

Unité d'enseignement : UEF 3.1.1

Crédits : 4

Coefficient : 2

Théorie des mécanismes

Théorie des mécanismes

Chapitre 3 : Mobilité et hyperstatisme d'un mécanisme

Objectifs :

- Déterminer le torseur de la liaison équivalente ;
- Calculer la mobilité d'une chaîne cinématique ;
- Calculer le degré d'hyperstatisme d'une chaîne cinématique.

3.1. Analyse statique et cinématique d'un mécanisme

Dans l'étude du comportement d'un mécanisme, on s'intéresse en particulier aux mouvements relatifs ou absolus des pièces, aux efforts transmis dans les liaisons, et à la relation entre les deux.

En **statique**, l'équilibre des pièces donnent les **équations (6 équations)** et les **liaisons donnent les inconnues de liaison** : Le problème comprend à priori **6 équations** par pièce et autant **d'inconnues statiques indépendantes** qu'il y a de degrés de liaison en tout.

En **cinématique**, le mouvement des pièces donne **les inconnues (6 degrés de liberté** ou simples **paramètres cinématiques indépendants)** et **les liaisons donnent les équations** : pour le problème on dispose alors de 6 inconnues par pièce et autant d'équations qu'il y a de degrés de liaison.

3.2. Définitions

Mobilité d'une chaîne cinématique : c'est le nombre de mouvements indépendants qui peuvent exister dans une chaîne cinématique.

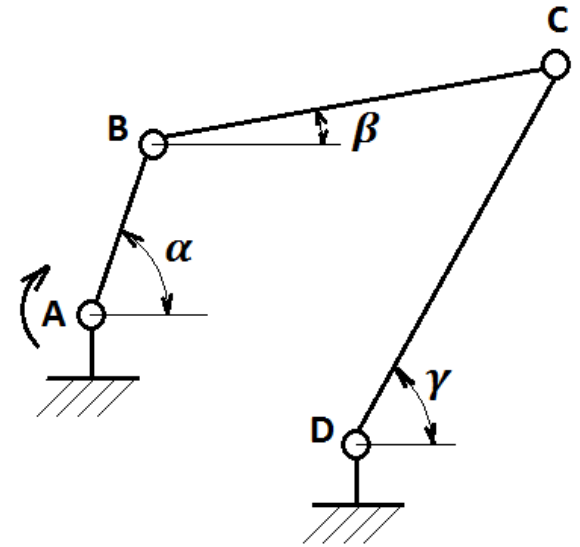
Exemple 3.1 : Mécanisme à 4 barres

La barre AB est l'élément menant paramétré par α les autres barres par β et γ .

Les variations de β et γ sont contrôlées par α c.à.d.

$$\beta = f(\alpha) \text{ et } \gamma = f(\alpha)$$

Donc les mouvements des barres BC et CD dépendent chacun du mouvement de la barre AB. Le seul mouvement indépendant est ce lui de la barre AB. Donc $\mathbf{m} = 1$



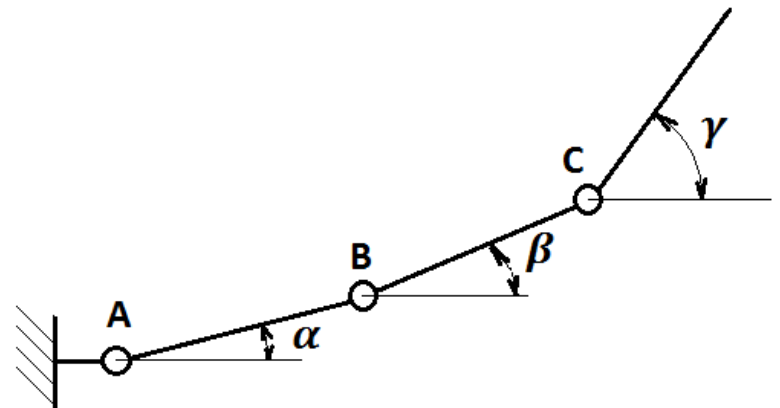
3.2. Définitions

Mobilité d'une chaîne cinématique : c'est le nombre de mouvements indépendants qui peuvent exister dans une chaîne cinématique.

Exemple 3.2 : Bras d'un robot

Dans ce mécanisme les 3 éléments sont indépendants l'un de l'autre, le deuxième peut effectuer un mouvement indépendamment du premier et du troisième, on a 3 mouvements indépendants alors

$$m = 3$$



3.2. Définitions

Un système est hyperstatique lorsque les équations issues de l'application du principe fondamental de la statique (voir de la dynamique) ne permettent pas de calculer toutes les inconnues d'efforts des liaisons.

$$\tau_A = \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_A = \vec{0} \end{cases} \text{ ou } \tau_A = \begin{pmatrix} R_x & M_{Ax} \\ R_y & M_{Ay} \\ R_z & M_{Az} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le nombre d'équations = Nombre d'inconnues c'est le cas isostatique

Degré d'hyper-statisme d'une chaîne cinématique : c'est le nombre d'inconnues de réactions de liaisons qu'on n'arrive pas à calculer en écrivant le modèle statique de la chaîne. C'est la différence entre le nombre d'inconnues et le rang du système d'équations obtenues par l'analyse du mécanisme.

Si le nombre d'inconnues est supérieur aux nombre d'équation c'est le cas hyperstatique, on introduit le degré d'hyperstatisme noté **h**.

3.2. Définitions

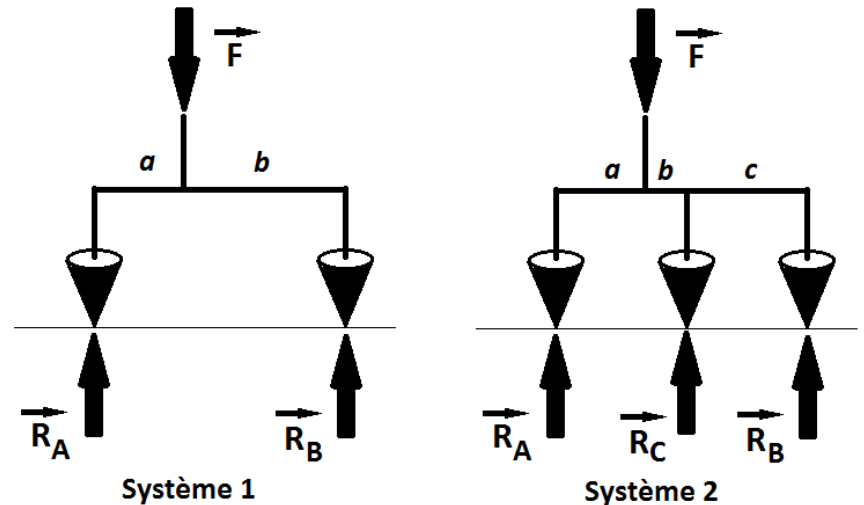
Si le nombre d'inconnues est supérieur aux nombre d'équation c'est le cas hyperstatique, on introduit le degré d'hyperstatisme noté **h**.

Exemple 3.3 :

La figure ci-contre montre 2 systèmes différents :

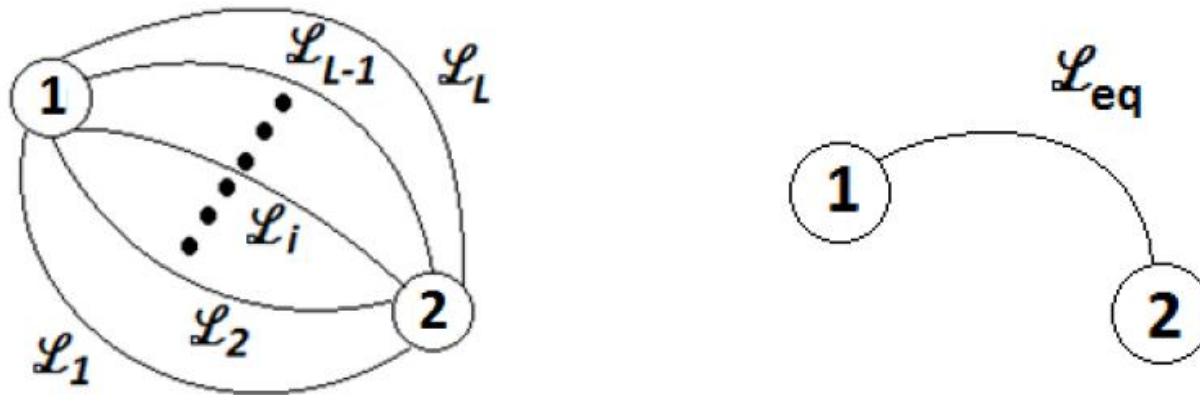
- Le premier est isostatique car les réactions peuvent être déterminées avec les équations de la statique $h=0$
- Le deuxième est hyperstatique car les équations de la statique ne suffisent pas pour déterminer la réaction \vec{R}_C

Une seule inconnue $h=1$



3.3. Analyse des liaisons en parallèle

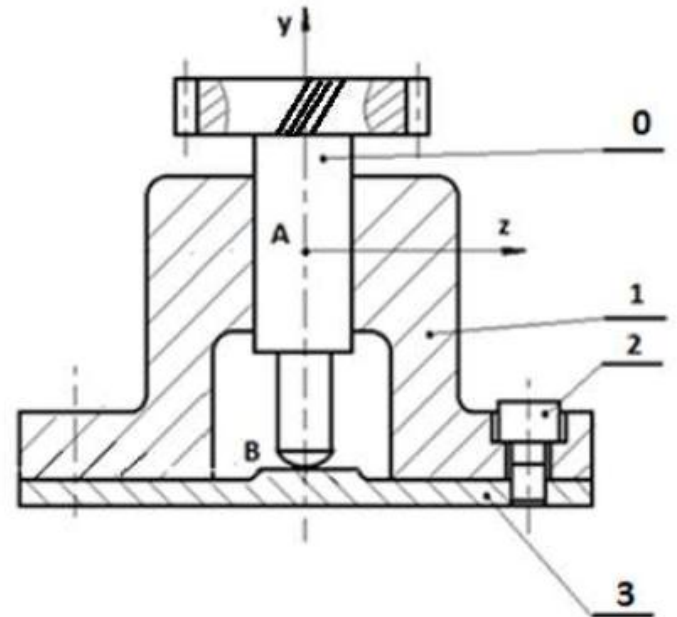
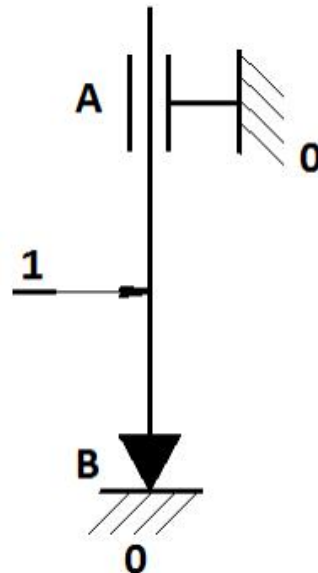
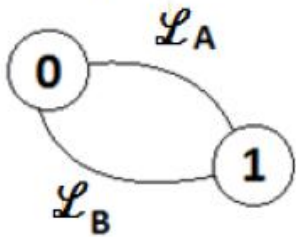
Cette architecture est très utilisée dans les constructions mécaniques. Considérons un système mécanique composé de deux pièces en L liaisons parallèles entre elles. L'analyse des liaisons en parallèle se fait de deux visions : cinématique et statique.



3.3. Analyse des liaisons en parallèle

Cette architecture est très utilisée dans les constructions mécaniques. Considérons un système mécanique composé de deux pièces en L liaisons parallèles entre elles. L'analyse des liaisons en parallèle se fait de deux visions : cinématique et statique.

