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3x^4\cdot y^2\ ,\quad f_{yx}''(x,y)=\frac{\partial f_x'}{\partial y}(x,y)=12x^3\cdot y^2$$

نظرية:

إذا قبلت الدالة f في جوار (x_0,y_0) مشتقات جزئية f_{xy}'' و f_{yx}'' مستمرة، فهي متساوية:

$$f_{xy}''=f_{yx}''$$

تمرين رقم 10

لتكن الدالة f ذات متغيرين حقيقيين x و y المعرفة على $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$ كما يلي:

$$f(x,y)=\frac{x}{y}+2x^3\cdot y^5$$

أحسب $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial y}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$

الحل

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{y}+6x^2\cdot y^5\right)=12x\cdot y^5$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=\frac{\partial f}{\partial y}\left(-\frac{x}{y^2}+10x^3\cdot y^4\right)=\frac{2x}{y^2}+40x^3\cdot y^5$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(-\frac{x}{y^2}+10x^3\cdot y^4\right)=-\frac{1}{y^2}+30x^2\cdot y^4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)=\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{y^2}+6x^2\cdot y^5\right)=-\frac{1}{y^2}+30x^2\cdot y^4$$

تمرين رقم 11

أحسب المشتقات الجزئية من الرتبتين الأولى والثانية للدالة:

$$f(x,y)=\frac{x}{x^2+y}$$

الحل

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y}\right)=-\frac{x}{(y+x^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{y-x^2}{(y+x^2)^2}\right)=\frac{2x\cdot(x^2-3y)}{(y+x^2)^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y}\right)=\frac{y-x^2}{(y+x^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=\frac{\partial f}{\partial y}\left(-\frac{x}{(y+x^2)^2}\right)=2\frac{x}{(y+x^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{x}{(y+x^2)^2}\right)=\frac{3x^2-y}{(y+x^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)=\frac{\partial f}{\partial y}\left(-\frac{x}{(y+x^2)^2}\right)=\frac{3x^2-y}{(y+x^2)^3}$$

تمرين رقم 12

لتكن الدالة f ذات متغيرين حقيقيين x و y المعرفة على $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x,y)=x^2-3x+y^2-2y+5$$

بين أن f تقبل قيمة صفرى

الحل

$$f(x,y)=\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2-\left(\tfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-1\right)^2-1^2+5=\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-1\right)^2+\tfrac{7}{4}$$

نعلم بأن $\forall(x-y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R},\quad \left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-1\right)^2\geq 0$

وبالتالي من أجل كل x و y المعرفة من $\mathbb{R}$ يكون لدينا:

$$f(x,y)=\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-1\right)^2\geq\tfrac{7}{4}$$

إذن $f\left(\tfrac{3}{2},1\right)=\tfrac{7}{4}$ هي قيمة صغرى للدالة f عند النقطة $\left(\tfrac{3}{2},1\right)$.

ملاحظة:

المشتقة الجزئية بالنسبة لـ x هي أيضا دالة ذات متغيرين نرمز لها $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

مشتقات جزئية برتب عليا: ونعني بها مشتقات من الرتب 1، 2، ..

بطريقة مشابهة

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

مثلا:

$$f(x,y)=2x^3e^y$$

إذا قبلت f دالة بمتغيرين الاشتقاق بالنسبة لـ x و y على مجال D من $\mathbb{R}^2$.

فإن الدالة $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ التي ترفق بكل (x,y) من D العدد $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ تسمى مشتقة f عند (x,y) بالنسبة للمتغير الأول.

2. دوال بثلاثة متغيرات:

دوال بـ 3 متغير ذوات قيم حقيقية

$$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$$
$$(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)$$

يمكن تعميم طريقة الاشتقاق الجزئي على دالة بـ n متغير.

دالة بقيم شعاعية:

نعتبر الدالة f المعرفة $f(x,y)=\begin{pmatrix} x+y \\ x\cdot y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$

فيكون

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$$

تمرين رقم 13

عين مجموعة التعريف والمشتقات $\frac{\partial f}{\partial y}$، $\frac{\partial f}{\partial y}$، $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$، $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ للتطبيق f المعرفة على $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}^2$ كما يلي:

$$f(x,y)=\begin{pmatrix} x^2 \\ x+y \end{pmatrix}$$

الحل

$f(x,y)$ معرفة على $D_f=\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix} \quad ، \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(x,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ، \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

تعميم:

n و p عددين طبيعيين غير معدومين، إذا أردنا تعميم مفهوم دالة بعدة متغيرات نرمز بـ f لدالة معرفة على U من $\mathbb{R}^n$ في $\mathbb{R}^p$.

U مجموعة محتواة في $\mathbb{R}^n$، توجد p دالة من $U\subset\mathbb{R}^n$ ذات قيم في $\mathbb{R}$.

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\begin{pmatrix} f_1(x_1,\cdots,x_n) \\ \cdots \\ f_p(x_1,\cdots,x_n) \end{pmatrix}$$

تمرين:

نعتبر الدالة $f(x,y)=x^2+2x+y^2+4y+5$

بين أن $\forall xy\in\mathbb{R}_+ \quad f(x,y)\geq 0$

بين أن توجيد نقطة حدية صغرى لـ $f(x,y)$.

تمرين رقم 14

أحسب المشتقات الجزئية من الرتبتين الأولى والثانية للدالة:

$$f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

1. عين D مجموعة تعريف f.
2. أحسب $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$
3. عين المشتقات الجزئية $\frac{\partial f}{\partial x}$
4. كامل $f(x,y)$ بالنسبة للمتغير x.

الحل

1. $f(x,y)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $0\le x$ و $0\le y$ ومنه $D_f=\mathbb{R}_+^2$
2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\sqrt{0}+\sqrt{0}=0$
3. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $\int f(x,y)dx=\int\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)dx=\int\sqrt{x}\,dx+\int\sqrt{y}\,dx$

ومنه $\int f(x,y)dx=\frac{3}{2}\sqrt{x^3}+x\sqrt{y}+c$ حيث c ثابت حقيقيي اختياري

المراجع:

- K. Abdelkarim, *Exercices résolus d'analyse* (*avec rappel de cours*), Alger, OPU, 1993.
- E. Azoulay, *Mathématiques*: *cours et exercices*, tome 1, Paris, Mc Graw-Hill, 1983.
- S. Benachour, *Exercices d'analyse avec solutions*, tome 1, Alger, Khawarysm, 1991.
- J.-J. Colin, *Fonctions usuelles*: *exercices corrigés avec rappels de cours*, Paris, Cépaduès, 2007.
- Y. Dodge, *Mathématiques de base pour économistes*, Paris, Springer, 2002.
- G. Patrik, *Mathématiques pour l'économie*: *méthodes et exercices corrigés*, Belgique : de boeck, 2005.
- F. Pham, *Fonctions d'une ou deux variables*: des fonctions variables, Paris, Dunod, 2003.