**Unité d’enseignement : UEF 3.1.1**

**Crédits : 4**

**Coefficient : 2**

# *Théorie des mécanismes*

# *Théorie des mécanismes*

## *Chapitre 1 : Préliminaires et Rappels*

Ce chapitre est consacré aux rappels et des notions préliminaires qui apparaissent nécessaires pour l'enseignement de cette matière, ses objectifs sont :

- ➔ Faire des opérations sur les torseurs ;
- ➔ Définir les principales notions sur les mécanismes.

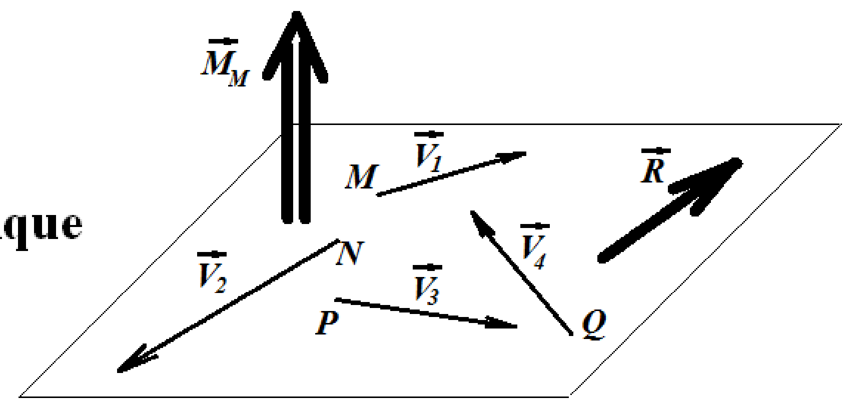
# I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

## I.1.1 Définition

Un **torseur** est un outil mathématique utilisé principalement en mécanique du solide indéformable, pour modéliser les **mouvements** du solide et les **actions mécaniques** qu'ils subissent de la part d'un environnement extérieur.

$$[T]_M = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{V_1} & \overrightarrow{M_1} \\ \overrightarrow{V_2} & \overrightarrow{M_1} \\ \overrightarrow{V_3} & \overrightarrow{V_3} \\ \overrightarrow{V_4} & \overrightarrow{M_4} \end{Bmatrix}$$

: appelée **Notation analytique**



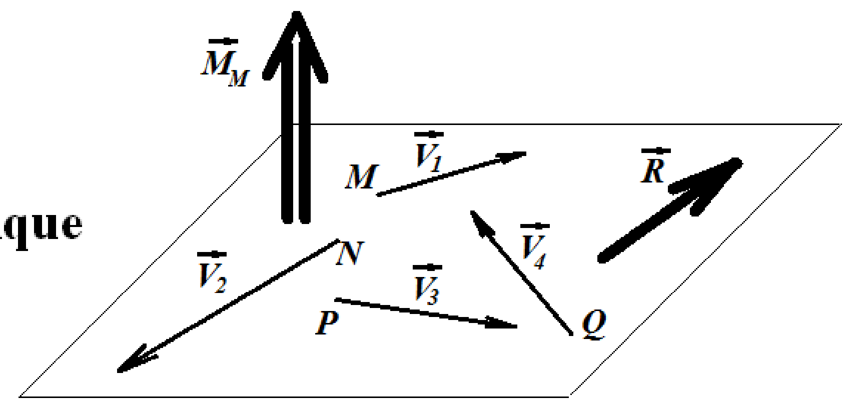

$\overrightarrow{M_1} = \overrightarrow{r_1} \wedge \overrightarrow{V_1}$ , $\overrightarrow{M_2} = \overrightarrow{r_2} \wedge \overrightarrow{V_2}$ , $\overrightarrow{M_3} = \overrightarrow{r_3} \wedge \overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{M_4} = \overrightarrow{r_4} \wedge \overrightarrow{V_n}$

avec : $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{MM}$ , $\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{MN}$ , $\overrightarrow{r_3} = \overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{r_4} = \overrightarrow{MQ}$

## I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

### I.1.1 Définition

Un **torseur** est un outil mathématique utilisé principalement en mécanique du solide indéformable, pour modéliser les **mouvements** du solide et les **actions mécaniques** qu'ils subissent de la part d'un environnement extérieur.




$$[T]_M = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{V_1} & \overrightarrow{M_{1M}} \\ \overrightarrow{V_2} & \overrightarrow{M_{1M}} \\ \overrightarrow{V_3} & \overrightarrow{V_{3M}} \\ \overrightarrow{V_4} & \overrightarrow{M_{4M}} \end{Bmatrix}$$ : appelée **Notation analytique**

$$[T]_M = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M}_M \end{cases}$$ : appelée **Notation vectorielle**

$\vec{R}$ et $\vec{M}_M$ : sont appelés **éléments de réduction**

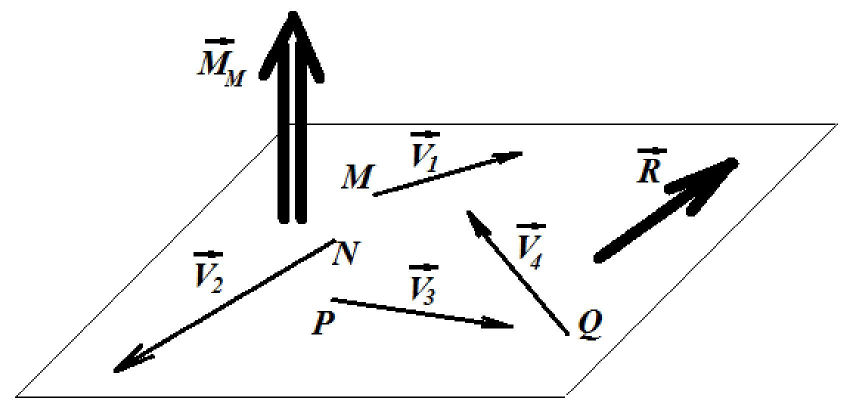
$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3} + \overrightarrow{V_4} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{M_M} = \overrightarrow{M_{1M}} + \overrightarrow{M_{2M}} + \overrightarrow{M_{3M}} + \overrightarrow{M_{4M}}$$