Exemple 3.4 :



3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.2.1. Analyse cinématique

Cette analyse a pour but de déterminer la nature de liaison équivalente et de calculer la mobilité du système mécanique considéré, pour cela on associe à chaque liaison \mathcal{L}_i un torseur cinématique ϑ_i

$(i=1,L)$ tel que $\vartheta_i = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega}_i \\ \overrightarrow{V}_i \end{Bmatrix}$ et on associe également à la liaison équivalente le torseur :

$$\vartheta_{eq} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega}_{eq} \\ \overrightarrow{V}_{eq} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega} \\ \overrightarrow{V} \end{Bmatrix}$$

Pour qu'un seul mouvement soit possible entre les deux pièces 1 et 2 il faut que toutes les liaisons le permettent d'où :

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3 = \dots = \vartheta_L = \vartheta_{eq}$$

3.3. Analyse des liaisons en parallèle**3.2.1. Analyse cinématique**

$$\vartheta_{eq} = \begin{cases} \overrightarrow{\Omega}_{eq} \\ \overrightarrow{V}_{eq} \end{cases} = \begin{cases} \overrightarrow{\Omega} \\ \overrightarrow{V} \end{cases}$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3 = \dots = \vartheta_L = \vartheta_{eq}$$

C'est la propriété cinématique de l'architecture parallèle. On obtient $6L$ équations :

$$\begin{cases} \vartheta_1 = \vartheta_{eq} \\ \vartheta_2 = \vartheta_{eq} \\ \cdot \\ \cdot \\ \vartheta_L = \vartheta_{eq} \end{cases}$$

et en utilisant les composantes :

$$\vartheta_{eq} = \begin{pmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vartheta_i = \begin{pmatrix} \omega_{ix} & V_{ix} \\ \omega_{iy} & V_{iy} \\ \omega_{iz} & V_{iz} \end{pmatrix} \quad (i=1,L)$$

3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.2.1. Analyse cinématique

On obtient le système à $6L$ équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \omega_x = \omega_{1x} \\
 \omega_y = \omega_{1y} \\
 \omega_z = \omega_{1z} \\
 V_x = V_{1x} \\
 V_y = V_{1y} \\
 V_z = V_{1z} \\
 \omega_x = \omega_{2x} \\
 \omega_y = \omega_{2y} \\
 \omega_z = \omega_{2z} \\
 V_x = V_{2x} \\
 V_y = V_{2y} \\
 V_z = V_{2z} \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \omega_x = \omega_{Lx} \\
 \omega_y = \omega_{Ly} \\
 \omega_z = \omega_{Lz} \\
 V_x = V_{Lx} \\
 V_y = V_{Ly} \\
 V_z = V_{Lz}
 \end{array} \right. \quad (2) ; \quad \text{Le vecteur des inconnues est } X = \left\{ \begin{array}{l}
 \omega_x \\
 \omega_y \\
 \omega_z \\
 V_x \\
 V_y \\
 V_z
 \end{array} \right\}$$

3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.2.1. Analyse cinématique

Pour déterminer la mobilité m on adopte l'une des méthodes conjuguées :

- a) $m = \text{Nombre des composants de } X \text{ non nuls}$ avec $m \leq 6$
 b) On sélectionne les équations à terme droit nul du système (2), on obtient le système suivant :

$$A.X = 0$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix}$$

Si le nombre des équations à terme droit nul est p alors la matrice A est d'ordre $6 \times p$. Soit r_c le rang de la matrice A , alors la mobilité $m = 6 - r_c$ avec $r_c \leq 6$

3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.2.1. Analyse cinématique

Remarques :

$$1) \text{ Si } r_c = 6 \Rightarrow m = 0 \text{ et } X = 0 \text{ ou } \begin{cases} \omega_x = 0 \\ \omega_y = 0 \\ \omega_z = 0 \\ V_x = 0 \\ V_y = 0 \\ V_z = 0 \end{cases} \text{ aucun mouvement}$$

2) Si $r_c \neq 0 \Rightarrow m \geq 1$ au moins il y a au moins un mouvement

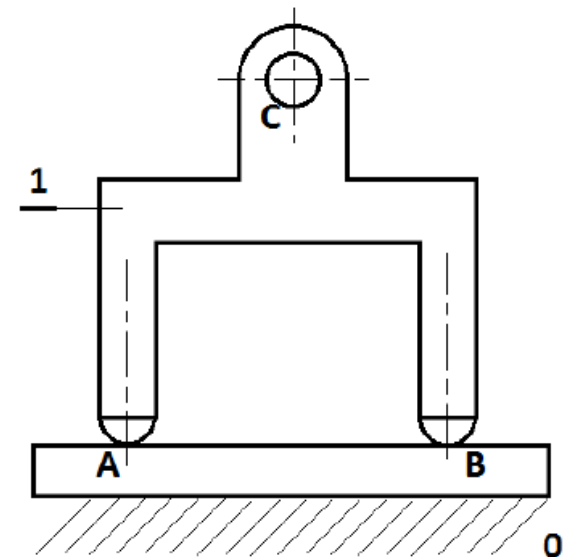
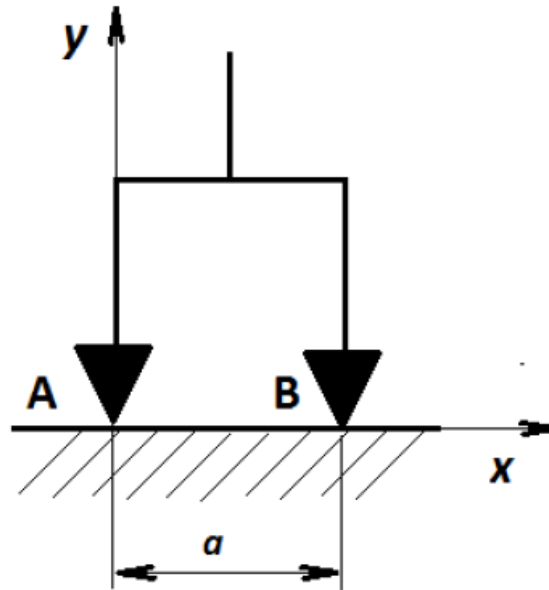
La nature de la liaison équivalente dépend de son torseur $\begin{pmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{pmatrix}$ lequel sera comparé à l'un des torseurs cinématiques des liaisons usuelles.

3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.2.1. Analyse cinématique

Exemple 3.5 : Palonnier

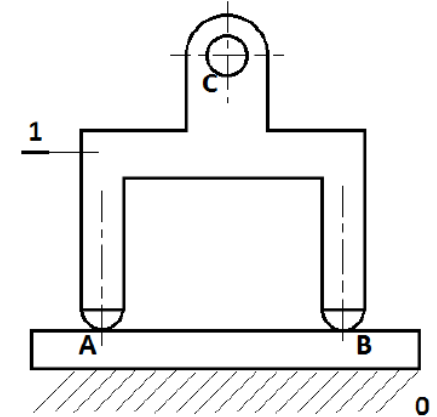
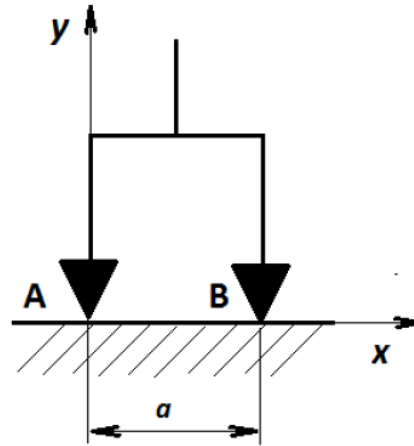
- 1) Déterminer m ;
- 2) Déterminer la liaison équivalente.



3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.2.1. Analyse cinématique

Exemple 3.5 : Palonnier



Solution :

1) Les deux liaisons en A et B sont ponctuelles, leurs torseurs cinématiques s'écrivent :

$$\vartheta_A = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega}_A \\ \overrightarrow{V}_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_{Ax} & V_{Ax} \\ \omega_{Ay} & 0 \\ \omega_{Az} & V_{Az} \end{Bmatrix} \text{ et } \vartheta_B = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega}_B \\ \overrightarrow{V}_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_{Bx} & V_{Bx} \\ \omega_{By} & 0 \\ \omega_{Bz} & V_{Bz} \end{Bmatrix}$$

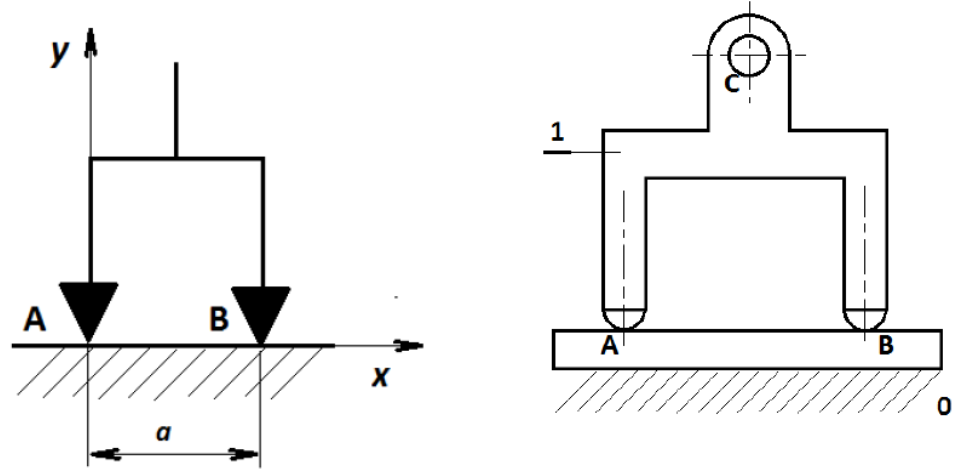
Ces deux liaisons sont parallèles alors :

$$\vartheta_A = \vartheta_B = \vartheta_{eq} \quad (1)$$

3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.2.1. Analyse cinématique

Exemple 3.5 : Palonnier



Solution :

Pour pouvoir comparer les 2 torseurs on écrira ϑ_B au point A :

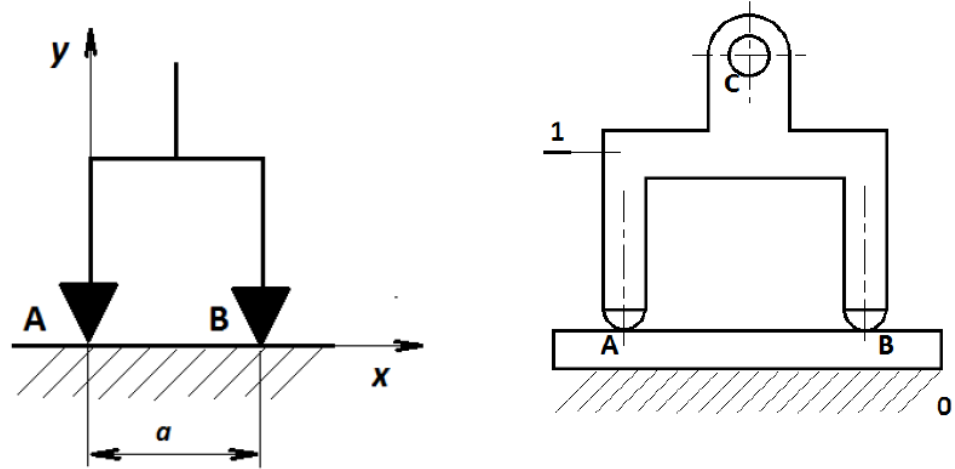
$$\vartheta_B^A = \vartheta_B + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_B} = \begin{pmatrix} \omega_{Bx} & V_{Bx} \\ \omega_{By} & 0 \\ \omega_{Bz} & V_{Bz} \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ \omega_{Bx} & \omega_{By} & \omega_{Bz} \end{vmatrix}$$

$$\vartheta_B^A = \begin{pmatrix} \omega_{Bx} & V_{Bx} \\ \omega_{By} & 0 \\ \omega_{Bz} & V_{Bz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -a\omega_{Bz} \\ a\omega_{By} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{Bx} & V_{Bx} \\ \omega_{By} & -a\omega_{Bz} \\ \omega_{Bz} & (V_{Bz} + a\omega_{By}) \end{pmatrix}$$

3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.2.1. Analyse cinématique

Exemple 3.5 : Palonnier



Solution :

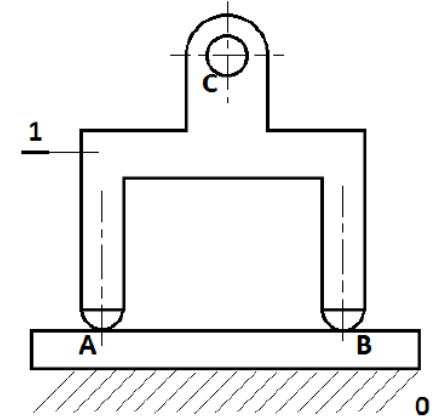
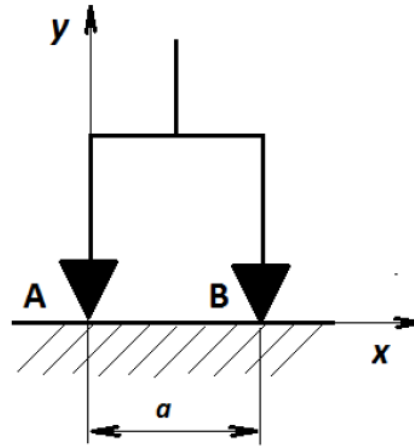
$$(1) \text{ permet d'écrire : } \begin{Bmatrix} \omega_{Ax} & V_{Ax} \\ \omega_{Ay} & 0 \\ \omega_{Az} & V_{Az} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_{Bx} \\ \omega_{By} \\ \omega_{Bz} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{Bx} \\ -a\omega_{Bz} \\ (V_{Bz} + a\omega_{By}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{Bmatrix}$$

Avec la remarque que $A \in (1)$ et $B \in (1)$ donne $\overrightarrow{\Omega}_A = \overrightarrow{\Omega}_B$

3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.2.1. Analyse cinématique

Exemple 3.5 : Palonnier



Solution :

On obtient le système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_x = \omega_{Ax} \\ \omega_y = \omega_{Ay} \\ \omega_z = \omega_{Az} \\ V_x = V_{Ax} \\ V_y = 0 \\ V_z = V_{Az} \\ \omega_x = \omega_{Bx} \\ \omega_y = \omega_{By} \\ \omega_z = \omega_{Bz} \\ V_x = V_{Bx} \\ V_y = -a\omega_{Bz} \\ V_z = V_{Bz} + a\omega_{By} \end{array} \right.$$

