Unité d’enseignement : UEF 3.1.1

Crédits : 4

Coefficient : 2

Théorie des mécanismes

Théorie des mécanismes

Chapitre 4 : Analyse cinématique des mécanismes plans

Objectifs :

- Analyser la cinématique des mécanismes plans ;
- Analyser un mécanisme plan à quatre barres.

4.1. Définition d'un mécanisme plan

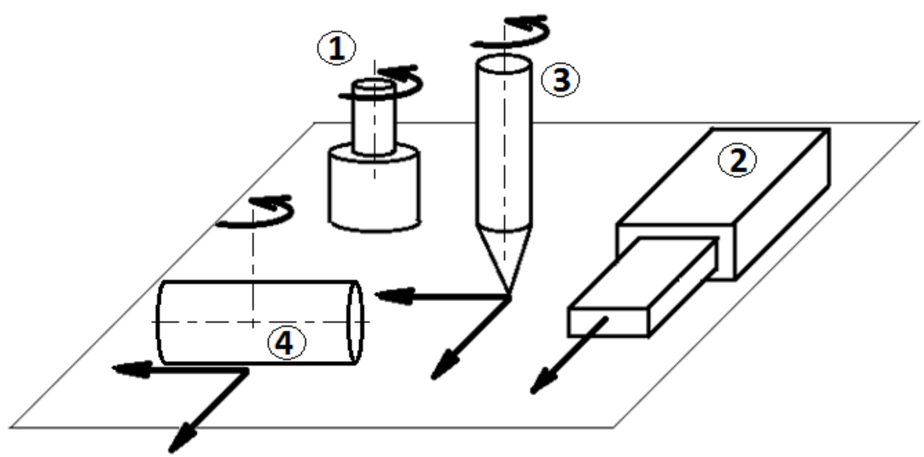
Un mécanisme est dit plan si tous les points de ce mécanisme se trouvent dans le même plan ou dans des plans parallèles à n'importe quel instant t

4.2. Identification des paramètres d'un mécanisme

4.2.1. Liaisons dans le plan

Les liaisons pouvant exister dans un plan sont :

- Pivot d'axe perpendiculaire au plan (1ddl=Rotation)
- Glissière d'axe parallèle au plan (1ddl=Translation)
- Ponctuelle d'axe perpendiculaire au plan (3ddl=2Translations+Rotation)
- Linéaire rectiligne à axe parallèle au plan (3ddl=2Translations+Rotation)

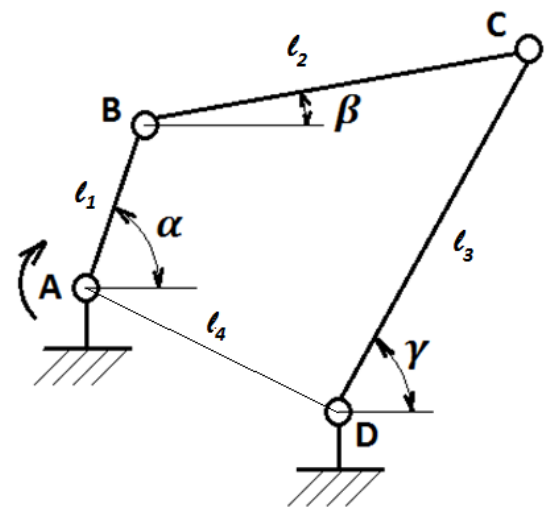


4.2. Identification des paramètres d'un mécanisme

4.2.2. Paramètres d'un mécanisme

La connaissance de ces paramètres est nécessaire pour l'analyse du mécanisme, on distingue des paramètres constants et variables.

Le mécanisme ci-contre admet les



a) Fixes :

$$l_1 = AB$$
$$l_2 = BC$$
$$l_3 = CD$$
$$l_4 = AD$$

b) Variables :

$$\alpha = \alpha(t)$$
$$\beta = \beta(t)$$
$$\gamma = \gamma(t)$$

Ces variables sont dépendantes :

$\beta = \beta(\alpha)$ et $\gamma = \gamma(\alpha)$

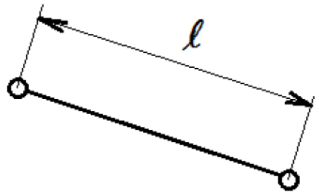
4.2. Identification des paramètres d'un mécanisme

4.2.3. Caractéristiques géométriques d'un élément de mécanisme

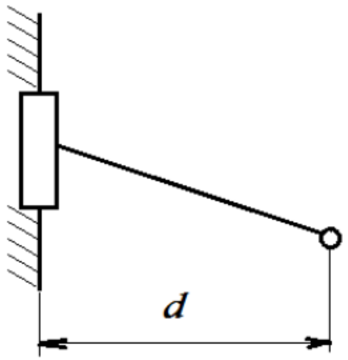
A l'exception de la chaine ouverte ou on peut tomber sur un élément à une liaison avec un autre, la plupart des éléments des mécanismes sont au moins à deux liaisons on dit qu'ils sont binaires.

Pour les éléments binaires, on distingue 3 cas selon la nature des liaisons:

- Un élément avec deux liaisons pivots est caractérisé par la distance perpendiculaire entre les deux axes de ses liaisons



- Un élément avec une liaison pivot et une liaison glissière est caractérisé par la distance du centre de la liaison pivot à l'axe de la glissière.