## I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

### I.1.1 Définition

Un **torseur** est un outil mathématique utilisé principalement en mécanique du solide indéformable, pour modéliser les **mouvements** du solide et les **actions mécaniques** qu'ils subissent de la part d'un environnement extérieur.

$$[T]_M = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{V_1} & \overrightarrow{M_{1M}} \\ \overrightarrow{V_2} & \overrightarrow{M_{1M}} \\ \overrightarrow{V_3} & \overrightarrow{V_{3M}} \\ \overrightarrow{V_4} & \overrightarrow{M_{4M}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_M \end{Bmatrix}$$




$$\vec{R} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3} + \overrightarrow{V_4} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M_M} = \overrightarrow{M_{1M}} + \overrightarrow{M_{2M}} + \overrightarrow{M_{3M}} + \overrightarrow{M_{4M}}$$

$$\overrightarrow{M_{1M}} = \overrightarrow{r_1} \wedge \overrightarrow{V_1} \;,\; \overrightarrow{M_{2M}} = \overrightarrow{r_2} \wedge \overrightarrow{V_2} \;,\; \overrightarrow{M_{3M}} = \overrightarrow{r_3} \wedge \overrightarrow{V_2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M_{4M}} = \overrightarrow{r_4} \wedge \overrightarrow{V_n}$$

avec : $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{MM}$ , $\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{MN}$ , $\overrightarrow{r_3} = \overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{r_4} = \overrightarrow{MQ}$

## I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

### I.1.1 Définition

Un **torseur** est un outil mathématique utilisé principalement en mécanique du solide indéformable, pour modéliser les **mouvements** du solide et les **actions mécaniques** qu'ils subissent de la part d'un environnement extérieur.

et dans le cas général pour $n$ vecteurs :

$$[\boldsymbol{T}]_M = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{V_1}} & \overrightarrow{\boldsymbol{M_1}} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{V_2}} & \overrightarrow{\boldsymbol{M_1}} \\ \vdots & \vdots \\ \overrightarrow{\boldsymbol{V_n}} & \overrightarrow{\boldsymbol{M_n}} \end{Bmatrix} = \begin{cases} \vec{R} \\ \overrightarrow{M}_M \end{cases}$$

avec : $\vec{R} = \sum_1^n \overrightarrow{V_i}$ et $\overrightarrow{M}_M = \sum_1^n \overrightarrow{r_i} \Lambda \overrightarrow{V_i}$ , $i = 1, n$

## I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

### I.1.1 Définition

**Exemple 1-1 :**

Dans un repère orthonormé (O, x, y, z) on considère les vecteurs vitesses suivants :

$\overrightarrow{V_1} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ; $\overrightarrow{V_2} = +\vec{j} + \overrightarrow{2k}$ ; $\overrightarrow{V_3} = \vec{i} - \vec{k}$ et $\overrightarrow{V_4} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ liés respectivement aux points A(0,1,2) ; O(0,0,0) ; B(1,0,1) et C(1,3,0)

Construire le torseur $[T]_O$ associé aux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ , $\overrightarrow{V_2}$ , $\overrightarrow{V_3}$ et $\overrightarrow{V_4}$

**Rappel :**

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \left(A_y.B_z - A_z.B_y\right)\vec{i} - \left(A_x.B_z - A_z.B_x\right)\vec{j} + \left(A_x.B_y - A_y.B_x\right)\vec{k}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = A.B.\sin\theta.\vec{u}_c$$

## I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

### I.1.1 Définition

**Exemple 1-1 :**

Dans un repère orthonormé (O, x, y, z) on considère les vecteurs vitesses suivants :

$\overrightarrow{V_1} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ; $\overrightarrow{V_2} = +\vec{j} + \overrightarrow{2k}$ ; $\overrightarrow{V_3} = \vec{i} - \vec{k}$ et $\overrightarrow{V_4} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ liés respectivement aux points A(0,1,2) ; O(0,0,0) ; B(1,0,1) et C(1,3,0)

Construire le torseur $[T]_O$ associé aux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ , $\overrightarrow{V_2}$ , $\overrightarrow{V_3}$ et $\overrightarrow{V_4}$

**Solution :**

$$[T]_O = \begin{cases} \vec{\mathrm{R}} = \sum_{i=1}^{4} \vec{V_i} \\ \overrightarrow{M_A} = \sum_{i=1}^{4} \vec{r_i} \Lambda \vec{V_i} \end{cases}$$

$$\vec{\mathbf{R}} = \overrightarrow{\mathbf{V_1}} + \overrightarrow{\mathbf{V_2}} + \overrightarrow{\mathbf{V_3}} + \overrightarrow{\mathbf{V_4}}$$

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{OA} \Lambda \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{OO} \Lambda \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{OB} \Lambda \overrightarrow{V_3} + \overrightarrow{OC} \Lambda \overrightarrow{V_4}$$

## I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

### I.1.1 Définition

**Exemple 1-1 :**

Dans un repère orthonormé (O, x, y, z) on considère les vecteurs vitesses suivants :

$\overrightarrow{V_1} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ ; $\overrightarrow{V_2} = +\vec{\jmath} + \overrightarrow{2k}$ ; $\overrightarrow{V_3} = \vec{\imath} - \vec{k}$ et $\overrightarrow{V_4} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$ liés respectivement aux points A(0,1,2) ; O(0,0,0) ; B(1,0,1) et C(1,3,0)

Construire le torseur $[T]_O$ associé aux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ , $\overrightarrow{V_2}$ , $\overrightarrow{V_3}$ et $\overrightarrow{V_4}$

**Solution :**

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

## I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

### I.1.1 Définition

**Exemple 1-1 :**

Dans un repère orthonormé (O, x, y, z) on considère les vecteurs vitesses suivants :

$\overrightarrow{V_1} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ ; $\overrightarrow{V_2} = +\vec{\jmath} + \overrightarrow{2k}$ ; $\overrightarrow{V_3} = \vec{\imath} - \vec{k}$ et $\overrightarrow{V_4} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$ liés respectivement aux points A(0,1,2) ; O(0,0,0) ; B(1,0,1) et C(1,3,0)