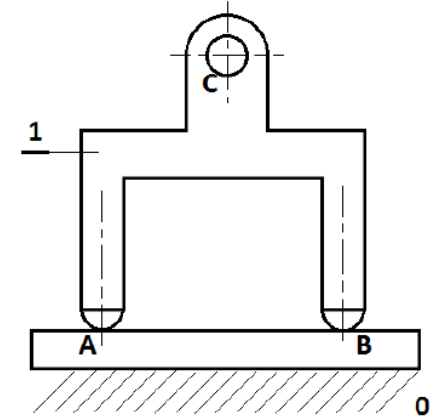
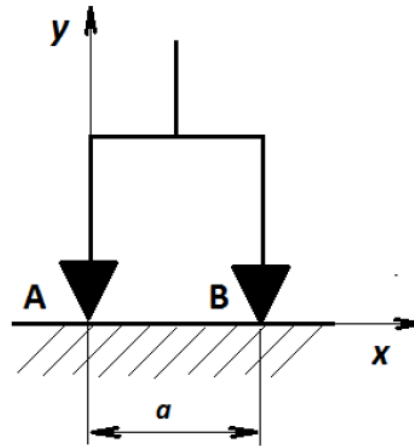
$V_y = -a\omega_{Bz} = 0 \Rightarrow \omega_{Bz} = 0$; le système devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_x = \omega_{Ax} \\ \omega_y = \omega_{Ay} \\ \omega_z = \omega_{Az} \\ V_x = V_{Ax} \\ V_y = 0 \\ V_z = V_{Az} \\ \omega_x = \omega_{Bx} \\ \omega_y = \omega_{By} \\ \omega_z = 0 \\ V_x = V_{Bx} \\ V_y = -a\omega_{Bz} \\ V_z = V_{Bz} + a\omega_{By} \end{array} \right.$$

3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.2.1. Analyse cinématique

Exemple 3.5 : Palonnier



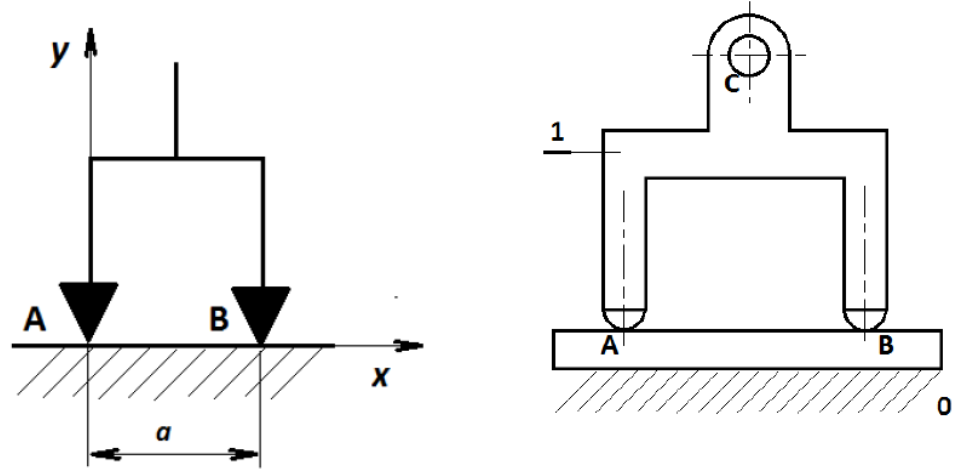
Solution :

Le torseur ϑ_{eq} s'écrira : $\left\{ \begin{matrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & 0 \\ 0 & V_z \end{matrix} \right\}$ donc $m=4$

3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.2.1. Analyse cinématique

Exemple 3.5 : Palonnier



Solution :

Et si on utilise la 2^e méthode le système $A.X=0$ s'écrira :

$$\begin{cases} V_y = 0 \\ \omega_z = 0 \end{cases}$$

Qui s'écrit encore :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

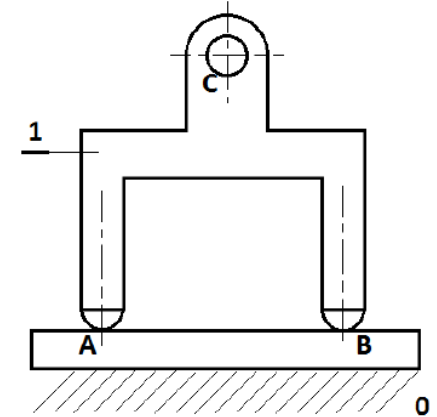
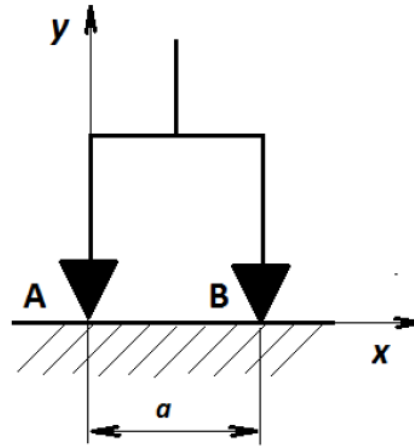
$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ a 2 lignes indépendantes donc $r_c = \text{rang}(A) = 2$

Alors la mobilité $m = 6 - r_c = 6 - 2 = 4$

3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.2.1. Analyse cinématique

Exemple 3.5 : Palonnier



Solution :

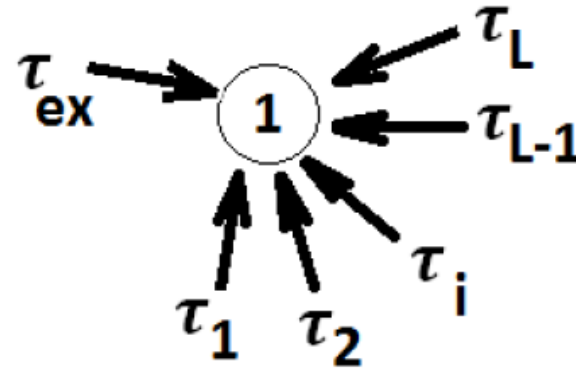
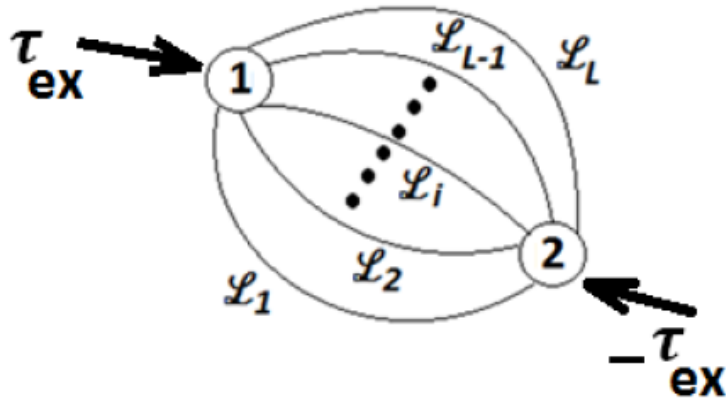
2) $\vartheta_{eq} = \begin{pmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & 0 \\ 0 & V_z \end{pmatrix}$ est le torseur d'une liaison linéaire qui manque d'une translation suivant

l'axe Ay et d'une rotation autour de l'axe Az

3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.2.2. Analyse statique

Le but de l'analyse statique est de trouver la nature de la liaison équivalente et le degré d'hyperstatisme h , pour cela considérons les configurations suivantes et isolons l'une des deux pièces dans chaque cas :

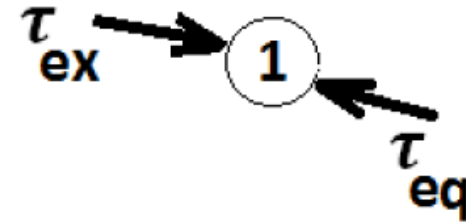
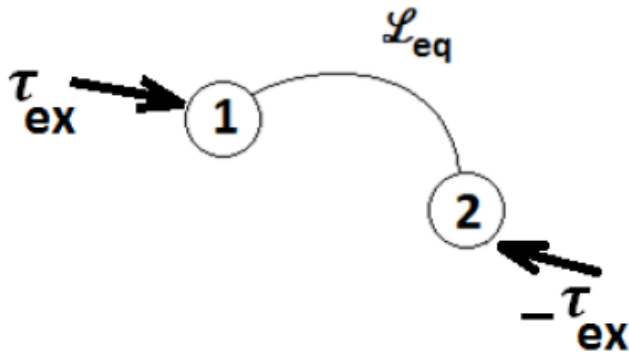


3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.2.2. Analyse statique

Le principe de la statique donne :

$$\sum_{i=1}^L \tau_i + \tau_{ex} = \{\vec{0}\} \quad (1)$$



$$\tau_{eq} + \tau_{ex} = \{\vec{0}\} \quad (2)$$

Des équations (1) et (2) on tire :

$$\tau_{eq} = \sum_{i=1}^L \tau_i$$

On obtient un système d'équations $A.X = \tau_{eq}$; X : vecteur des inconnues qui sont les réactions aux liaisons

3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.2.2. Analyse statique

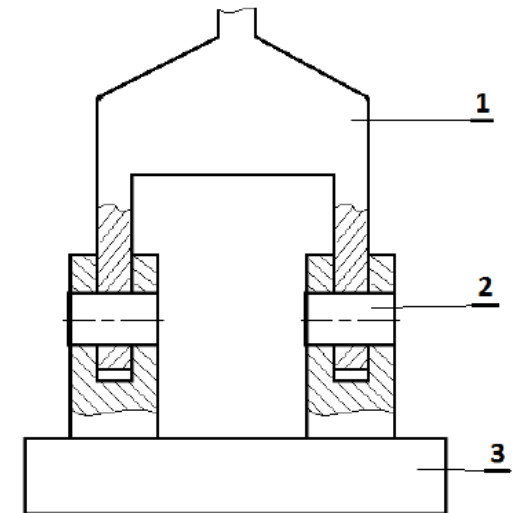
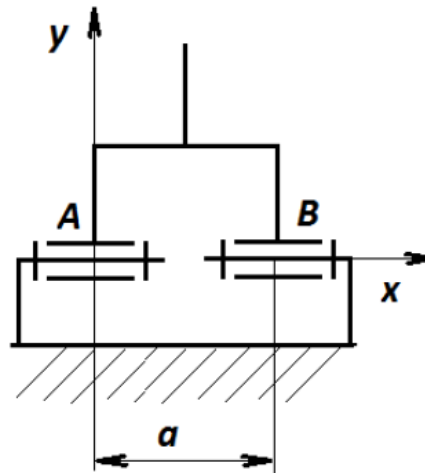
Le degré d'hyperstatisme $h = r_s - n_s$

r_s : Rang de la matrice A

n_s : Nombre d'équations

Exemple 3.6 :

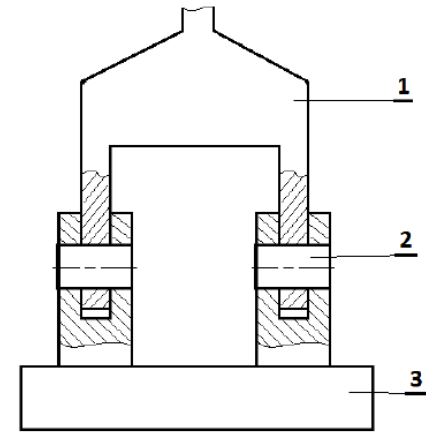
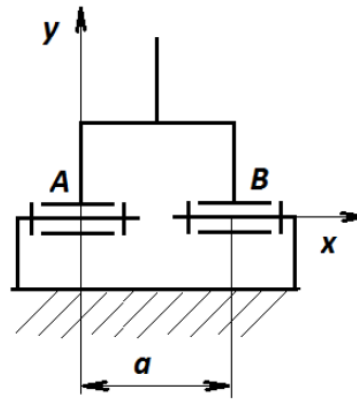
Déterminer le degré d'hyperstatisme et le type de la liaison équivalente.



3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.2.2. Analyse statique

Exemple 3.6 :

**Solution :**

Les deux liaisons en A et B sont pivots et elles sont en parallèle.

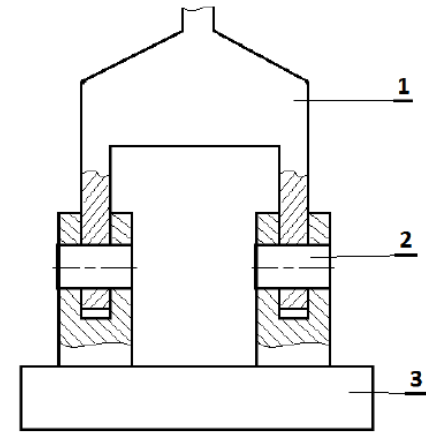
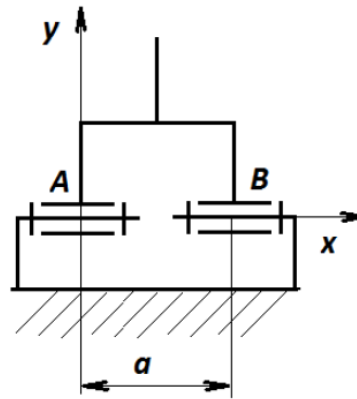
Les torseurs statiques des deux liaisons :

$$\tau_A = \begin{Bmatrix} R_{Ax} & 0 \\ R_{Ay} & M_{Ay} \\ R_{Az} & M_{Az} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \tau_B = \begin{Bmatrix} R_{Bx} & 0 \\ R_{By} & M_{By} \\ R_{Bz} & M_{Bz} \end{Bmatrix} \quad \text{le torseur équivalent : } \tau_{eq} = \begin{Bmatrix} R_x & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{Bmatrix}$$

3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.2.2. Analyse statique

Exemple 3.6 :



Solution :

L'écriture des torseurs se fait au point A :