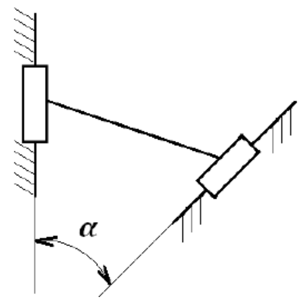
4.2. Identification des paramètres d'un mécanisme

4.2.3. Caractéristiques géométriques d'un élément de mécanisme

A l'exception de la chaine ouverte ou on peut tomber sur un élément à une liaison avec un autre, la plupart des éléments des mécanismes sont au moins à deux liaisons on dit qu'ils sont binaires.

Pour les éléments binaires, on distingue 3 cas selon la nature des liaisons:

- Un élément avec deux liaisons glissières est caractérisé par l'angle entre les deux axes de ses liaisons.

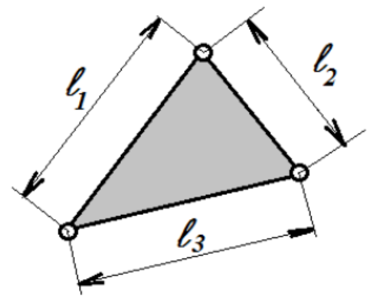


4.2. Identification des paramètres d'un mécanisme

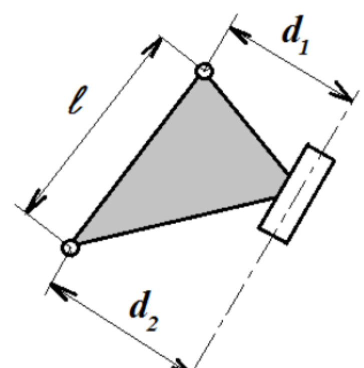
4.2.3. Caractéristiques géométriques d'un élément de mécanisme

De pour les éléments ternaires (à 3 liaisons), on peut distinguer 3 cas :

- Un élément avec trois liaisons pivots est caractérisé par trois distances perpendiculaires des entre les axes deux à deux



- Un élément avec deux liaisons pivots et une glissière est caractérisé par une distance perpendiculaire des entre les axes des pivots et deux distances entre les centres des pivot et l'axe de la glissière.

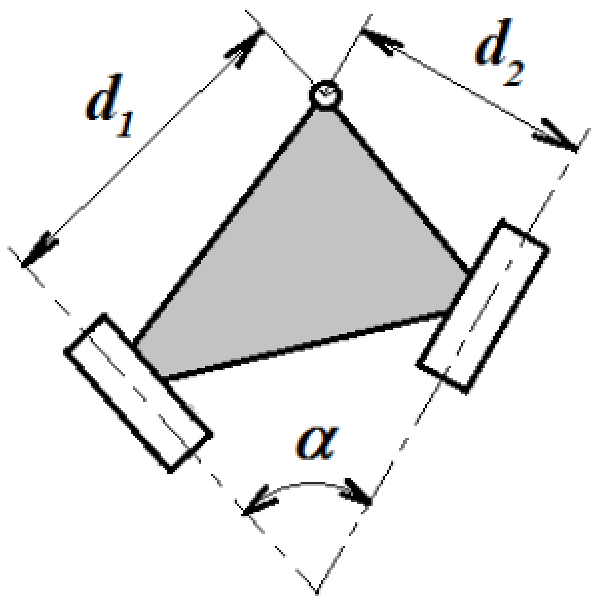


4.2. Identification des paramètres d'un mécanisme

4.2.3. Caractéristiques géométriques d'un élément de mécanisme

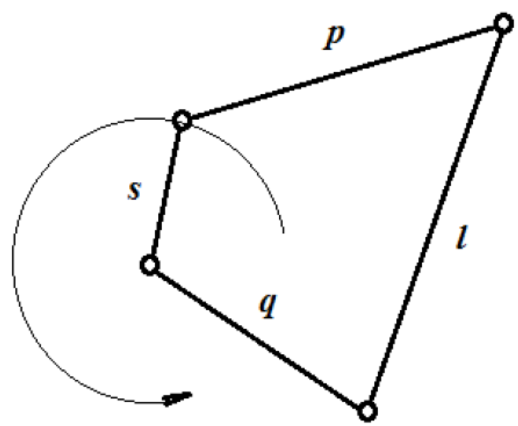
De pour les éléments ternaires (à 3 liaisons), on peut distinguer 3 cas :

- Un élément avec deux liaisons glissières et un pivot est caractérisé par deux distances entre le centre du pivot et les axes des glissières et un angle entre les axes des deux glissières.