Construire le torseur $[T]_O$ associé aux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ , $\overrightarrow{V_2}$ , $\overrightarrow{V_3}$ et $\overrightarrow{V_4}$

**Solution :**

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{OA} \Lambda \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{OO} \Lambda \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{OB} \Lambda \overrightarrow{V_3} + \overrightarrow{OC} \Lambda \overrightarrow{V_4}$$

## I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

### I.1.1 Définition

**Exemple 1-1 :**

Dans un repère orthonormé (O, x, y, z) on considère les vecteurs vitesses suivants :

$\overrightarrow{V_1} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ ; $\overrightarrow{V_2} = +\vec{\jmath} + \overrightarrow{2k}$ ; $\overrightarrow{V_3} = \vec{\imath} - \vec{k}$ et $\overrightarrow{V_4} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$ liés respectivement aux points A(0,1,2) ; O(0,0,0) ; B(1,0,1) et C(1,3,0)

Construire le torseur $[T]_O$ associé aux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ , $\overrightarrow{V_2}$ , $\overrightarrow{V_3}$ et $\overrightarrow{V_4}$

**Solution :**

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{OA}\Lambda\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{OO}\Lambda\overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{OB}\Lambda\overrightarrow{V_3} + \overrightarrow{OC}\Lambda\overrightarrow{V_4}$$

$$\overrightarrow{OA}\Lambda\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OO}\Lambda\overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OB}\Lambda\overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OC}\Lambda\overrightarrow{V_4} = \begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_A} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\2\\-2\end{pmatrix}$$

## I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

### I.1.1 Définition

**Exemple 1-1 :**

Dans un repère orthonormé (O, x, y, z) on considère les vecteurs vitesses suivants :

$\overrightarrow{V_1} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ ; $\overrightarrow{V_2} = +\vec{\jmath} + \overrightarrow{2k}$ ; $\overrightarrow{V_3} = \vec{\imath} - \vec{k}$ et $\overrightarrow{V_4} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$ liés respectivement aux points A(0,1,2) ; O(0,0,0) ; B(1,0,1) et C(1,3,0)

Construire le torseur $[T]_O$ associé aux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ , $\overrightarrow{V_2}$ , $\overrightarrow{V_3}$ et $\overrightarrow{V_4}$

**Solution :**

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{M_A} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$[T]_O = \begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{V_i} \\ \overrightarrow{M_A} = \sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{r_i} \Lambda \overrightarrow{V_i} \end{cases} \Longrightarrow [T]_O = \begin{Bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{Bmatrix}$$

$$\overrightarrow{OA}\Lambda\overrightarrow{V_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(1*1-1*2)-\vec{j}(0*1-(-1)*2)+\vec{k}(0*1-1*1)$$

$$\overrightarrow{OA}\Lambda\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OO}\Lambda\overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB}\Lambda\overrightarrow{V_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(0*(-1)-0*1)-\vec{j}(1*(-1)-(-1)*1)+\vec{k}(1*0-(-1)*0)$$

$$\overrightarrow{OB}\Lambda\overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OC}\Lambda\overrightarrow{V_4} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(3*(-1)-2*0)-\vec{j}(1*(-1)-1*0)+\vec{k}(1*2-1*3)$$

$$\overrightarrow{OC}\Lambda\overrightarrow{V_4} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

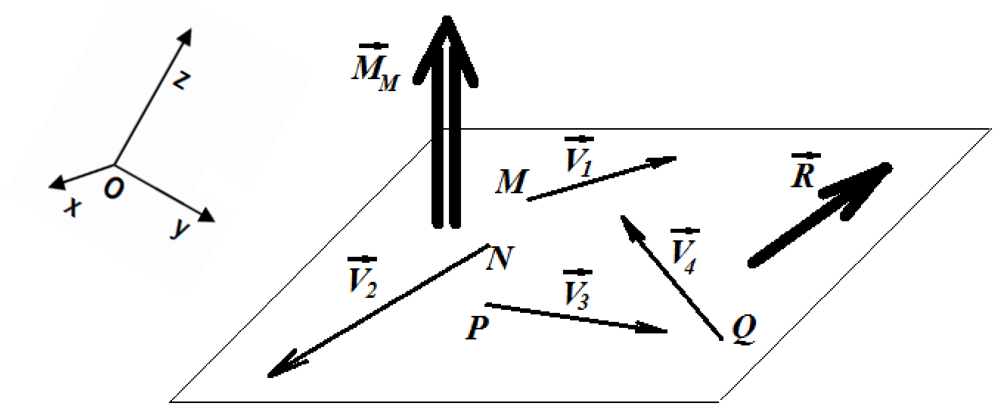
## I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

### I.1.1 Définition

Un **torseur** est un outil mathématique utilisé principalement en mécanique du solide indéformable, pour modéliser les **mouvements** du solide et les **actions mécaniques** qu'ils subissent de la part d'un environnement extérieur.

Dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le torseur comporte six composantes. On le note :

$$[T]_M = \begin{Bmatrix} R_x & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{Bmatrix}$$

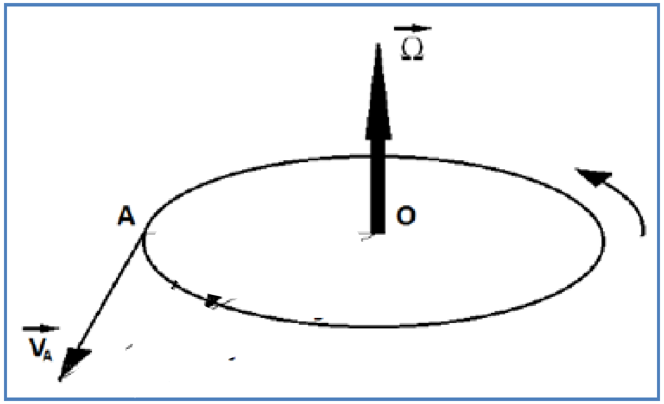


## I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

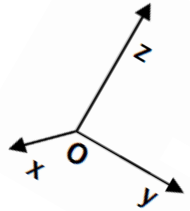
### I.1.1 Définition

**Exemple 1-2 : Torseur cinématique**

Le disque de la figure ci-contre est un ensemble de points. En tournant chaque point acquiert une vitesse formant un champ de vitesses. Les deux vecteurs $\vec{\boldsymbol{\Omega}}$ et $\vec{\mathbf{V}}$ sont la résultante des vitesses angulaires et linéaires respectivement, le **torseur cinématique** s'écrit :




$$[T_c]_A = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega} \\ \vec{V}_A \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad [T_c]_A = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_{Ax} \\ \omega_y & V_{Ay} \\ \omega_z & V_{Az} \end{Bmatrix}$$




avec :