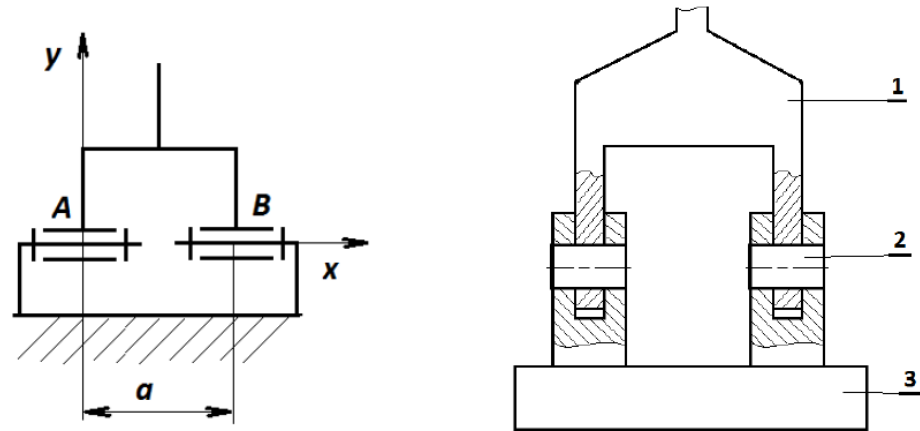
$$\tau_B^A = \tau_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_B = \begin{pmatrix} R_{Bx} & 0 \\ R_{By} & M_{By} \\ R_{Bz} & M_{Bz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_{Bx} \\ R_{By} \\ R_{Bz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{Bx} & 0 \\ R_{By} & M_{By} \\ R_{Bz} & M_{Bz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -aR_{Bz} \\ aR_{By} \end{pmatrix}$$

$$\tau_B^A = \begin{pmatrix} R_{Bx} & 0 \\ R_{By} & M_{By} - aR_{Bz} \\ R_{Bz} & M_{Bz} + aR_{By} \end{pmatrix}$$

3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.2.2. Analyse statique

Exemple 3.6 :



Solution :

L'analyse statique de l'architecture parallèle permet d'écrire :

$$\tau_{eq} = \sum_{i=1}^L \tau_i \Rightarrow \tau_{eq} = \tau_A + \tau_B^A$$

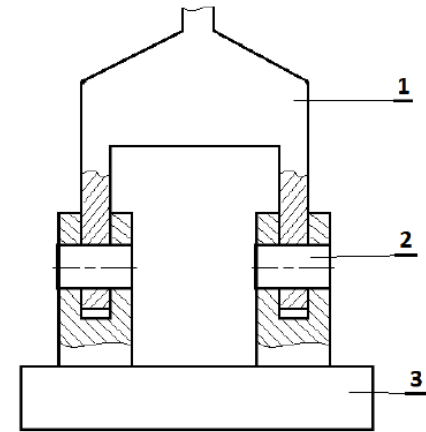
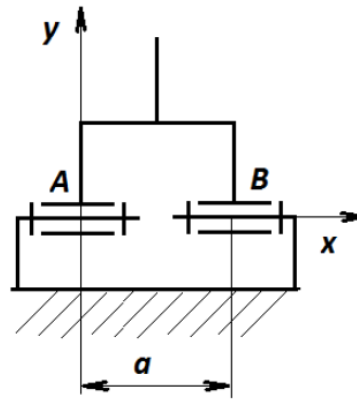
$$\begin{pmatrix} R_{Ax} & 0 \\ R_{Ay} & M_{Ay} \\ R_{Az} & M_{Az} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{Bx} & 0 \\ R_{By} & M_{By} - aR_{Bz} \\ R_{Bz} & M_{Bz} + aR_{By} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_x & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{pmatrix}$$

3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.2.2. Analyse statique

Exemple 3.6 :

Solution :



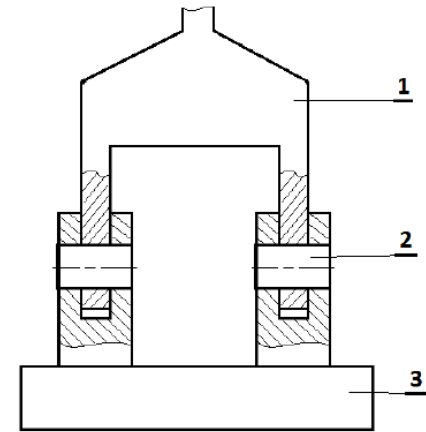
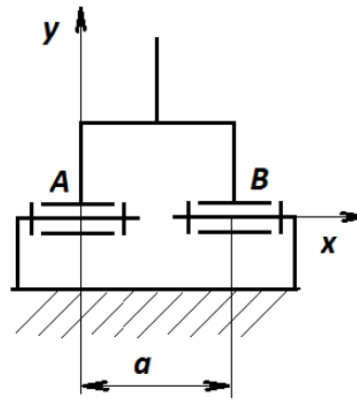
Puisque $\tau_{eq} = -\tau_{ex}$ alors τ_{eq} est connu et les inconnues sont les réactions aux liaisons :
 On obtient le système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{Ax} + R_{Bx} = R_x \\ R_{Ay} + R_{By} = R_y \\ R_{Az} + R_{Bz} = R_z \\ M_x = 0 \\ M_{Ay} + M_{By} - aR_{Bz} = M_y \\ M_{Az} + M_{Bz} + aR_{By} = M_z \end{array} \right. \quad X = \begin{pmatrix} R_{Ax} \\ R_{Bx} \\ R_{Ay} \\ R_{By} \\ R_{Az} \\ R_{Bz} \\ M_{Ay} \\ M_{By} \\ M_{Az} \\ M_{Bz} \end{pmatrix}$$

3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.2.2. Analyse statique

Exemple 3.6 :



Solution :

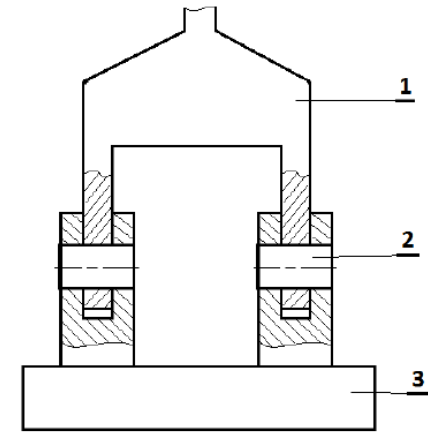
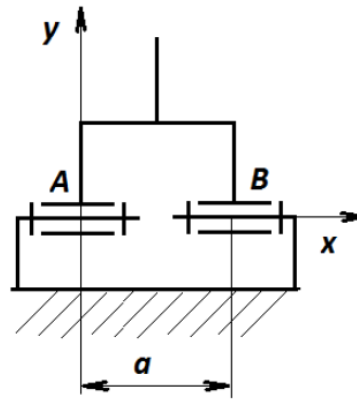
Sans chercher la matrice A, il est clair que le nombre d'inconnues est 10 et le nombre d'équations est 5.

Si on veut travailler avec la matrice A : Ce système peut s'écrire sous la forme : $A.X = \tau_{eq}$

3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.2.2. Analyse statique

Exemple 3.6 :



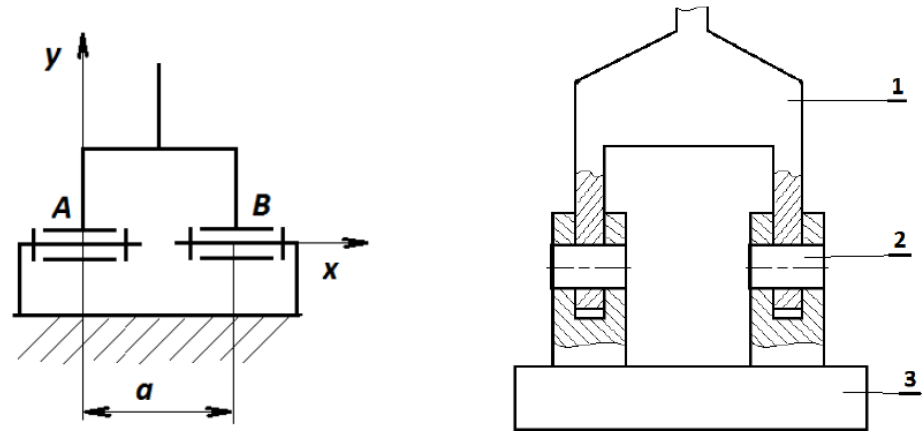
Solution :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{Ax} \\ R_{Bx} \\ R_{Ay} \\ R_{By} \\ R_{Az} \\ R_{Bz} \\ M_{Ay} \\ M_{By} \\ M_{Az} \\ M_{Bz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} \begin{cases} R_{Ax} + R_{Bx} = R_x \\ R_{Ay} + R_{By} = R_y \\ R_{Az} + R_{Bz} = R_z \\ M_x = 0 \\ M_{Ay} + M_{By} - aR_{Bz} = M_y \\ M_{Az} + M_{Bz} + aR_{By} = M_z \end{cases}$$

3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.2.2. Analyse statique

Exemple 3.6 :



Solution :

Le nombre d'inconnues $r_s = \text{Rang} (A) = 10$ (10 colonnes indépendantes) et le nombre d'équations $n_s = 5$

Le degré d'hyperstatisme $h = 10 - 5 = 5$

La liaison équivalente a pour torseur :

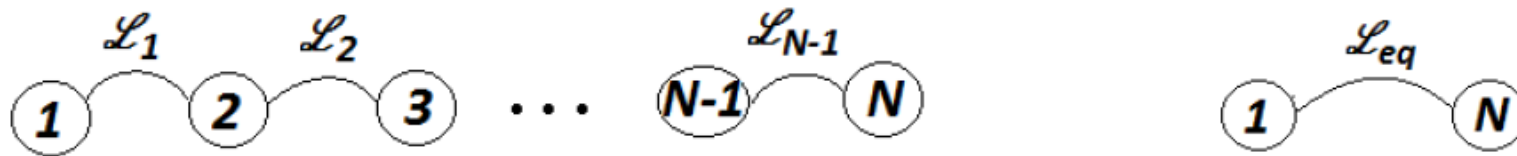
$$\left\{ \begin{array}{l} R_{Ax} + R_{Bx} \\ R_{Ay} + R_{By} \\ R_{Az} + R_{Bz} \end{array} \quad \begin{array}{l} M_{Ay} + M_{By} - aR_{Bz} \\ M_{Az} + M_{Bz} + aR_{By} \\ 0 \end{array} \right\}$$

Qui est un torseur d'un pivot : rotation autour de Ax

3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.3.1. Etude cinématique

Soit une chaîne ouverte constituée de N éléments liés entre eux par $L=N-1$ liaisons.



Soit le torseur cinématique de la $i^{\text{ème}}$ liaison $\vartheta_i = \begin{pmatrix} \omega_{ix} & V_{ix} \\ \omega_{iy} & V_{iy} \\ \omega_{iz} & V_{iz} \end{pmatrix}$

La relativité des mouvements permet d'écrire :

$$\vartheta_{n/1} = \vartheta_{n/n-1} + \vartheta_{n-1/n-2} + \dots + \vartheta_{2/1}$$

En considérant la liaison équivalente : $\vartheta_{n/1} = \vartheta_{eq}$

Donc :

$$\vartheta_{eq} = \vartheta_{n/n-1} + \vartheta_{n-1/n-2} + \dots + \vartheta_{2/1}$$

Pour trouver la mobilité m : $m =$ Nombre de composants non nuls de ϑ_{eq}

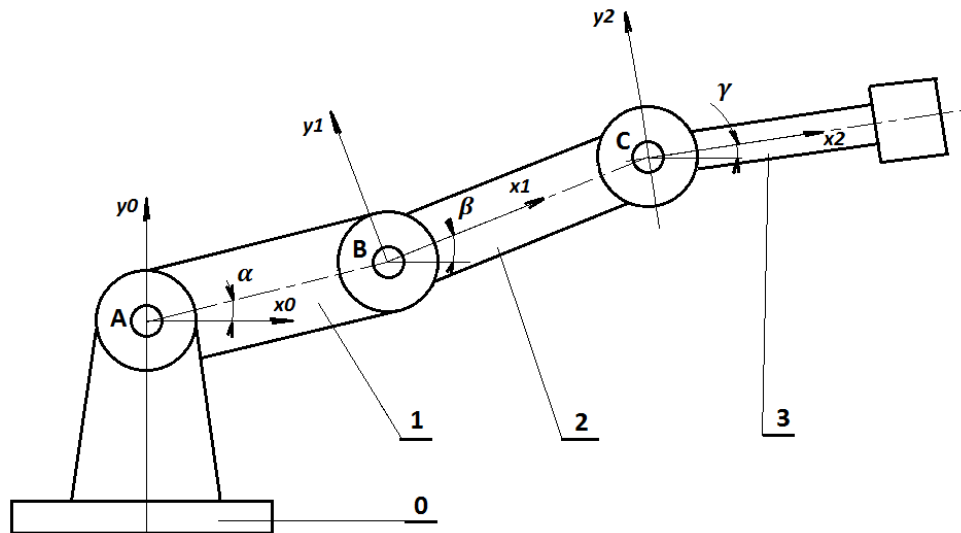
3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.3.1. Etude cinématique

Exemple 3.7 : Bras d'un robot

Les longueurs des bras 1, 2 sont respectivement a et b .

On demande de déterminer la mobilité m et la liaison équivalente.