4.3. Loi de Grashoff pour les mécanismes à 4 barres

Considérons un mécanisme à 4 barres dont la plus courte est de longueur s, la plus longue est de longueur l et les deux autres de longueurs respectives p et q



La loi de Grashoff pour un mécanisme à quatre barres stipule si la somme des longueurs des barres la plus longue et la plus courte est inférieure ou égale à la somme des longueurs des autres barres alors la plus courte peut effectuer un tour complet par rapport à la barre voisine.

$$l + s \leq p + q$$

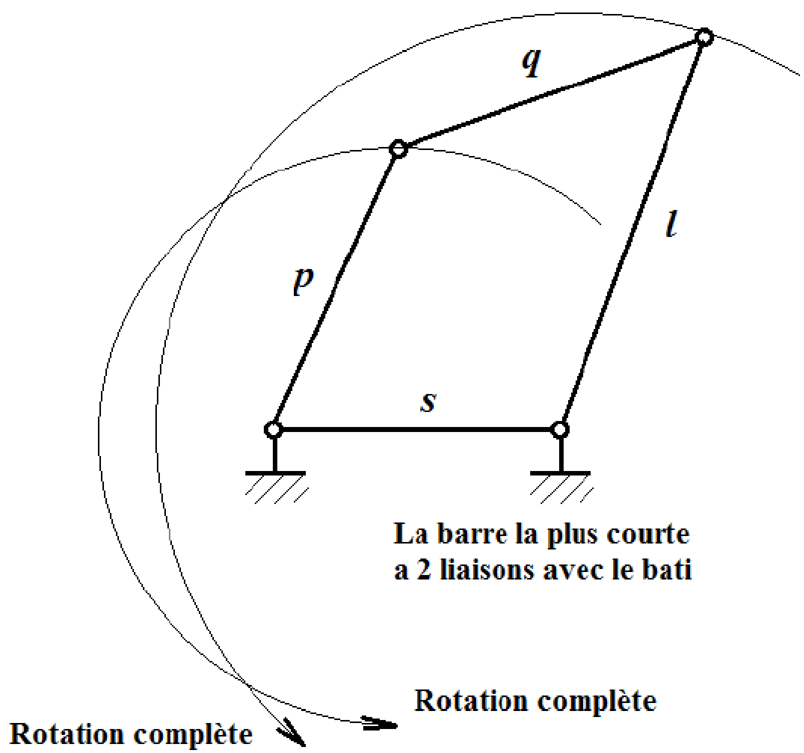
Selon le mode d'articulation de la barre courte s avec le bâti (une, deux articulations ou pas d'articulation) on distingue les cas suivants de la loi de Grashoff :

4.3. Loi de Grashoff pour les mécanismes à 4 barres

4.3.1. La barre courte est fixe (deux liaisons avec le bâti)

Les deux barres p et l peuvent faire un tour complet si :

$$l + s > p + q$$

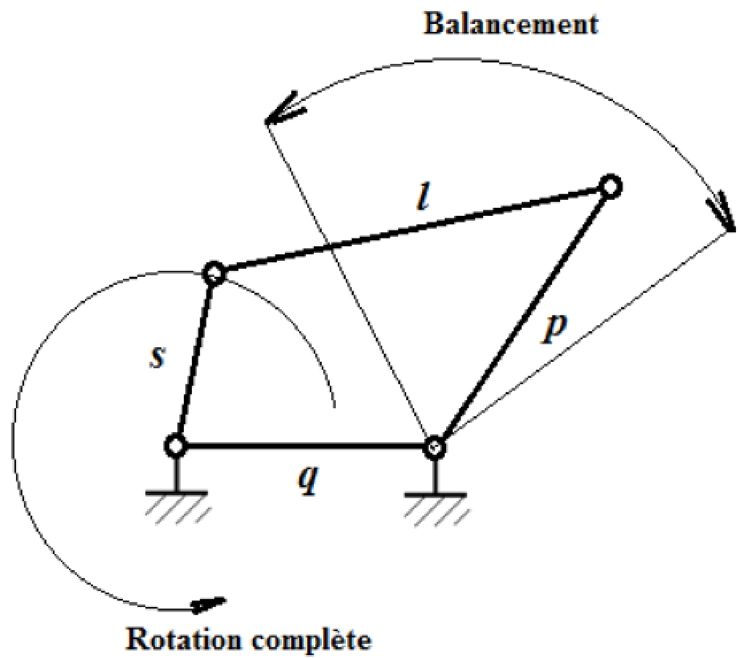


4.3. Loi de Grashoff pour les mécanismes à 4 barres

4.3.2. La barre courte a une seule liaison avec le bâti

La barre courte s fera un tour complet si la condition suivante est satisfaite :

$$l + s < p + q$$



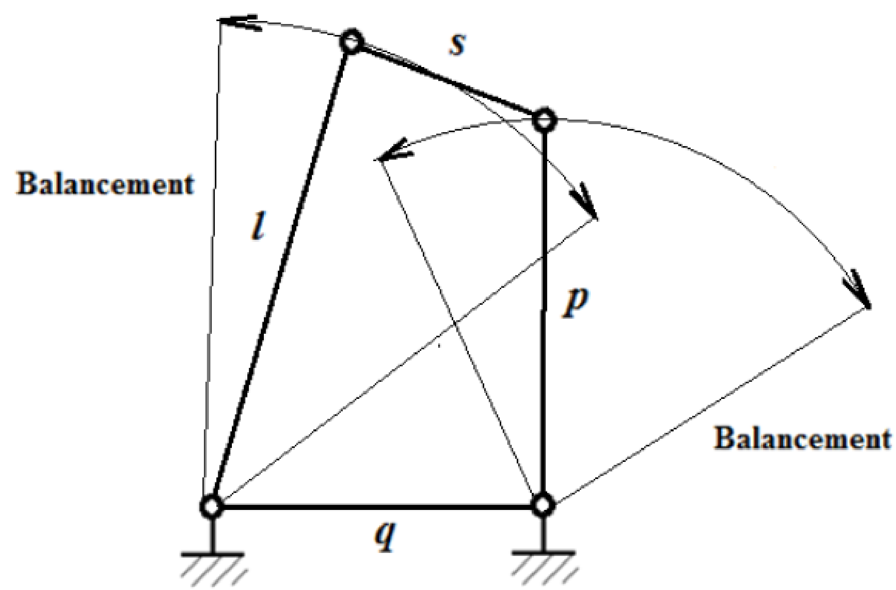
4.3. Loi de Grashoff pour les mécanismes à 4 barres