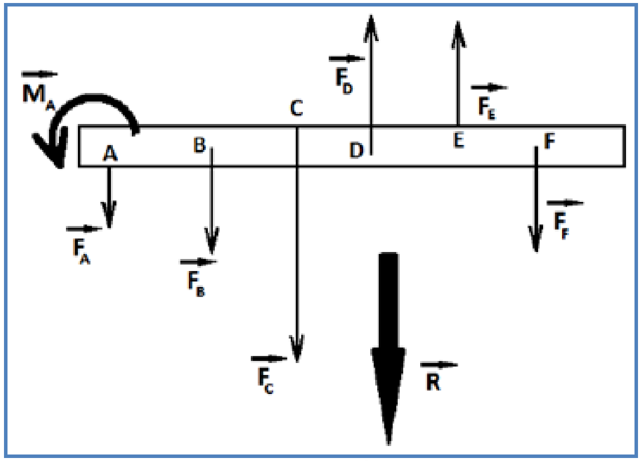
$$\overrightarrow{V_{Ax}} = \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{\omega_x} \quad , \quad \overrightarrow{V_{Ay}} = \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{\omega_y} \quad , \quad \overrightarrow{V_{Az}} = \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{\omega_z}$$

$$\vec{\Omega} = \overrightarrow{\omega_x} + \overrightarrow{\omega_y} + \overrightarrow{\omega_z} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_{Ax}} + \overrightarrow{V_{Ay}} + \overrightarrow{V_{Az}}$$

# I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

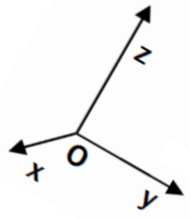
## I.1.1 Définition

### Exemple 1-3 : Torseur statique




On a la poutre ci-contre avec des point **A**, **B**, **C**, **D**, **E** et **F** où sont appliquées des forces. Le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{R}}$ est la résultante et le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{M_A}}$ est le moment résultant en **A** de ces forces, le **torseur statique** s'écrit :

$$[T_s]_A = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_A} \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad [T_s]_A = \begin{Bmatrix} R_x & M_{Ax} \\ R_y & MA_y \\ R_z & M_{Az} \end{Bmatrix}$$

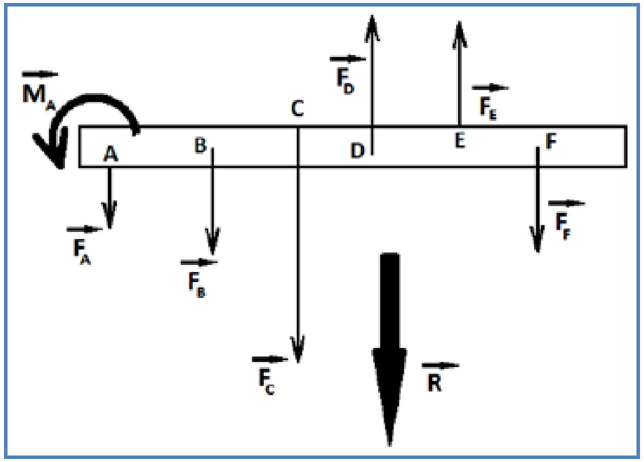



$$\vec{R} = \overrightarrow{R_x} + \overrightarrow{R_y} + \overrightarrow{R_z} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_{Ax}} + \overrightarrow{M_{Ay}} + \overrightarrow{M_{Az}}$$

# I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

## I.1.1 Définition

### Exemple 1-3 : Torseur statique




$$[T_s]_A = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad [T_s]_A = \begin{Bmatrix} R_x & M_{Ax} \\ R_y & MA_y \\ R_z & M_{Az} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{R} = \overrightarrow{R_x} + \overrightarrow{R_y} + \overrightarrow{R_z} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_{Ax}} + \overrightarrow{M_{Ay}} + \overrightarrow{M_{Az}}$$

avec :

$$\overrightarrow{R_x} = \overrightarrow{F_{Ax}} + \overrightarrow{F_{Bx}} + \overrightarrow{F_{Cx}} + \overrightarrow{F_{Dx}} + \overrightarrow{F_{Ex}} + \overrightarrow{F_{Fx}}$$

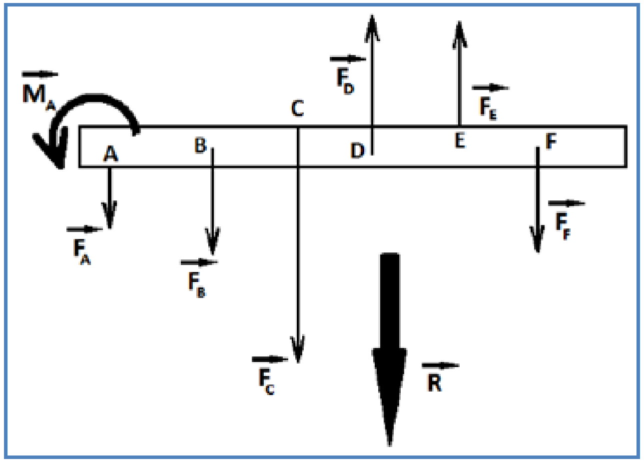
$$\overrightarrow{R_Y} = \overrightarrow{F_{Ay}} + \overrightarrow{F_{By}} + \overrightarrow{F_{Cy}} + \overrightarrow{F_{Dy}} + \overrightarrow{F_{Ey}} + \overrightarrow{F_{Fy}}$$

$$\overrightarrow{R_z} = \overrightarrow{F_{Az}} + \overrightarrow{F_{Bz}} + \overrightarrow{F_{Cz}} + \overrightarrow{F_{Dz}} + \overrightarrow{F_{Ez}} + \overrightarrow{F_{Fz}}$$