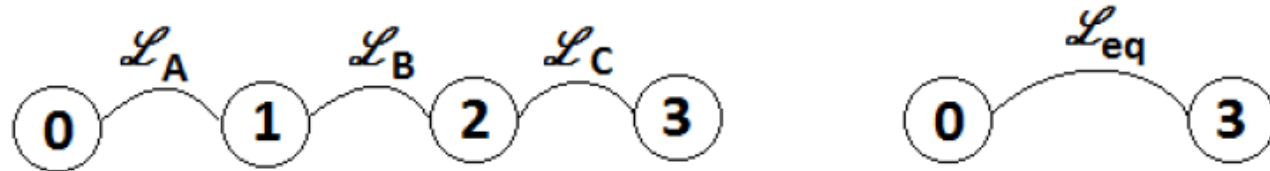
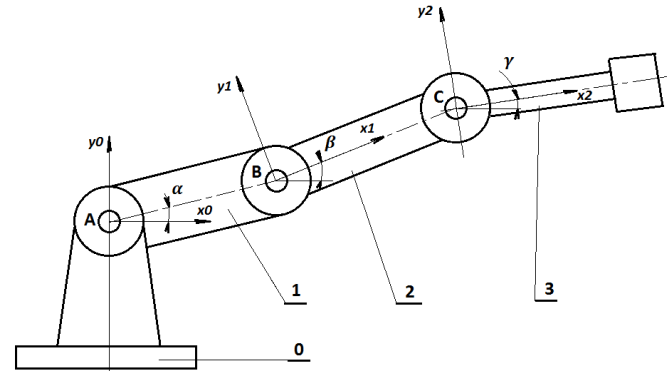


3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.3.1. Etude cinématique

Exemple 3.7 : Bras d'un robot

Solution :



Les liaisons en A,B et C sont des pivots et leurs torseurs cinématiques associés s'écrivent :

$$\vartheta_{eq} = \vartheta_{3/2} + \vartheta_{2/1} + \vartheta_{1/0} \quad (1)$$

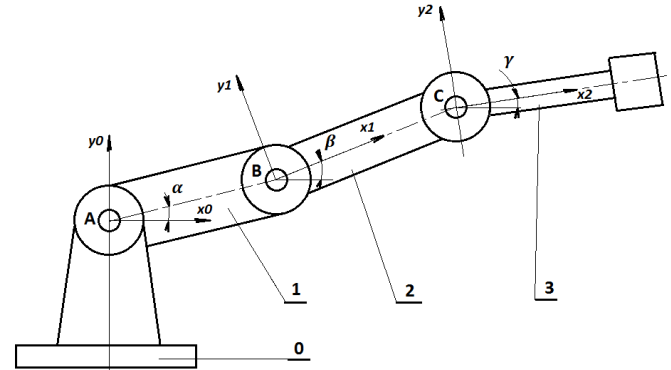
$$\vartheta_{3/2} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Cz} & 0 \end{Bmatrix}; \vartheta_{2/1} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Bz} & 0 \end{Bmatrix} \text{ et } \vartheta_{1/0} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Az} & 0 \end{Bmatrix}$$

3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.3.1. Etude cinématique

Exemple 3.7 : Bras d'un robot

Solution :



Ecrivons ces torseurs au point A :

$$\vartheta_{3/2}^A = \vartheta_{3/2} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{3/2} = \vartheta_{3/2} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \wedge \overrightarrow{\Omega}_{3/2} = \vartheta_{3/2}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Cz} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \cos \alpha + b \cos \beta \\ a \sin \alpha + b \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{Cz} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Cz} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (a \sin \alpha + b \sin \beta) \omega_{Cz} \\ -(a \cos \alpha + b \cos \beta) \omega_{Cz} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (a \sin \alpha + b \sin \beta) \omega_{Cz} \\ 0 & -(a \cos \alpha + b \cos \beta) \omega_{Cz} \\ \omega_{Cz} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vartheta_{2/1}^A = \vartheta_{2/1} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{2/1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Bz} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ a \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{Bz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Bz} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \omega_{Bz} \sin \alpha \\ -a \omega_{Bz} \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

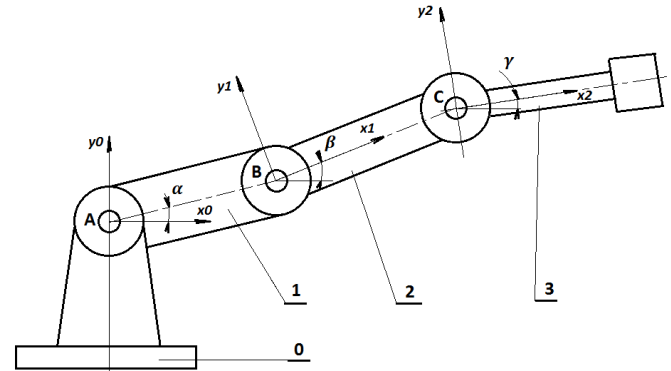
$$= \begin{pmatrix} 0 & a \omega_{Bz} \sin \alpha \\ 0 & -a \omega_{Bz} \cos \alpha \\ \omega_{Bz} & 0 \end{pmatrix}$$

3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.3.1. Etude cinématique

Exemple 3.7 : Bras d'un robot

Solution :



En appliquant la relation (1) :

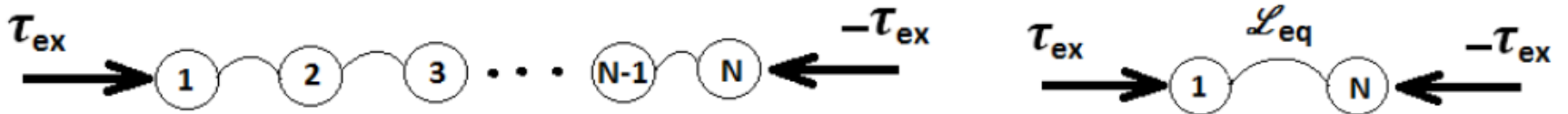
$$\vartheta_{eq} = \begin{Bmatrix} 0 & (a \sin \alpha + b \sin \beta) \omega_{Cz} \\ 0 & -(a \cos \alpha + b \cos \beta) \omega_{Cz} \\ \omega_{Cz} & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & a \omega_{Bz} \sin \alpha \\ 0 & -a \omega_{Bz} \cos \alpha \\ \omega_{Bz} & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Az} & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vartheta_{eq} = \begin{Bmatrix} 0 & (a \sin \alpha + b \sin \beta) \omega_{Cz} + a \omega_{Bz} \sin \alpha \\ 0 & -(a \cos \alpha + b \cos \beta) \omega_{Cz} - a \omega_{Bz} \cos \alpha \\ (\omega_{Az} + \omega_{Bz} + \omega_{Cz}) & 0 \end{Bmatrix}$$

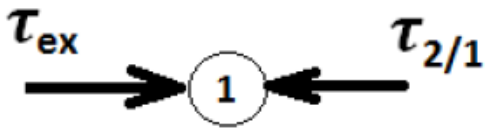
De ce torseur on tire $m=3$ et la liaison équivalente a une rotation autour de Az et 2 translations suivant Ax et Ay

3.3. Analyse des liaisons en parallèle

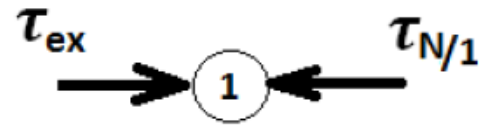
3.3.2. Etude statique



Si on isole la pièce 1 dans les deux cas (schémas en haut) :



$$\tau_{2/1} + \tau_{ex} = \{\vec{0}\} \quad (1)$$



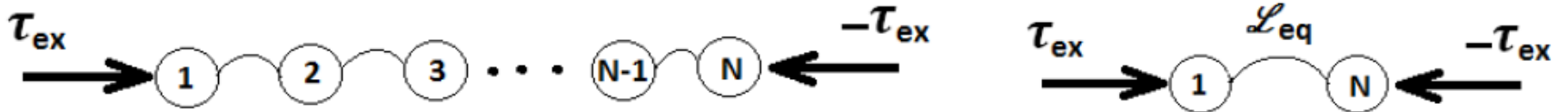
$$\tau_{N/1} + \tau_{ex} = \{\vec{0}\} \quad (2)$$

Avec $\tau_{N/1} = \tau_{eq}$, alors on aura : $\tau_{eq} + \tau_{ex} = \{\vec{0}\}$

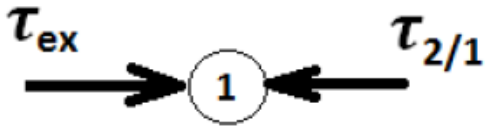
$$\tau_{1/2} = \tau_{ex}$$

3.3. Analyse des liaisons en parallèle

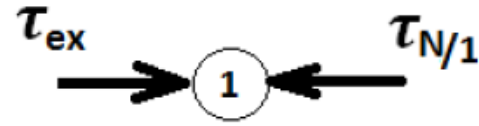
3.3.2. Etude statique



Si on isole la pièce 1 dans les deux cas (schémas en haut) :



$$\tau_{2/1} + \tau_{ex} = \{\vec{0}\} \quad (1)$$



$$\tau_{N/1} + \tau_{ex} = \{\vec{0}\} \quad (2)$$

Avec $\tau_{N/1} = \tau_{eq}$, alors on aura : $\tau_{eq} + \tau_{ex} = \{\vec{0}\}$

$$\tau_{1/2} = \tau_{ex}$$

Si on isole la pièce 2 : $\tau_{1/2} + \tau_{3/2} = \{\vec{0}\} \quad (3)$

3.3. Analyse des liaisons en parallèle**3.3.2. Etude statique**

$$\tau_{2/1} + \tau_{ex} = \{\vec{0}\} \quad (1) \quad \tau_{N/1} + \tau_{ex} = \{\vec{0}\} \quad (2) \quad \tau_{1/2} + \tau_{3/2} = \{\vec{0}\} \quad (3)$$

De (1) l'équation (3) s'écrira : $\tau_{2/3} = \tau_{ex}$ ($\tau_{2/3} = -\tau_{3/2}$)

Faisons de même jusqu'à la pièce N

$$\tau_{N-1/N} = \tau_{ex}$$

En écrivant la relation statique de l'architecture en série :

$$\tau_{1/2} = \tau_{2/3} = \dots = \tau_{N-1/N} = \tau_{ex} = -\tau_{eq}$$

Ou :

$$\tau_{2/1} = \tau_{3/2} = \dots = \tau_{N/N-1} = \tau_{eq}$$

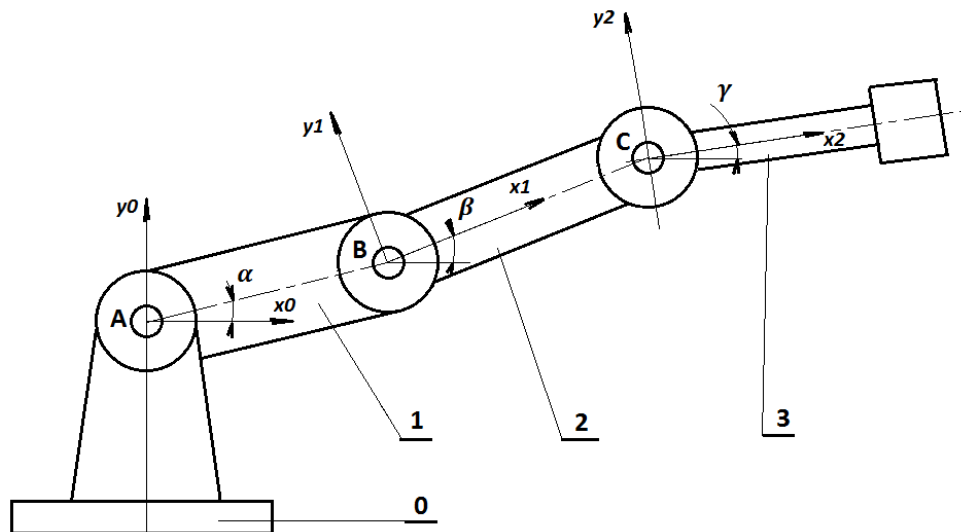
De cette relation il découle : Nombre d'équations = Nombre d'inconnues c.à.d. $h = 0$ alors le système mécanique est isostatique.