4.3.3. La barre courte n'a aucune liaison avec le bâti

Si la condition suivante est satisfaite :

$$l + s > p + q$$

Les deux barres p et l n'effectuent pas une rotation complète.

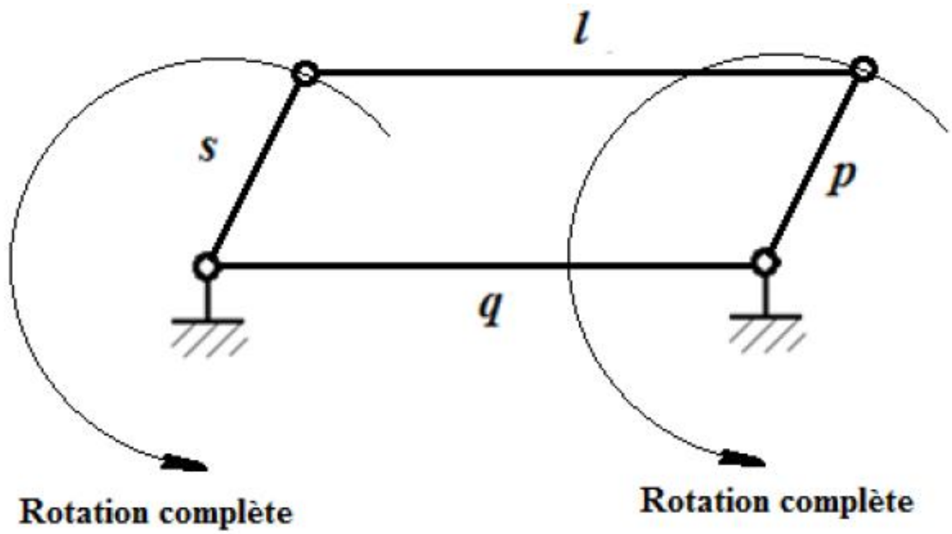


4.3. Loi de Grashoff pour les mécanismes à 4 barres

4.3.4. La barre courte a liaison avec le bâti et formant un parallélogramme avec les autres barres

Dans ce cas nous avons $s = p$ et $l = q$ (un parallélogramme)
Ce qui entrainera l'écriture de la loi de Grashoff :

$$s + l = p + q$$

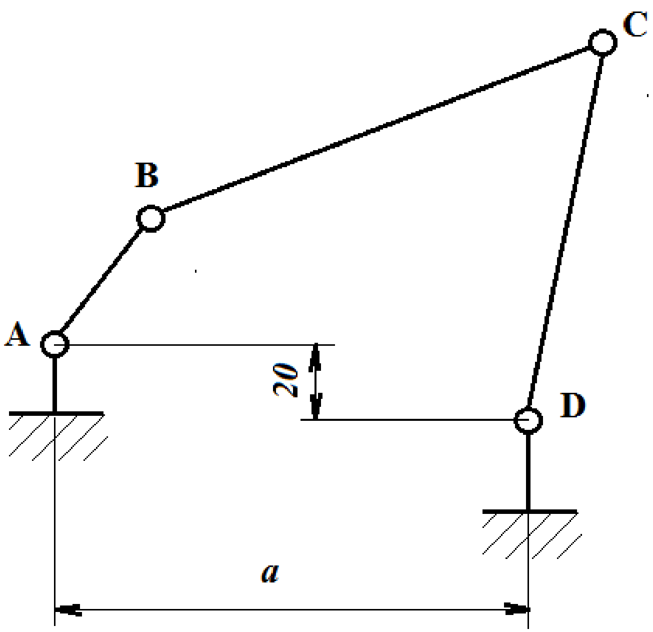


4.3. Loi de Grashoff pour les mécanismes à 4 barres

4.3.4. La barre courte a liaison avec le bâti et formant un parallélogramme avec les autres barres

Exemple 4.1 :

Soit le système à 4 barres suivant :



En admettant que la barre AB est la plus petite barre et BC la plus grande barre. On donne :