# I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

## I.1.1 Définition

**Exemple 1-3 : Torseur statique**




$$[T_s]_A = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad [\boldsymbol{T_s}]_A = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{R_x} & \boldsymbol{M_{Ax}} \\ \boldsymbol{R_y} & \boldsymbol{M_{Ay}} \\ \boldsymbol{R_z} & \boldsymbol{M_{Az}} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{R} = \overrightarrow{R_x} + \overrightarrow{R_y} + \overrightarrow{R_z} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_{Ax}} + \overrightarrow{M_{Ay}} + \overrightarrow{M_{Az}}$$

avec :

$$\overrightarrow{M_{Ax}} = \overrightarrow{AA} \wedge \overrightarrow{F_{Ax}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{F_{Bx}} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{F_{Cx}} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{F_{Dx}} + \overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{F_{Ex}} + \overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{F_{Fx}}$$

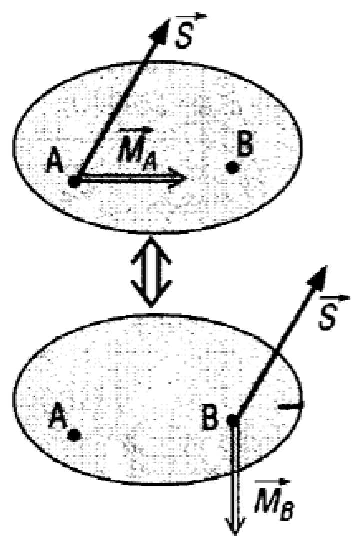
$$\overrightarrow{M_{Ay}} = \overrightarrow{AA} \wedge \overrightarrow{F_{Ay}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{F_{By}} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{F_{Cy}} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{F_{Dy}} + \overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{F_{Ey}} + \overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{F_{Fy}}$$

$$\overrightarrow{M_{Az}} = \overrightarrow{AA} \wedge \overrightarrow{F_{Az}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{F_{Bz}} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{F_{Cz}} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{F_{Dz}} + \overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{F_{Ez}} + \overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{F_{Fz}}$$

# I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

## I.1.2 *Propriété de transport d'un torseur d'un point à un autre*

Un torseur ***[T]*** étant connu en un point A, déterminons sa valeur en un point B.




$$\vec{M_B} = \vec{M_A} + \vec{BA} \wedge \vec{S}$$

## I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

### I.1.2 *Propriété de transport d'un torseur d'un point à un autre*

Soit le torseur :

$$[T]_A = \begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{V_i} \\ \vec{M_A} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \Lambda \vec{V_i} \end{cases}$$

et : $\vec{r_i} = \overrightarrow{AB_i}$ donc : $[T]_A = \begin{cases} \vec{R} = \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{V_i} \\ \vec{M_A} = \sum\limits_{i=1}^{n} \overrightarrow{AB_i} \Lambda \vec{V_i} \end{cases}$

Choisissons un point C où on veut écrire le torseur :

$$\vec{M_C} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{CB_i} \Lambda \vec{V_i} = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB_i}) \Lambda \vec{V_i} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{CA} \Lambda \vec{V_i} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AB_i} \Lambda \vec{V_i}$$

$$\vec{M_C} = \overrightarrow{CA} \Lambda \sum_{i=1}^{n} \vec{V_i} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AB_i} \Lambda \vec{V_i} = \overrightarrow{CA} \Lambda \vec{R} + \overrightarrow{\boldsymbol{M_A}}$$

$$\vec{M_C} = \vec{M_A} + \overrightarrow{CA} \Lambda \vec{R}$$

Cette expression est appelée **règle de transport des moments** (ou **distribution des moments**).

# I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

## I.1.2 *Propriété de transport d'un torseur d'un point à un autre*

$$[T]_A = \begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{V_i} \\ \vec{M}_A = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AB_i} \Lambda \vec{V_i} \end{cases} \Longrightarrow [T]_C = \begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{V_i} \\ \vec{M}_C = \vec{M}_A + \overrightarrow{CA} \Lambda \vec{R} \end{cases}$$

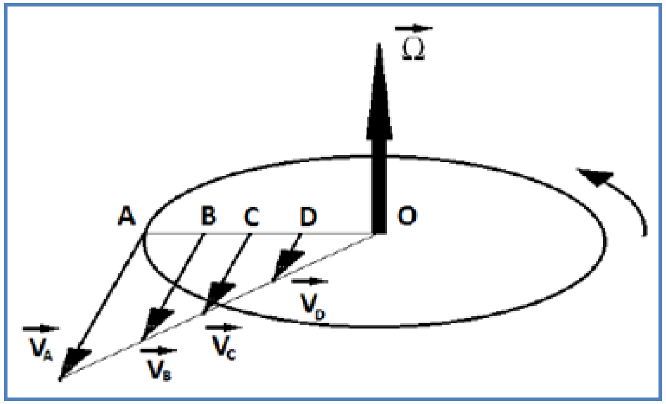
# I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

## I.1.2 *Propriété de transport d'un torseur d'un point à un autre*

**Exemple 1-4 :**

le **torseur cinématique** s'écrit :

$$[T_c]_A = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega} \\ \vec{V}_A \end{Bmatrix} \text{ ou } [T_c]_A = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_{Ax} \\ \omega_y & V_{Ay} \\ \omega_z & V_{Az} \end{Bmatrix}$$