3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.3.2. Etude statique

Exemple 3.8 : Bras d'un robot

Reprenons le mécanisme précédent et étudions le statiquement :



3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.3.2. Etude statique

Exemple 3.8 : Bras d'un robot

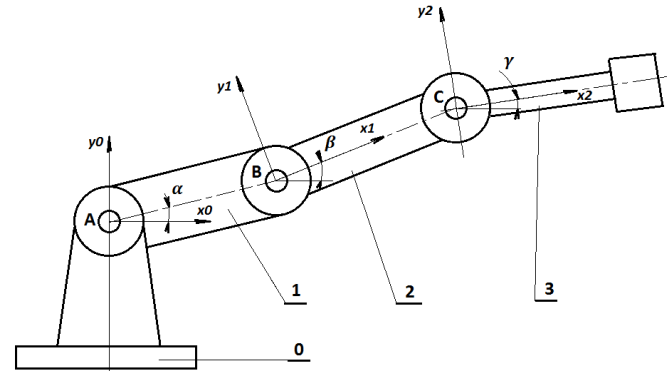
Solution :

Les liaisons en A ,B et C ont pour torseurs statiques :

$$\tau_{1/0} = \begin{Bmatrix} R_{Ax} & M_{Ax} \\ R_{Ay} & M_{Ay} \\ R_{Az} & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\tau_{2/1} = \begin{Bmatrix} R_{Bx} & M_{Bx} \\ R_{By} & M_{By} \\ R_{Bz} & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\tau_{3/2} = \begin{Bmatrix} R_{Cx} & M_{Cx} \\ R_{Cy} & M_{Cy} \\ R_{Cz} & 0 \end{Bmatrix}$$



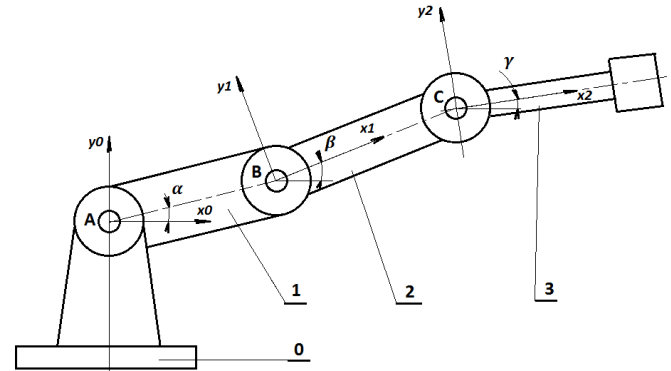
Le torseur équivalent : $\tau_{eq} = \begin{Bmatrix} R_x & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{Bmatrix}$

3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.3.2. Etude statique

Exemple 3.8 : Bras d'un robot

Solution :



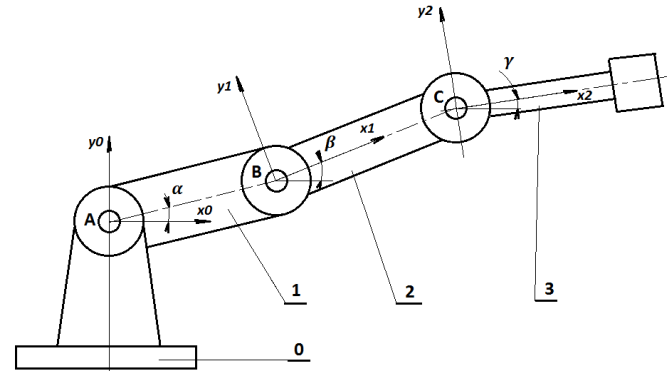
Ecrivons les torseurs $\tau_{2/1}$ et $\tau_{3/2}$ au point A :

$$\tau_{2/1}^A = \tau_{2/1} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_B = \begin{pmatrix} R_{Bx} & M_{Bx} \\ R_{By} & M_{By} \\ R_{Bz} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ a \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_{Bx} \\ R_{By} \\ R_{Bz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{Bx} & M_{Bx} \\ R_{By} & M_{By} \\ R_{Bz} & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} a R_{Bz} \sin \alpha \\ -a R_{Bz} \cos \alpha \\ a R_{By} \cos \alpha - a R_{Bx} \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{Bx} & M_{Bx} + a R_{Bz} \sin \alpha \\ R_{By} & M_{By} - a R_{Bz} \cos \alpha \\ R_{Bz} & a R_{By} \cos \alpha - a R_{Bx} \sin \alpha \end{pmatrix}$$

3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.3.2. Etude statique

Exemple 3.8 : Bras d'un robot**Solution :**

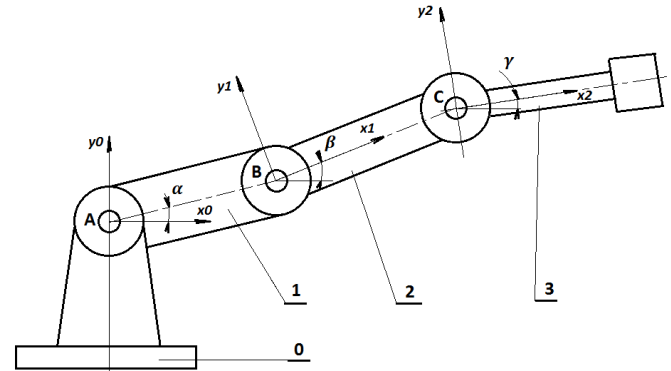
$$\begin{aligned}
 \tau_{3/2}^A &= \tau_{3/2} + \overline{AC} \wedge \overline{R}_C = \tau_{\frac{3}{2}} + (\overline{AB} + \overline{BC}) \wedge \overline{R}_C \\
 &= \begin{pmatrix} R_{Cx} & M_{Cx} \\ R_{Cy} & M_{Cy} \\ R_{Cz} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \cos \alpha + b \cos \beta \\ a \sin \alpha + b \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_{Cx} \\ R_{Cy} \\ R_{Cz} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} R_{Cx} & M_{Cx} \\ R_{Cy} & M_{Cy} \\ R_{Cz} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{Cz}(a \sin \alpha + b \sin \beta) \\ -R_{Cz}(a \cos \alpha + b \cos \beta) \\ R_{Cy}(a \cos \alpha + b \cos \beta) - R_{Cx}(a \sin \alpha + b \sin \beta) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} R_{Cx} & M_{Cx} + R_{Cz}(a \sin \alpha + b \sin \beta) \\ R_{Cy} & M_{Cy} - R_{Cz}(a \cos \alpha + b \cos \beta) \\ R_{Cz} & R_{Cy}(a \cos \alpha + b \cos \beta) - R_{Cx}(a \sin \alpha + b \sin \beta) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.3.2. Etude statique

Exemple 3.8 : Bras d'un robot

Solution :



$$\tau_{1/0} = \tau_{2/1} = \tau_{3/2} = \tau_{eq}$$

$$\begin{Bmatrix} R_{Ax} & M_{Ax} \\ R_{Ay} & M_{Ay} \\ R_{Az} & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{Bx} & M_{Bx} + aR_{Bz}\sin\alpha \\ R_{By} & M_{By} - aR_{Bz}\cos\alpha \\ R_{Bz} & aR_{By}\cos\alpha - aR_{Bx}\sin\alpha \end{Bmatrix} =$$

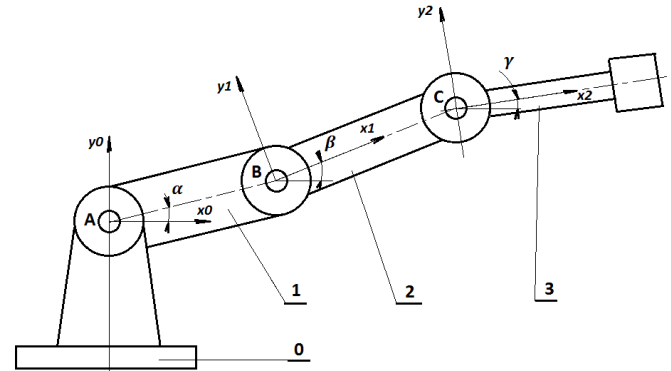
$$\begin{Bmatrix} R_{Cx} \\ R_{Cy} \\ R_{Cz} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{Cx} + R_{Cz}(a\sin\alpha + b\sin\beta) \\ M_{Cy} - R_{Cz}(a\cos\alpha + b\cos\beta) \\ R_{Cy}(a\cos\alpha + b\cos\beta) - R_{Cx}(a\sin\alpha + b\sin\beta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_x & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{Bmatrix}$$

3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.3.2. Etude statique

Exemple 3.8 : Bras d'un robot

Solution :



On obtient le système d'équations :

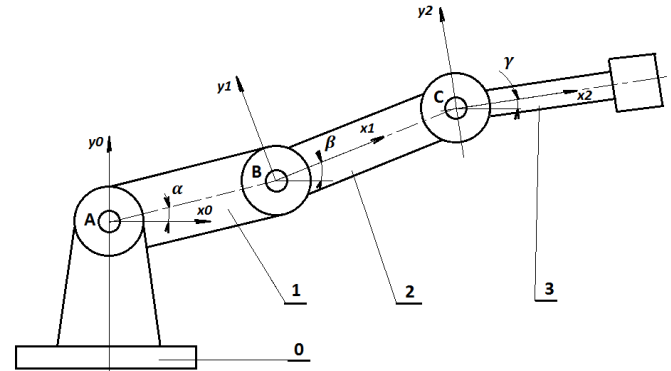
$$\left\{ \begin{array}{l} R_{Ax} = R_x \\ R_{Bx} = R_x \\ R_{Cx} = R_x \\ R_{Ay} = R_y \\ R_{By} = R_y \\ R_{Cy} = R_y \\ R_{Az} = R_z \\ R_{Bz} = R_z \\ R_{Cz} = R_z \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} M_{Ax} = M_x \\ M_{Bx} + aR_{Bz}\sin\alpha = M_x \\ M_{Cx} + R_{Cz}(a\sin\alpha + b\sin\beta) = M_x \\ M_{Ay} = M_y \\ M_{By} - aR_{Bz}\cos\alpha = M_y \\ M_{Cy} - R_{Cz}(a\cos\alpha + b\cos\beta) = M_y \\ 0 = M_z \\ aR_{By}\cos\alpha - aR_{Bx}\sin\alpha = M_z \\ R_{Cy}(a\cos\alpha + b\cos\beta) - R_{Cx}(a\sin\alpha + b\sin\beta) = M_z \end{array} \right. X = \left\{ \begin{array}{l} R_{Ax} \\ R_{Bx} \\ R_{Cx} \\ R_{Ay} \\ R_{By} \\ R_{Cy} \\ R_{Az} \\ R_{Bz} \\ R_{Cz} \\ M_{Ax} \\ M_{Bx} \\ M_{Cx} \\ M_{Ay} \\ M_{By} \\ M_{Cy} \end{array} \right.$$

3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.3.2. Etude statique

Exemple 3.8 : Bras d'un robot

Solution :



Si on omet les 3 dernières équations on aura 15 inconnues (les réactions aux niveaux des liaisons A, B et C) et 15 équations donc $h = 0$ et le système est isostatique

$$M_z = 0 \text{ entraine } aR_{By}\cos\alpha - aR_{Bx}\sin\alpha = 0 \text{ et } R_{By} = R_{Bx} = 0$$

$$R_{Cy}(a\cos\alpha + b\cos\beta) - R_{Cx}(a\sin\alpha + b\sin\beta) = 0 \text{ et } R_{Cy} = R_{Cx} = 0$$

Et tout cela donne :

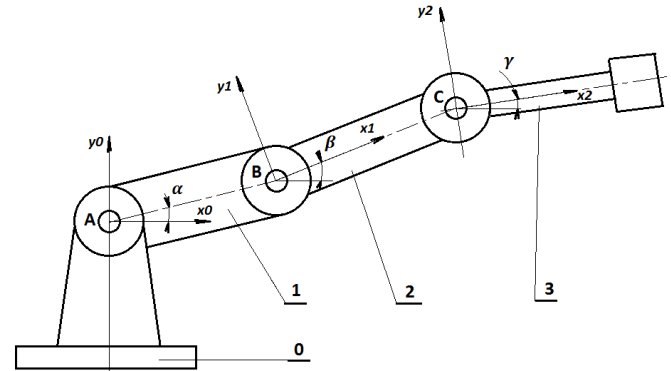
$$\begin{cases} R_{Ax} + R_{Bx} = +R_{Bx} = R_x = 0 \\ R_{Ay} + R_{By} = R_{Cy} = R_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases}$$

3.3. Analyse des liaisons en parallèle

3.3.2. Etude statique

Exemple 3.8 : Bras d'un robot

Solution :



Donc le torseur de la liaison équivalente s'écrit :

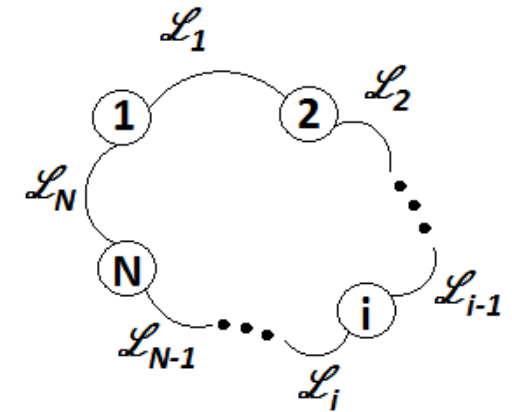
$$\left\{ \begin{array}{cc} 0 & M_x \\ 0 & M_y \\ R_z & 0 \end{array} \right\} \text{ qui informe qu'il y a 2 translations suivant } Ax \text{ et } Ay \text{ et une rotation autour de } Az,$$

même résultat obtenu avec l'analyse cinématique.

3.4. Analyse cinématique et statique des chaînes fermées

3.4.1. Analyse cinématique

Considérons une chaîne fermée de N pièces et L liaisons auxquelles on associe les torseurs cinématiques : $\vartheta_{2/1}$; $\vartheta_{3/2}$; $\vartheta_{N/N-1}$; $\vartheta_{1/N}$



On a : $\vartheta_{N/N} = 0$

Et la relativité des mouvements permet d'écrire :

$$\vartheta_{N/N} = \vartheta_{N/N-1} + \vartheta_{N-1/N-2} + \dots + \vartheta_{1/N} = \{\vec{0}\}$$

$$\vartheta_{N/N-1} + \vartheta_{N-1/N-2} + \dots + \vartheta_{1/N} = \{\vec{0}\}$$

Cette relation permettra d'avoir un système d'équations entre lesquelles on sélectionne celles de la forme $A.X = \{0\}$

X : Vecteur d'inconnues $n_c * 1$

A : Matrice $n_c * p$

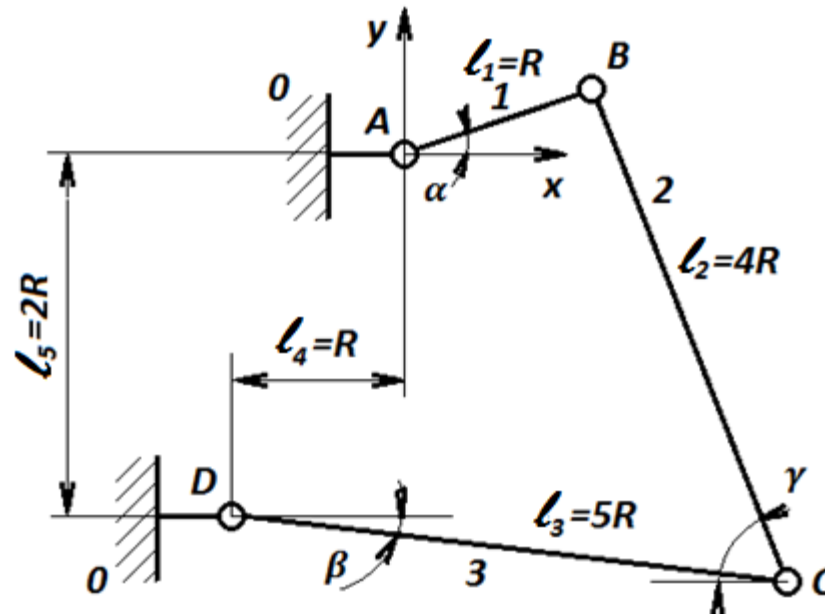
La mobilité $m = n_c - r_c$ avec $r_c = \text{rang}(A)$

3.4. Analyse cinématique et statique des chaînes fermées

3.4.1. Analyse cinématique

Exemple 3.9 : Mécanisme à 4 barres

Déterminer la mobilité de ce mécanisme.