AB= 50mm

BC=150mm

CD=120mm

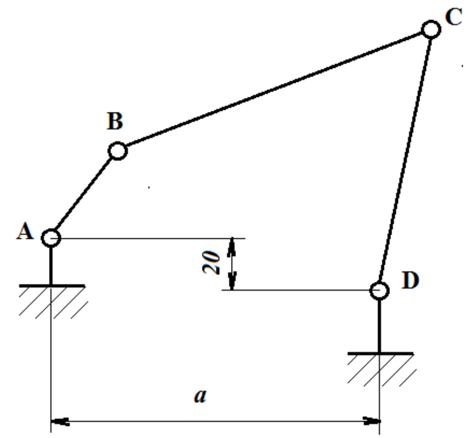
On souhaite que la barre AB fasse un tour complet, pour cela déterminer la valeur minimale

de la cote ***a***

4.3. Loi de Grashoff pour les mécanismes à 4 barres

4.3.4. La barre courte a liaison avec le bâti et formant un parallélogramme avec les autres barres

Exemple 4.1 : AB= 50mm ; BC=150mm ; CD=120mm



Solution :

La loi de Grashoff pour un mécanisme à 4 barres s'écrit :

$$AB + BC \leq AD + CD$$
$$AD^2 = a^2 + 20^2$$

$$AD = \sqrt{a^2 + 20^2}$$
$$AD \geq AB + BC - CD$$
$$AD \geq 50 + 150 - 120$$
$$AD \geq 80mm$$
$$AD \geq 80mm$$
$$a \geq 77.46mm$$

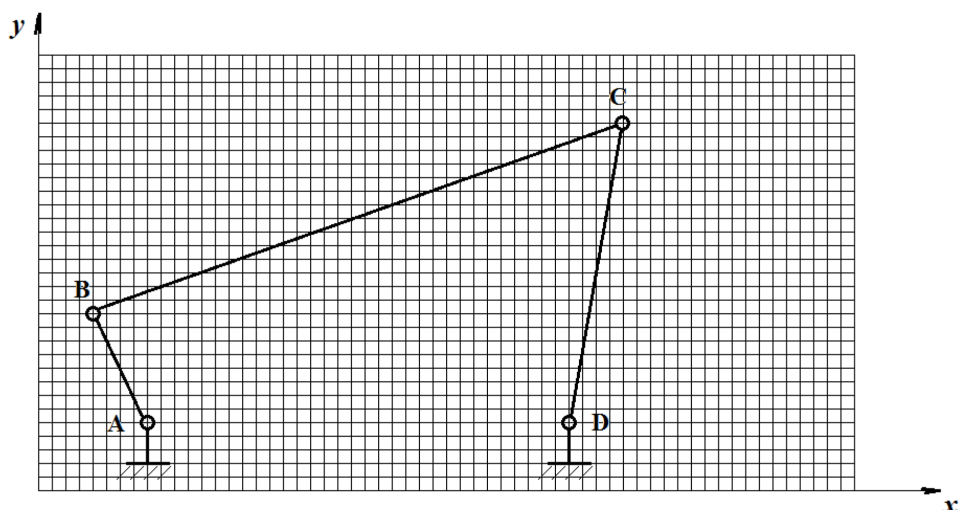
4.4. Analyse des déplacements d'un mécanisme plan

La connaissance des paramètres d'un mécanisme est nécessaire pour déterminer le déplacement d'un mécanisme plan. Pour cela on utilise deux méthodes : graphique et analytique.

4.4.1. Méthode graphique

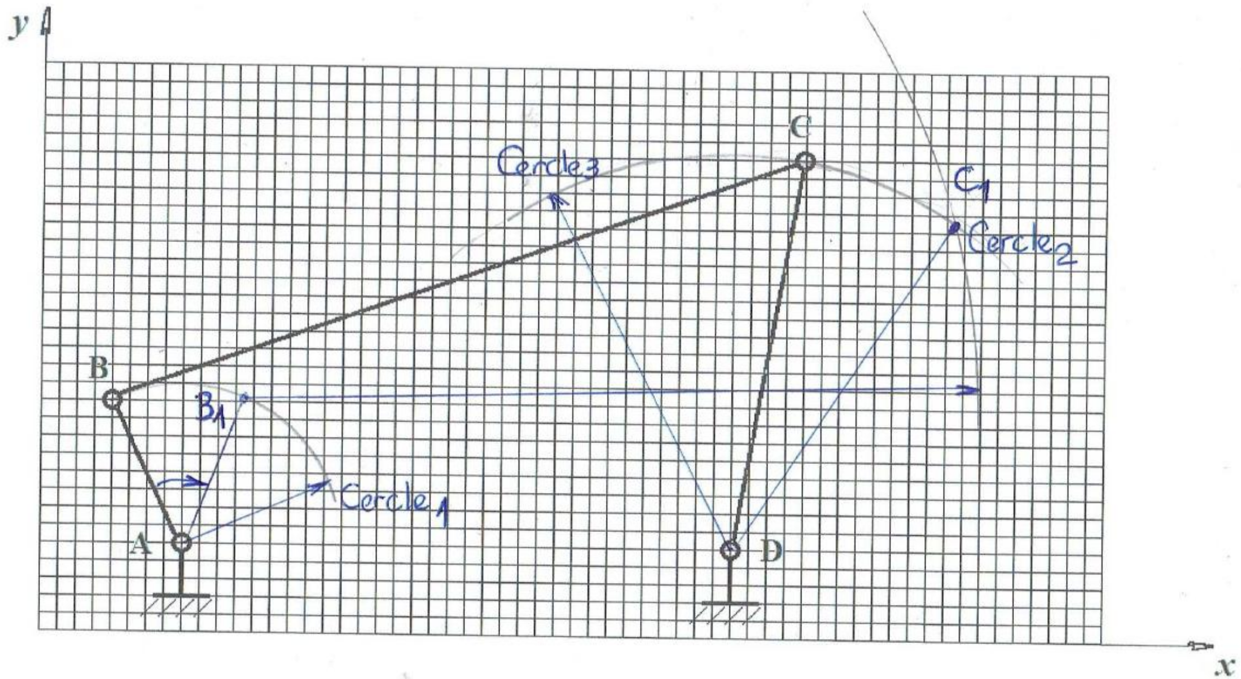
Une échelle de représentation s'impose pour représenter les paramètres réels du mécanisme sur un papier quadrillé.