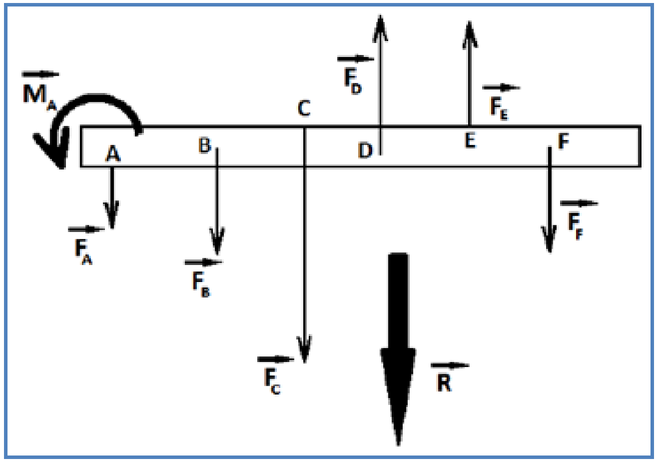



Pour deux points **A** et **B** la relation du torseur cinématique s'écrit :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{V_B}} = \overrightarrow{\boldsymbol{V_A}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BA}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}$$

le **torseur statique** s'écrit :

$$[T_s]_A = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix} \text{ ou } [\boldsymbol{T_s}]_A = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{R_x} & \boldsymbol{M_{Ax}} \\ \boldsymbol{R_y} & \boldsymbol{M_{Ay}} \\ \boldsymbol{R_z} & \boldsymbol{M_{Az}} \end{Bmatrix}$$




Pour deux points **A** et **B** la relation du torseur statique s'écrit :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{M_B}} = \overrightarrow{\boldsymbol{M_A}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BA}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{R}}$$

## I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

### I.1.2 *Propriété de transport d'un torseur d'un point à un autre*

**Exemple 1-5 :**

On reprend l'exemple 1-1 :

A(0,1,2) ; O(0,0,0) ; $[T]_O = \begin{Bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{Bmatrix}$

Déduire de $[T]_O$ le torseur $[T]_A$

**Solution :**

$$[T]_A = \begin{cases} \vec{\mathrm{R}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{V_i} \\ \overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_O} + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{R} \end{cases} = \begin{cases} \vec{\mathrm{R}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{V_i} \\ \overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_O} - \overrightarrow{OA} \wedge \vec{R} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

## I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

### I.1.2 *Propriété de transport d'un torseur d'un point à un autre*

**Exemple 1-5 :**

On reprend l'exemple 1-1 :

A(0,1,2) ; O(0,0,0) ; $[T]_O = \begin{Bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{Bmatrix}$

Déduire de $[T]_O$ le torseur $[T]_A$

**Solution :**

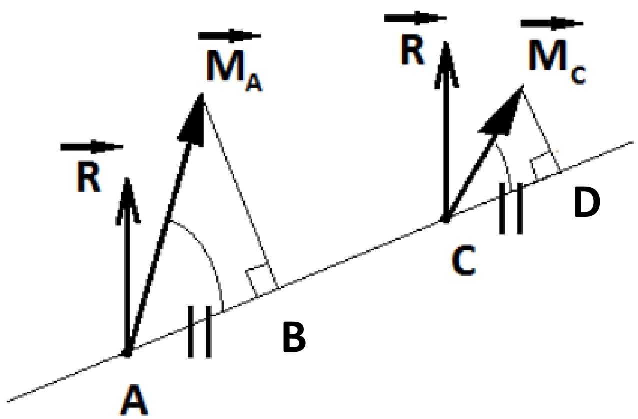
$$[T]_A = \begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{V_i} \\ \overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_O} + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{R} \end{cases} = \begin{Bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 4 \\ -1 & -3 \end{Bmatrix}$$

# I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

## I.1.3 *Propriété d'équiprojectivité des moments*

Soient 2 points A et C auxquels sont écrits les torseurs suivants :

$$[T]_A = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{cases} \quad \text{et} \quad [T]_C = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M}_C \end{cases}$$




On a : **AB = CD**

En forme vectorielle : $\overrightarrow{M_A} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{M_C} \bullet \overrightarrow{AC}$

**Rappel :**

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$$

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = \vec{B} \bullet \vec{A} = A_x.B_x + A_y.B_y + A_z.B_z$$

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = \vec{B} \bullet \vec{A} = A.B.\cos\theta$$

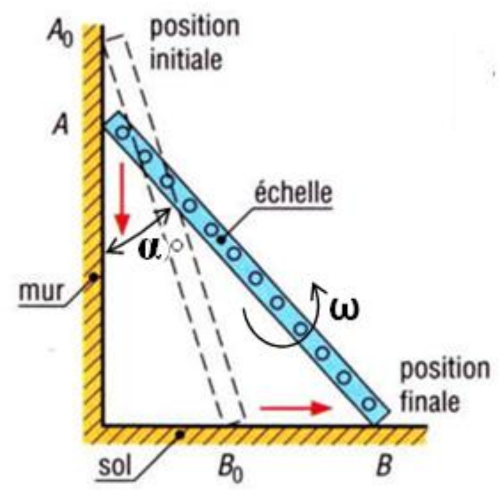
## I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

### I.1.3 *Propriété d'équiprojectivité des moments*

**Exemple 1-6 :**

L'échelle, de longueur $AB = 3\ m$, $\alpha = 30°$ , décrit un ***mouvement plan*** par rapport à l'ensemble (sol + mur), il glisse en $A$ (verticalement) avec une vitesse $\boldsymbol{V_A = 0,8\ m/s}$ et en $B$ (horizontalement) avec une vitesse $\boldsymbol{V_B}$ .

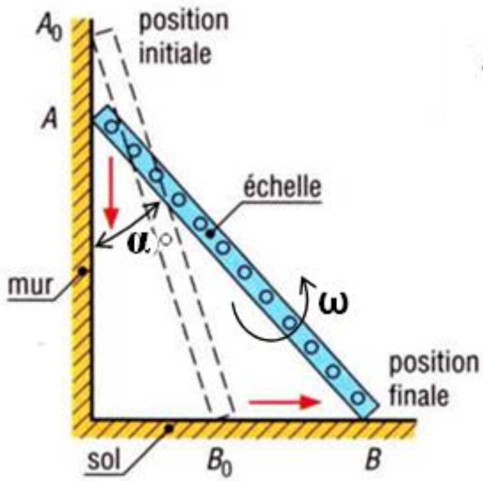
Trouver les deux torseurs cinématiques $[\boldsymbol{T}]_{\boldsymbol{A}}$ et $[\boldsymbol{T}]_{\boldsymbol{B}}$