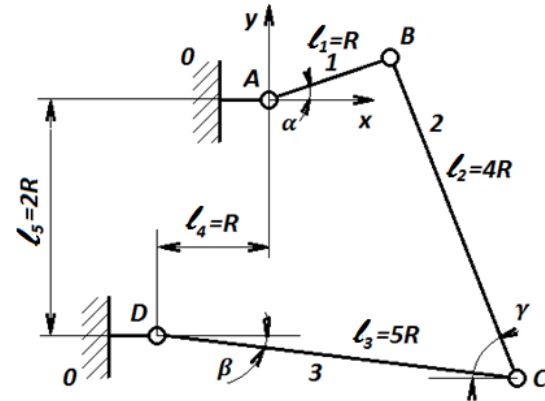
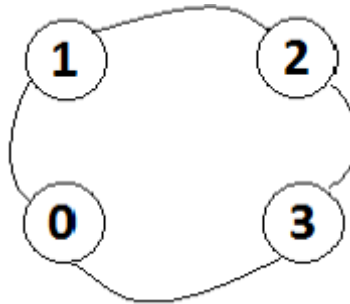
3.4. Analyse cinématique et statique des chaînes fermées

3.4.1. Analyse cinématique

Exemple 3.9 : Mécanisme à 4 barres

Solution :

Le graphe de liaisons :



$$\vartheta_{0/0} = \vartheta_{0/1} + \vartheta_{1/2} + \vartheta_{2/3} + \vartheta_{3/0} = 0$$

$$\vartheta_{0/1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Az} & 0 \end{pmatrix}$$

$$; \vartheta_{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Bz} & 0 \end{pmatrix}$$

$$; \vartheta_{2/3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Cz} & 0 \end{pmatrix};$$

$$\vartheta_{3/0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Dz} & 0 \end{pmatrix}$$

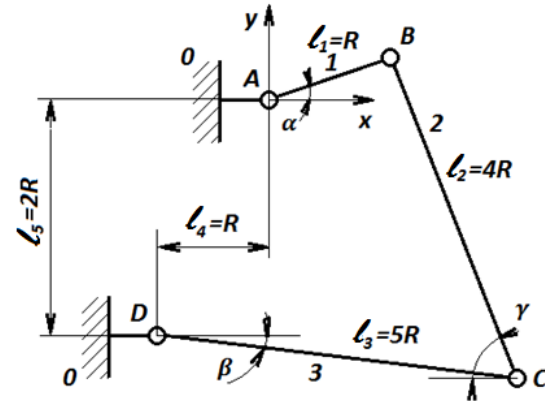
3.4. Analyse cinématique et statique des chaînes fermées

3.4.1. Analyse cinématique

Exemple 3.9 : Mécanisme à 4 barres

Solution :

Au point **A**, les relations précédentes devient :



$$\vartheta_{1/2}^A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Az} & 0 \end{pmatrix} + \overrightarrow{AB} \Lambda \overrightarrow{\Omega}_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Az} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R \cos \alpha \\ R \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{Bz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{Bz} \cdot R \sin \alpha \\ 0 & -\omega_{Bz} R \cos \alpha \\ \omega_{Bz} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vartheta_{2/3}^A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Cz} & 0 \end{pmatrix} + \overrightarrow{AC} \Lambda \overrightarrow{\Omega}_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Cz} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R \cos \alpha + 4R \cos \gamma \\ R \sin \alpha - 4R \sin \gamma \\ 0 \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{Cz} \end{pmatrix}$$

$$\vartheta_{2/3}^A = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{Cz} \cdot (R \sin \alpha - 4R \sin \gamma) \\ 0 & \omega_{Cz} \cdot (R \cos \alpha + 4R \cos \gamma) \\ \omega_{Cz} & 0 \end{pmatrix}$$

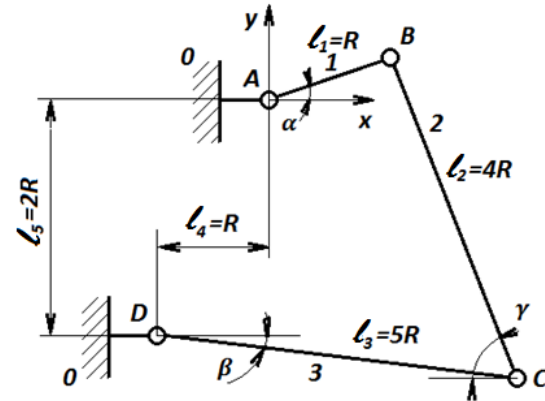
$$\vartheta_{3/0}^A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Dz} & 0 \end{pmatrix} + \overrightarrow{AD} \Lambda \overrightarrow{\Omega}_D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Dz} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R \\ -2R \\ 0 \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{Dz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2R \omega_{Dz} \\ 0 & R \omega_{Dz} \\ \omega_{Dz} & 0 \end{pmatrix}$$

3.4. Analyse cinématique et statique des chaînes fermées

3.4.1. Analyse cinématique

Exemple 3.9 : Mécanisme à 4 barres

Solution :



$$\vartheta_{0/1} + \vartheta_{1/2} + \vartheta_{2/3} + \vartheta_{3/0} = 0 \quad \text{donne :}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{Az} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega_{Bz} \cdot R \sin \alpha \\ 0 & -\omega_{Bz} R \cos \alpha \\ \omega_{Bz} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega_{Cz} \cdot (R \sin \alpha - 4R \sin \gamma) \\ 0 & \omega_{Cz} \cdot (R \cos \alpha + 4R \cos \gamma) \\ \omega_{Cz} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2R \omega_{Dz} \\ 0 & R \omega_{Dz} \\ \omega_{Dz} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

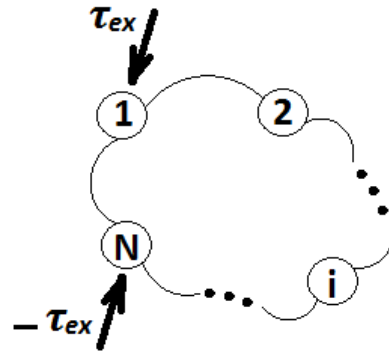
$$\begin{cases} \omega_{Az} + \omega_{Bz} + \omega_{Cz} + \omega_{Dz} = 0 \\ \omega_{Bz} \cdot R \sin \alpha + \omega_{Cz} \cdot (R \sin \alpha - 4R \sin \gamma) - 2R \omega_{Dz} = 0 \\ -\omega_{Bz} R \cos \alpha + \omega_{Cz} \cdot (R \cos \alpha + 4R \cos \gamma) + R \omega_{Dz} = 0 \end{cases}$$

$n_c = 4$ Nombre inconnues et $r_c = 3$ Nombre d'équations

$$m = n_c - r_c = 4 - 3 = 1$$

3.4. Analyse cinématique et statique des chaînes fermées

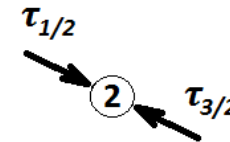
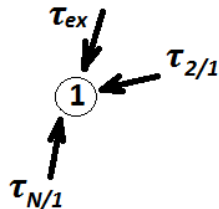
3.4.2. Analyse statique



Isolons chaque pièce :

Pièce (1) : $\tau_{2/1} + \tau_{N/1} + \tau_{ex} = \{\vec{0}\}$

Pièce (2) : $\tau_{1/2} + \tau_{3/2} = \{\vec{0}\}$



Pièce (i) : $\tau_{i-1/i} + \tau_{i+1/i} = \{\vec{0}\}$ (i=2,N-1)

On obtient un système d'équations :

$$A.X=B$$

X : Vecteur $n_s \times 1$

A : Matrice $p \times n_s$

$r_s = \text{rang}(A)$

Le degré d'hyperstatisme

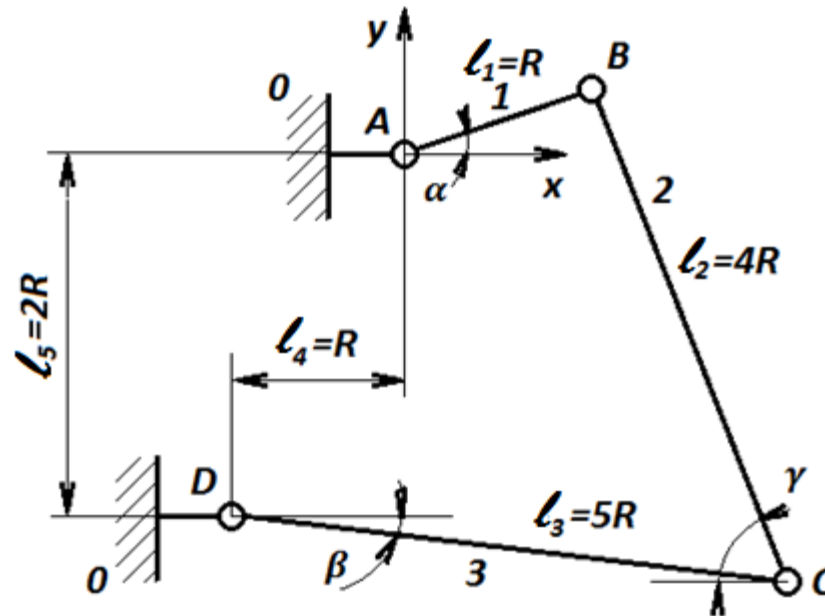
$$h = n_s - r_s$$

3.4. Analyse cinématique et statique des chaînes fermées

3.4.2. Analyse statique

Exemple 3.10 : Mécanisme à 4 barres

Reprenons le mécanisme précédent et déterminons le degré d'hyperstatisme.



3.4. Analyse cinématique et statique des chaînes fermées

3.4.2. Analyse statique

Exemple 3.10 : Mécanisme à 4 barres

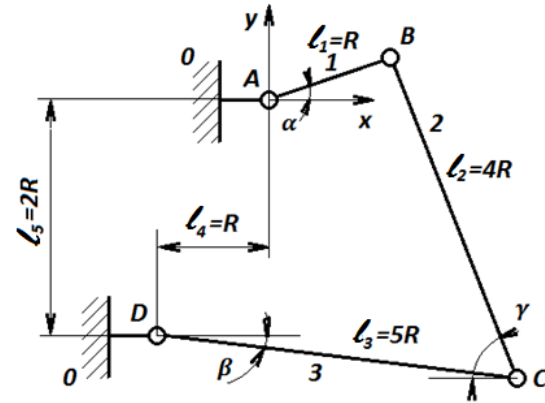
Solution :

La chaîne est fermée.

$$\tau_{0/1} = \begin{Bmatrix} R_{0/1x} & M_{0/1x} \\ R_{0/1y} & M_{0/1y} \\ R_{0/1z} & 0 \end{Bmatrix}; \tau_{2/1} = \begin{Bmatrix} R_{2/1x} & M_{2/1x} \\ R_{2/1y} & M_{2/1y} \\ R_{2/1z} & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\tau_{3/2} = \begin{Bmatrix} R_{3/2x} & M_{3/2x} \\ R_{3/2y} & M_{3/2y} \\ R_{3/2z} & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\tau_{ext} = \begin{Bmatrix} R_x & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{Bmatrix}$$



3.4. Analyse cinématique et statique des chaînes fermées

3.4.2. Analyse statique

Exemple 3.10 : Mécanisme à 4 barres**Solution :**

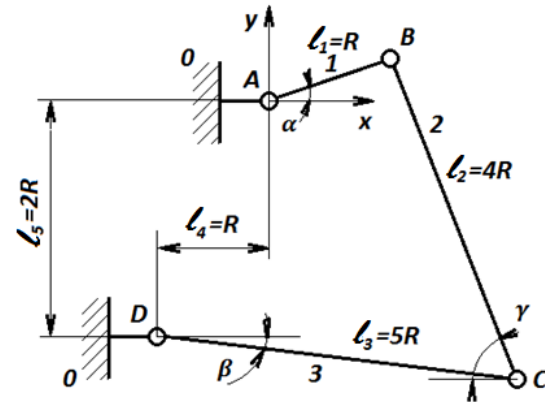
Isolons la barre (1)

$$\tau_{2/1} + \tau_{0/1} + \tau_{ex} = \{\vec{0}\}$$

Au point A :

$$\begin{Bmatrix} R_{0/1x} & M_{0/1x} \\ R_{0/1y} & M_{0/1y} \\ R_{0/1z} & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_{2/1x} & M_{2/1x} \\ R_{2/1y} & M_{2/1y} \\ R_{2/1z} & 0 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} R \cos \alpha \\ R \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_{2/1x} \\ R_{2/1y} \\ R_{2/1z} \end{pmatrix} + \begin{Bmatrix} R_x & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{Bmatrix} = \{\vec{0}\}$$