$$Echelle = \frac{Dimension\ sur\ dessin}{Dimension\ réelle}$$



4.4. Analyse des déplacements d'un mécanisme plan

4.4.1. Méthode graphique



En analysant le mécanisme on trouve que la barre AB tourne autour de A (Cercle1), la barre BC tourne par rapport à la barre AB autour de B et la barre DC tourne autour de D (Cercle3).

La barre AB effectue une rotation telle que B soit en B1. La barre BC décrira un cercle (Cercle2) de centre B1.

La position du point C2 est l'intersection des deux cercles (Cercle2) et (Cercle3).

4.4. Analyse des déplacements d'un mécanisme plan

4.4.2. Méthode analytique

La méthode analytique est plus précise que celle graphique cependant on s'affronte à la difficulté de résolution analytique des équations voire l'impossibilité, pour cela on fait recours aux méthodes numériques.

4.4.2.1. Mobilité d'un mécanisme plan

La dépendance entre les paramètres variables d'un mécanisme est donnée par la mobilité m qui peut être déterminée par la formule :

$$m = 3N - 2L_5 - L_4$$

Telle que :

N : Nombre d'éléments mobiles

L_5 : Nombre de liaisons à un degré de liberté (5 liaisons)

L_4 : Nombre de liaisons à 2degrés de liberté (4 liaisons)

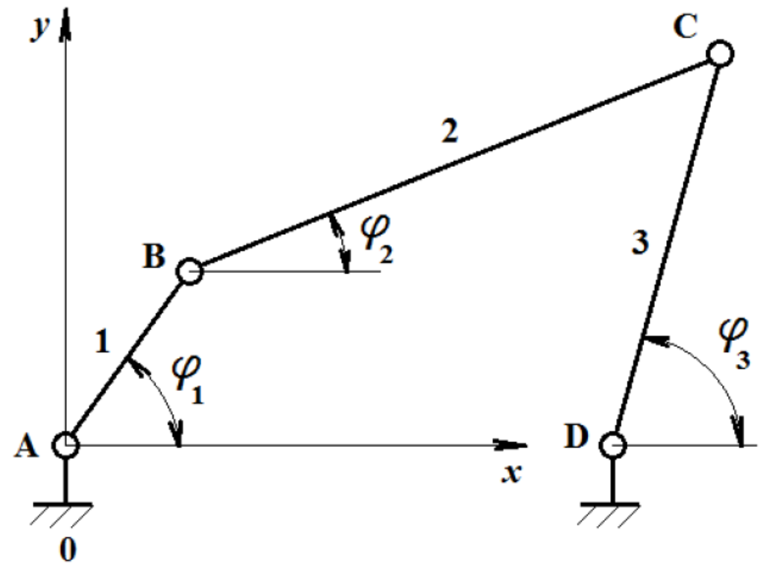
4.4. Analyse des déplacements d'un mécanisme plan

4.4.2. Méthode analytique

4.4.2.1. Mobilité d'un mécanisme plan

Exemple 4.2 :

Considérons le mécanisme précédent :

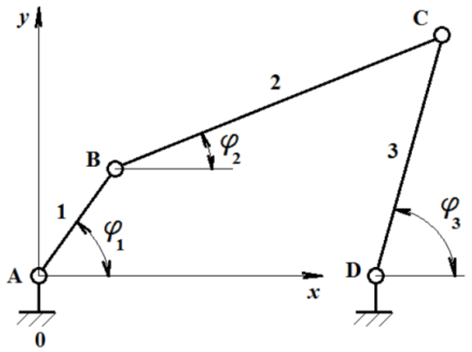


4.4. Analyse des déplacements d'un mécanisme plan

4.4.2. Méthode analytique

4.4.2.1. Mobilité d'un mécanisme plan

Exemple 4.2 :



Solution :

a) Mobilité : Dépendance des paramètres variables

$$m = 3*3 - 2*4 - 0 = 1$$

$$\varphi_2 \quad \text{et} \quad \varphi_3 \quad \text{dépendent de } \varphi_1$$

b) Type de chaine : fermée

Le nombre de cycles indépendants :

$$\gamma = 4 - 4 + 1 = 1$$

Un cycle indépendant correspont à une équation vectorielle

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0} \qquad (1)$$

Notons les longueurs des barres :

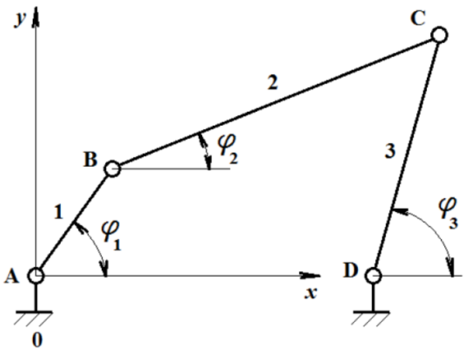
$l_1 = AB$; $l_2 = BC$; $l_3 = CD$ et $l_4 = AD$