# I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

## I.1.3 *Propriété d'équiprojectivité des moments*

**Exemple 1-6 :**




$$[T_c]_A = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_{Ax} \\ \omega_y & V_{Ay} \\ \omega_z & V_{Az} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}$$

$$[T_c]_B = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_{Bx} \\ \omega_y & V_{By} \\ \omega_z & V_{Bz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & V_{Bx} \\ 0 & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}$$

*Equiprojectivité des moments :*

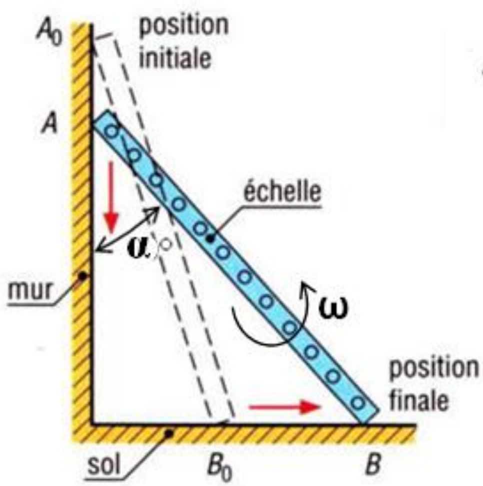
$$\overrightarrow{V_A} \bullet \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_B} \bullet \overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{V_A} = -0{,}5\,\vec{j} \quad ; \quad \overrightarrow{V_B} = V_{Bx}\,\vec{\imath} \quad ; \quad \overrightarrow{AB} = 3\,\sin 30°\,\vec{\imath} - 3\,\cos 30°\,\vec{j}$$

$$0{,}5\,.\;3\,.\cos 30° = V_{Bx}\,.3\,.\sin 30° \quad \Rightarrow \quad V_{Bx} = \frac{0{,}5\,.\cos 30°}{\sin 30°} = 0{,}866\ m/s$$

# I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

## I.1.3 *Propriété d'équiprojectivité des moments*

**Exemple 1-6 :**




$$[T_c]_A = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_{Ax} \\ \omega_y & V_{Ay} \\ \omega_z & V_{Az} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}$$

$$[T_c]_B = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_{Bx} \\ \omega_y & V_{By} \\ \omega_z & V_{Bz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & V_{Bx} \\ 0 & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}$$

*Règle de transport des moments :*

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega} \quad ; \quad \vec{\Omega} = \omega_z \, \vec{k} \quad ; \quad \overrightarrow{BA} = -3 \sin 30° \, \vec{i} + 3 \cos 30° \, \vec{j}$$

$$\overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega} = 3 \, . \cos 30° \, . \omega_z \, . \vec{i} + 3 \, . \sin 30° \, . \omega_z \, . \vec{j}$$

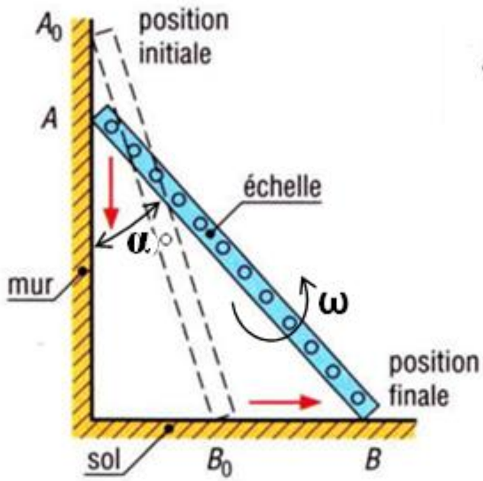
$$0{,}866 \, \vec{i} = -0{,}5 \, \vec{j} + 3 \, . \cos 30° \, . \omega_z \, . \vec{i} + 3 \, . \sin 30° \, . \omega_z \, . \vec{j}$$

$$0{,}866 \, \vec{i} = 3 \, . \cos 30° \, . \omega_z \, . \vec{i} + (-0{,}5 + 3 \, . \sin 30° \, . \omega_z \,) . \vec{j}$$

# I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

## I.1.3 *Propriété d'équiprojectivité des moments*

**Exemple 1-6 :**




$$[T_c]_A = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_{Ax} \\ \omega_y & V_{Ay} \\ \omega_z & V_{Az} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}$$

$$[T_c]_B = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_{Bx} \\ \omega_y & V_{By} \\ \omega_z & V_{Bz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & V_{Bx} \\ 0 & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}$$

*Règle de transport des moments :*

$$0{,}866\ \vec{i} = 3\,.\cos 30°\,.\omega_z\,.\vec{i} + (-0{,}5 + 3\,.\sin 30°\,.\omega_z\,).\vec{j}$$

donc :

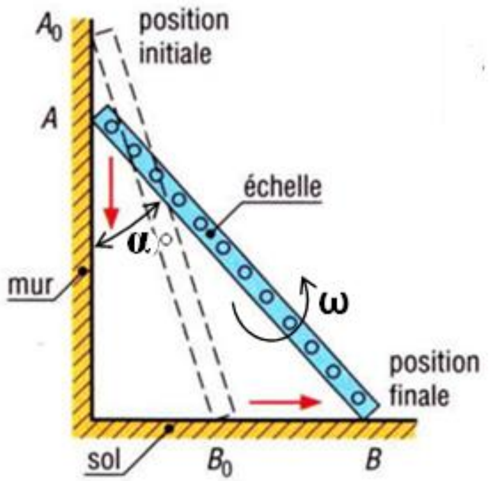
$$3\,.\cos 30°\,.\omega_z = 0{,}866 \quad \Rightarrow \quad \omega_z = \frac{0{,}866}{3\,.\,\cos 30°} = 0{,}333\ rad/s$$

$$-0{,}5 + 3\,.\sin 30°\,.\omega_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_z = \frac{0{,}5}{3\,.\,\sin 30°} = 0{,}333\ rad/s$$

# I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

## I.1.3 *Propriété d'équiprojectivité des moments*

**Exemple 1-6 :**




**alors :**

$$[T_c]_A = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_{Ax} \\ \omega_y & V_{Ay} \\ \omega_z & V_{Az} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 \\ 0{,}333 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$[T_c]_B = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_{Bx} \\ \omega_y & V_{By} \\ \omega_z & V_{Bz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & V_{Bx} \\ 0 & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0{,}866 \\ 0 & 0 \\ 0{,}333 & 0 \end{Bmatrix}$$