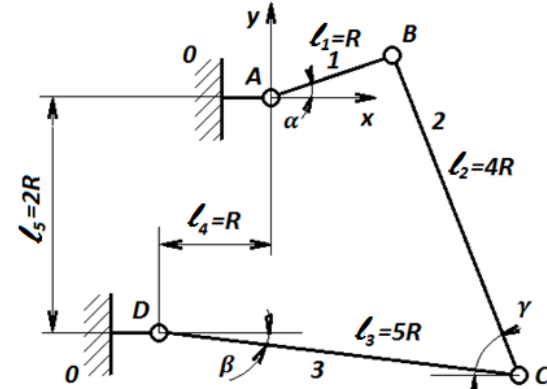
$$\begin{Bmatrix} R_{0/1x} & M_{0/1x} \\ R_{0/1y} & M_{0/1y} \\ R_{0/1z} & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_{2/1x} & M_{2/1x} + R \sin \alpha R_{2/1z} \\ R_{2/1y} & M_{2/1y} - R \cos \alpha R_{2/1z} \\ R_{2/1z} & R \cos \alpha R_{2/1y} - R \sin \alpha R_{2/1x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_x & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{Bmatrix} = \{\vec{0}\} \quad (1)$$

Isolons la barre (2) : $\tau_{1/2} + \tau_{3/2} = \{\vec{0}\}$ 

3.4. Analyse cinématique et statique des chaînes fermées

3.4.2. Analyse statique

Exemple 3.10 : Mécanisme à 4 barres



Solution :

Au point A :

$$- \begin{Bmatrix} R_{2/1x} & M_{2/1x} + R \sin \alpha R_{2/1z} \\ R_{2/1y} & M_{2/1y} - R \cos \alpha R_{2/1z} \\ R_{2/1z} & R \cos \alpha R_{2/1y} - R \sin \alpha R_{2/1x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_{3/2x} & M_{3/2x} \\ R_{3/2y} & M_{3/2y} \\ R_{3/2z} & 0 \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} R \cos \alpha + 4R \cos \gamma \\ R \sin \alpha - 4R \sin \gamma \\ 0 \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} R_{3/2x} \\ R_{3/2y} \\ R_{3/2z} \end{pmatrix} = \{\vec{0}\}$$

$$- \begin{Bmatrix} R_{2/1x} & M_{2/1x} + R \sin \alpha R_{2/1z} \\ R_{2/1y} & M_{2/1y} - R \cos \alpha R_{2/1z} \\ R_{2/1z} & R \cos \alpha R_{2/1y} - R \sin \alpha R_{2/1x} \end{Bmatrix} +$$

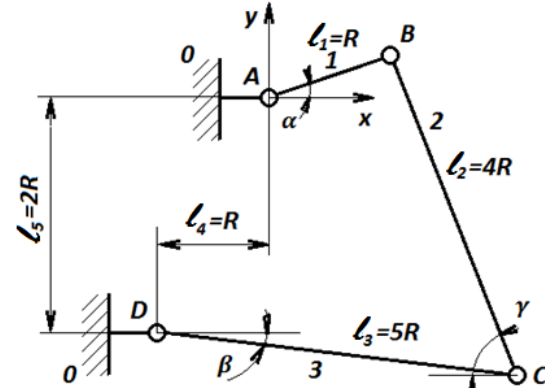
$$\begin{Bmatrix} R_{3/2x} & M_{3/2x} + (R \sin \alpha - 4R \sin \gamma) R_{3/2z} \\ R_{3/2y} & M_{3/2y} - (R \cos \alpha + 4R \cos \gamma) R_{3/2z} \\ R_{3/2z} & (R \cos \alpha + 4R \cos \gamma) R_{3/2y} - (R \sin \alpha - 4R \sin \gamma) R_{3/2x} \end{Bmatrix} = \{\vec{0}\} \quad (2)$$

3.4. Analyse cinématique et statique des chaînes fermées

3.4.2. Analyse statique

Exemple 3.10 : Mécanisme à 4 barres

Solution :



La barre (3) : $\tau_{2/3} + \tau_{0/3} = \{\vec{0}\}$

$$\tau_{0/3} = \begin{Bmatrix} R_{0/3x} & M_{0/3x} \\ R_{0/3y} & M_{0/3y} \\ R_{0/3z} & 0 \end{Bmatrix}$$

Au point A :

$$-\begin{Bmatrix} R_{3/2x} & M_{3/2x} + (R\sin\alpha - 4R\sin\gamma)R_{3/2z} \\ R_{3/2y} & M_{3/2y} - (R\cos\alpha + 4R\cos\gamma)R_{3/2z} \\ R_{3/2z} & (R\cos\alpha + 4R\cos\gamma)R_{3/2y} - (R\sin\alpha - 4R\sin\gamma)R_{3/2x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_{0/3x} & M_{0/3x} \\ R_{0/3y} & M_{0/3y} \\ R_{0/3z} & 0 \end{Bmatrix} +$$

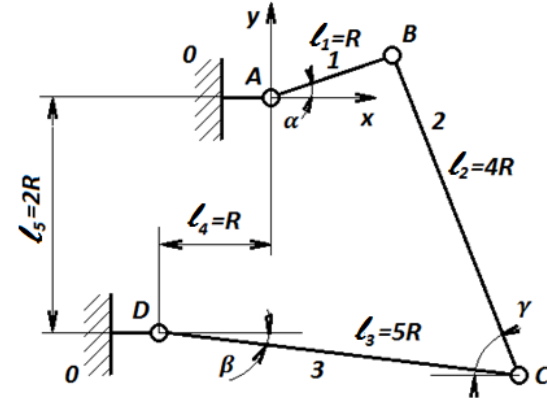
$$\begin{pmatrix} -R \\ -2R \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_{0/3x} \\ R_{0/3y} \\ R_{0/3z} \end{pmatrix} = \{\vec{0}\}$$

3.4. Analyse cinématique et statique des chaînes fermées

3.4.2. Analyse statique

Exemple 3.10 : Mécanisme à 4 barres

Solution :



La barre (3) : $\tau_{2/3} + \tau_{0/3} = \{\vec{0}\}$

$$\tau_{0/3} = \begin{Bmatrix} R_{0/3x} & M_{0/3x} \\ R_{0/3y} & M_{0/3y} \\ R_{0/3z} & 0 \end{Bmatrix}$$

Au point A :

et

$$- \begin{Bmatrix} R_{3/2x} & M_{3/2x} + (R\sin\alpha - 4R\sin\gamma)R_{3/2z} \\ R_{3/2y} & M_{3/2y} - (R\cos\alpha + 4R\cos\gamma)R_{3/2z} \\ R_{3/2z} & (R\cos\alpha + 4R\cos\gamma)R_{3/2y} - (R\sin\alpha - 4R\sin\gamma)R_{3/2x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_{0/3x} & M_{0/3x} - 2RR_{0/3z} \\ R_{0/3y} & M_{0/3y} - RR_{0/3z} \\ R_{0/3z} & -RR_{0/3y} - 2RR_{0/3x} \end{Bmatrix} = \{\vec{0}\} \quad (3)$$

On obtient finalement le système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 R_{0/1x} + R_{2/1x} + R_x = 0 \\
 R_{0/1y} + R_{2/1y} + R_y = 0 \\
 R_{0/1z} + R_{2/1z} + R_z = 0 \\
 M_{0/1x} + M_{2/1x} + R \sin \alpha R_{2/1z} + M_x = 0 \\
 M_{0/1y} + M_{2/1y} - R \cos \alpha R_{2/1z} + M_y = 0 \\
 R \cos \alpha R_{2/1y} - R \sin \alpha R_{2/1x} + M_z = 0 \\
 -R_{2/1x} + R_{3/2x} = 0 \\
 -R_{2/1y} + R_{3/2y} = 0 \\
 -R_{2/1z} + R_{3/2z} = 0 \\
 -M_{2/1x} - R \sin \alpha R_{2/1z} + M_{3/2x} + (R \sin \alpha - 4R \sin \gamma) R_{3/2z} = 0 \\
 -M_{2/1y} + R \cos \alpha R_{2/1z} + M_{3/2y} - (R \cos \alpha + 4R \cos \gamma) R_{3/2z} = 0 \\
 -R \cos \alpha R_{2/1y} + R \sin \alpha R_{2/1x} + (R \cos \alpha + 4R \cos \gamma) R_{3/2y} - (R \sin \alpha - 4R \sin \gamma) R_{3/2x} = 0 \\
 R_{0/3x} - R_{3/2x} = 0 \\
 R_{0/3y} - R_{3/2y} = 0 \\
 R_{0/3z} - R_{3/2z} = 0 \\
 M_{0/3x} - 2RR_{0/3z} - M_{3/2x} - (R \sin \alpha - 4R \sin \gamma) R_{3/2z} = 0 \\
 M_{0/3y} - RR_{0/3z} - M_{3/2y} + (R \cos \alpha + 4R \cos \gamma) R_{3/2z} = 0 \\
 -RR_{0/3y} - 2RR_{0/3x} - (R \cos \alpha + 4R \cos \gamma) R_{3/2y} + (R \sin \alpha - 4R \sin \gamma) R_{3/2x} = 0
 \end{array} \right.$$

3.4. Analyse cinématique et statique des chaînes fermées

3.4.2. Analyse statique

Exemple 3.10 : Mécanisme à 4 barres

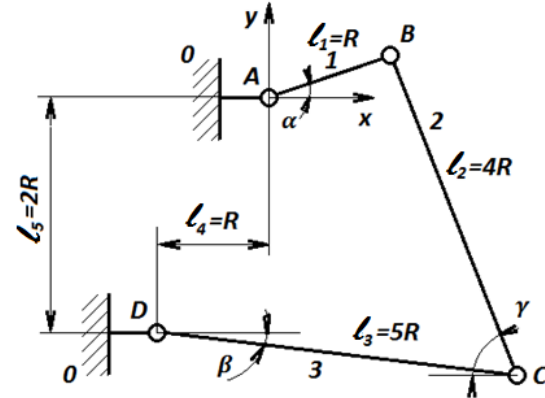
Solution :

Donc :

Nombre d'équations $r_s = 18$

Nombre d'inconnues $n_s = 20$

$$h = n_s - r_s = 2$$



3.5. Recherche systématique des solutions isostatiques

D'après les deux dernières expressions de h et pour rendre le mécanisme isostatique, il suffit « à priori » de choisir de nouvelles liaisons (voir tableau de liaisons normalisées) de telle façon que :

$$***h = 0***$$

donc

$$***Nc = mc + 6***$$

et

$$***Ns = 6n - mc***$$

donc toute proposition de modification en vue de rendre un mécanisme isostatique doit faire l'objet d'une vérification :

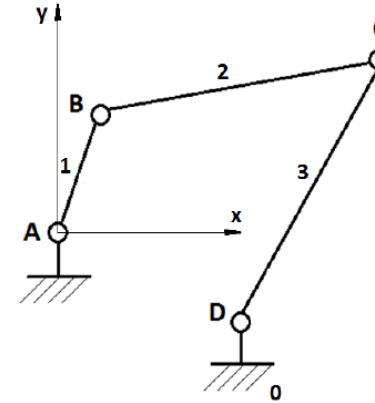
Etude cinématique : mc , mcu , mci ;

Etude statique : Ns , h .

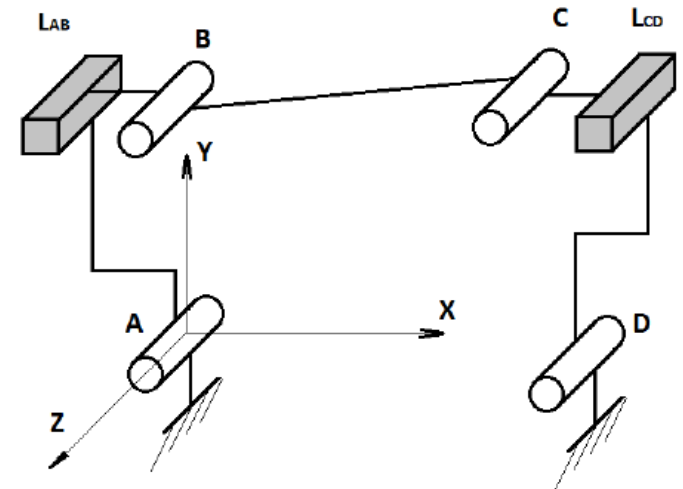
3.5. Recherche systématique des solutions isostatiques

Exemple 3.11 :

Soit le mécanisme à 4 barres suivant :



Sachant que le degré d'hyperstatisme $h=2$



3.5. Recherche systématique des solutions isostatiques

Exemple 3.11 :

L'ajout des liaisons \mathcal{L}_{AB} et \mathcal{L}_{CD} qui sont des glissières (Degré de liberté T_z) entrainera la neutralisation des composantes R_{zB} et R_{zC} d'où $h=0$ et le mécanisme est isostatique. La mobilité avant et après modification est $m=1$

Il y a multitude de combinaisons d'ajout de DDL pour le cas de ce mécanisme, on peut proposer :