4.4. Analyse des déplacements d'un mécanisme plan

4.4.2. Méthode analytique

4.4.2.1. Mobilité d'un mécanisme plan

Exemple 4.2 :



Solution :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0} \qquad (1)$$

Cette équation vectorielle (1) une fois projetée sur les axes Ax et Ay donne :

$$\begin{cases} l_1 cos\varphi_1 + l_2 cos\varphi_2 - l_3 cos\varphi_3 - l_4 = 0 \\ l_1 sin\varphi_1 + l_2 sin\varphi_2 - l_3 cos\varphi_3 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

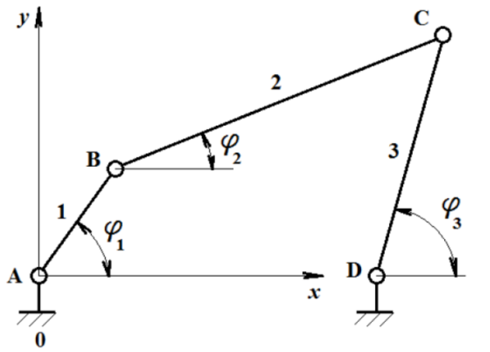
4.4. Analyse des déplacements d'un mécanisme plan

4.4.2. Méthode analytique

4.4.2.1. Mobilité d'un mécanisme plan

Exemple 4.2 :

Solution :



$$\begin{cases} l_1 cos\varphi_1 + l_2 cos\varphi_2 - l_3 cos\varphi_3 - l_4 = 0 \\ l_1 sin\varphi_1 + l_2 sin\varphi_2 - l_3 cos\varphi_3 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Pour résoudre numériquement le système (2) on fait varier φ_1 sur l'intervalle [0, 2π] en divisant celui-ci en parties égales de valeur 2π/n

Prenons n=10 donc le pas=6.28/10=0.628

$\varphi_1^{i+1} = \varphi_1^i + 0.628$ (i=0,n)

A chaque valeur de φ_1^i correspondent les valeurs φ_2^i et φ_3^i , c.à.d. à chaque valeur de i (i=0,n) on résout le système suivant :

$$\begin{cases} l_2 cos\varphi_2^i - l_3 cos\varphi_3^i = l_4 - l_1 cos\varphi_1 \\ l_2 sin\varphi_2 - l_3 cos\varphi_3 = -l_1 sin\varphi_1 \end{cases}$$

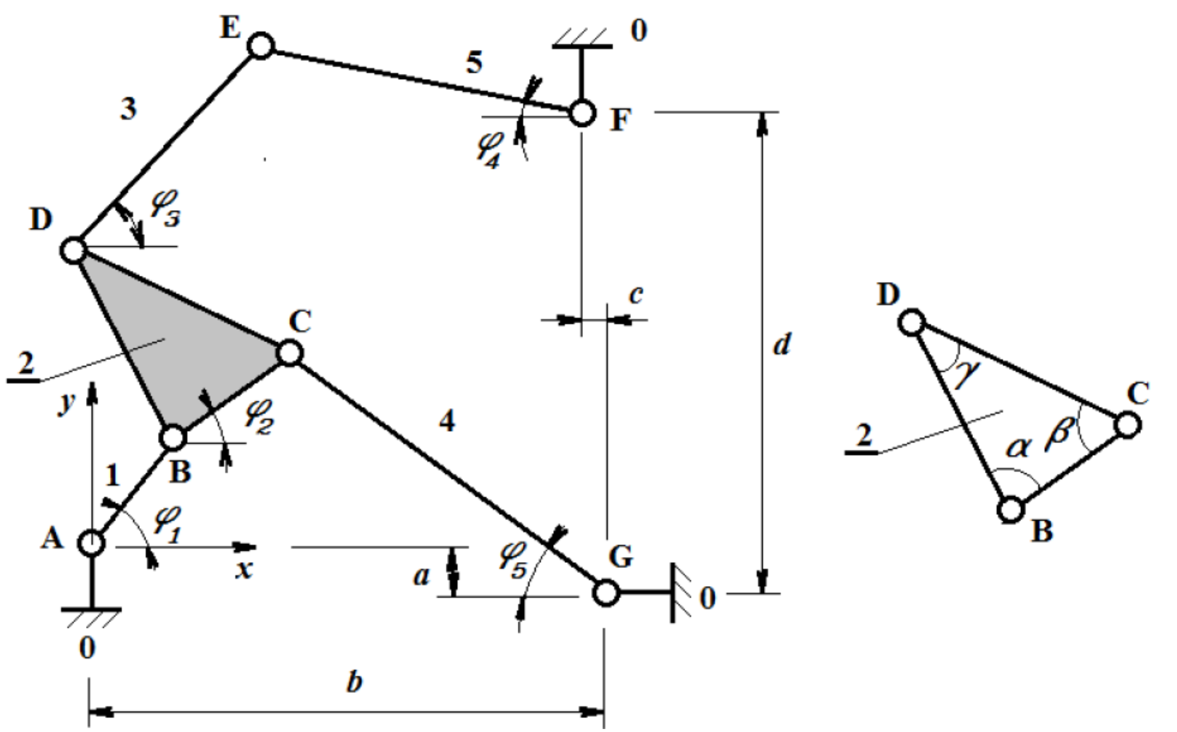
4.4. Analyse des déplacements d'un mécanisme plan

4.4.2. Méthode analytique

4.4.2.1. Mobilité d'un mécanisme plan

Exemple 4.3 :

Soit le mécanisme suivant :

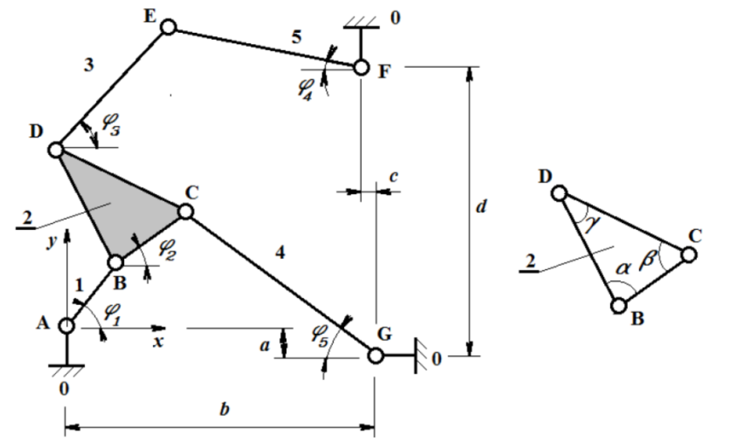


4.4. Analyse des déplacements d'un mécanisme plan

4.4.2. Méthode analytique

4.4.2.1. Mobilité d'un mécanisme plan

Exemple 4.3 :



Solution :

a) Mobilité :

$$m = 3*5 - 2*7 - 0 = 1$$

Les paramètres $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ et φ_5 sont fonctions de φ_1

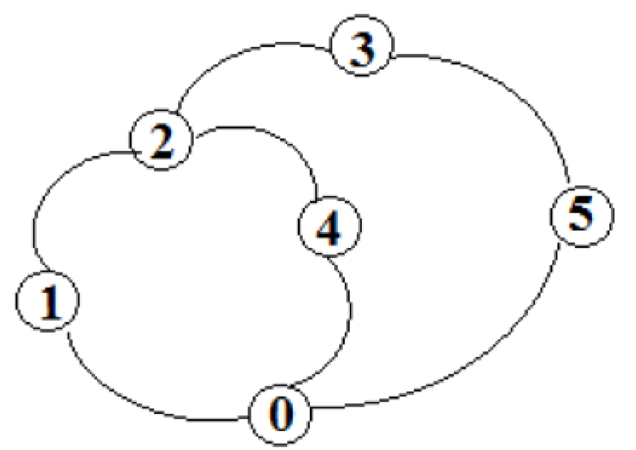
b) Type de chaine :

La chaine est fermée et complexe

$$\gamma = 7 - 6 + 1 = 2$$

Nous avons deux cycles indépendants donc deux équations vectorielles :

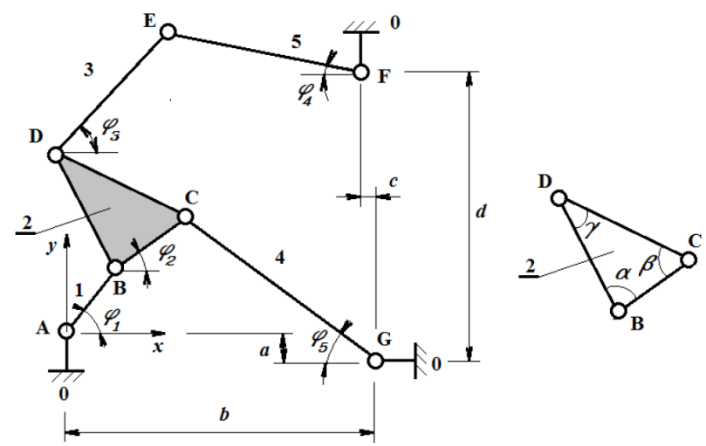
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GA} = \vec{0} \\ \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \vec{0} \end{cases}$$



4.4. Analyse des déplacements d'un mécanisme plan

4.4.2. Méthode analytique

4.4.2.1. Mobilité d'un mécanisme plan



Exemple 4.3 :

Solution :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GA} = \vec{0} \\ \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \vec{0} \end{cases}$$

La projection des deux équations vectorielles sur les axes Ax et Ay donne quatre équations :

$$\begin{cases} AB.cos\varphi_1 + BC.cos\varphi_2 + CG.cos\varphi_5 - b = 0 \\ AB.sin\varphi_1 + BC.sin\varphi_2 - CG.cos\varphi_5 + a = 0 \\ GC.cos\varphi_5 - CD.\cos(\beta - \varphi_2) + DE.cos\varphi_3 + EF.cos\varphi_4 + c = 0 \\ GC.sin\varphi_5 + CD.\cos(\beta - \varphi_2) + DE.cos\varphi_3 - EF.cos\varphi_4 - d = 0 \end{cases}$$