## I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

### I.1.4 *Opérations sur les torseurs*

a) $[T_1]_A = [T_2]_A \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{R}_2 \\ \vec{M}_{1A} = \vec{M}_{2A} \end{cases}$

b) $[T]_A = [T_1]_A + [T_2]_A \Rightarrow \begin{cases} \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{M}_A = \vec{M}_{1A} + \vec{M}_{2A} \end{cases}$

c) $[T_2]_A = \lambda[T_1]_A \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_2 = \lambda\vec{R}_1 \\ \vec{M}_{2A} = \lambda\vec{M}_{1A} \end{cases}$ ; $\boldsymbol{\lambda}$ : est un scalaire

d) $[T]_A = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_A = \vec{0} \end{cases}$

# I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

## I.1.5 *Torseurs particuliers*

### a) Torseur glisseur

Un torseur $[T]_A = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{cases}$ est glisseur si les éléments de réduction sont perpendiculaires $(\vec{R} \bullet \vec{M}_A = 0)$ et $\vec{R} \neq \vec{0}$

### b) Torseur couple

Un torseur $[T]_A = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{cases}$ est un couple si $\vec{R} = \vec{0}$ et $\vec{M}_A \neq \vec{0}$

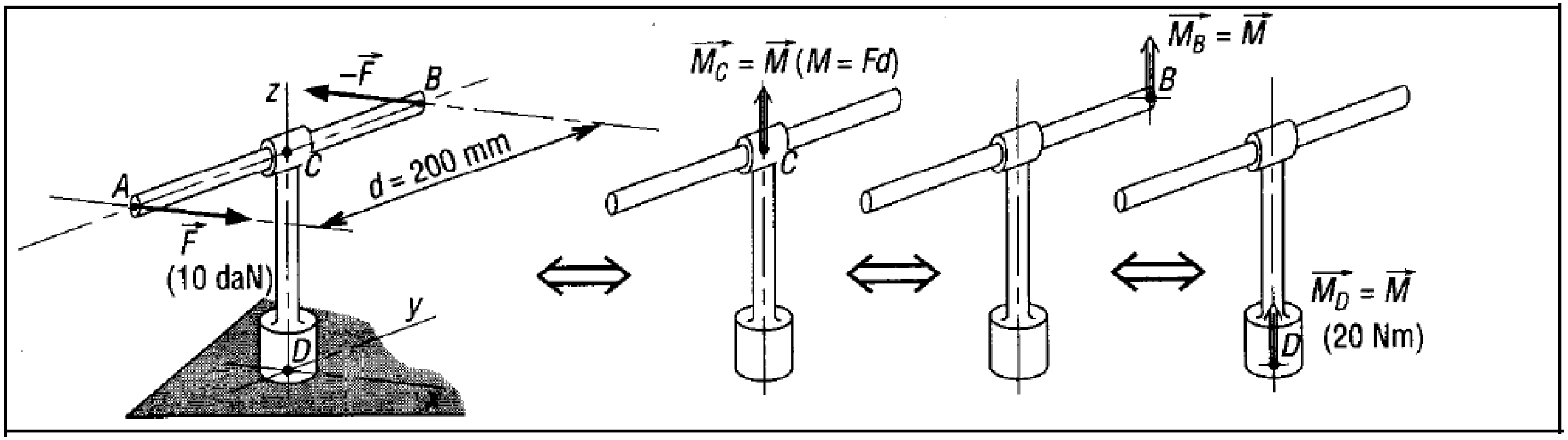
### b) Torseur nul

$$\forall \text{ le point } A : \qquad [T]_A = \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_A = \vec{0} \end{cases}$$

# I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

## I.1.5 *Torseurs particuliers*

### Exemple 1-7 : Torseur couple




L'ensemble des deux forces $\vec{F}$ et (- $\vec{F}$) est statiquement équivalent au couple $\vec{M_C} = \vec{M}$ en C de module M = $F$ . $d$' = 100 x 0,2 = 20 Nm. Le couple a même valeur en tout point de la clé $\vec{M_B} = \vec{M_D} = \vec{M_C} = \vec{M}$. Il en résulte que le couple de serrage exercé sur l'écrou en $D$ est $\vec{M}$ (20 Nm) d'axe z.

Le torseur couple s'écrit : {C} $= \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ 20\,\vec{k} \end{Bmatrix}$ en tout point.

# I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

## I.1.6 *Invariants d'un torseur*

On entend par un **invariant** toute **grandeur indépendante du lieu de calcul**, entre deux points quelconques **M** et **N** de l'espace, deux composantes du torseur sont conservées, qui constituent les deux invariants du torseur :

**a.** Premier invariant : la résultante ( $\vec{R}$ ) ;

**b.** Second invariant : la projection du moment du torseur sur sa résultante ( $\mathbf{A_m(T)}$ ) .

### a) Invariant vectoriel : Résultante

La résultante $\vec{R}$ ne dépend d'aucun point donc c'est un invariant

### b) Invariant scalaire : Automoment

L'automoment est le produit scalaire des éléments de réduction c.à.d. :

$$\forall \; M, N : \quad A_m(T) = \vec{R} \bullet \vec{M}_M = \vec{R} \bullet \vec{M}_N$$

# I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

## I.1.7 *Produit de deux torseurs* (Comoment)

Le comoment $C_m$ (appelé aussi le produit) de deux torseurs est indépendant du point du point où l'on prend les éléments de réduction des torseurs et il est calculé de la façon suivante :

$$\forall \ M : \qquad C_m = \vec{R}_1 \cdot \vec{M}_{2(M)} + \vec{R}_2 \cdot \vec{M}_{1(M)}$$

# I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

## I.1.8 *Axe, point et moment central d'un torseur*

L'**axe central** du torseur est l'ensemble des points **P** , constituant la droite ( $\Delta$ ), pour lesquels la condition suivante est satisfaite :

$$\overrightarrow{M_P} \,//\, \vec{R} \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{M_P} = \lambda\, \vec{R} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

***donc :***

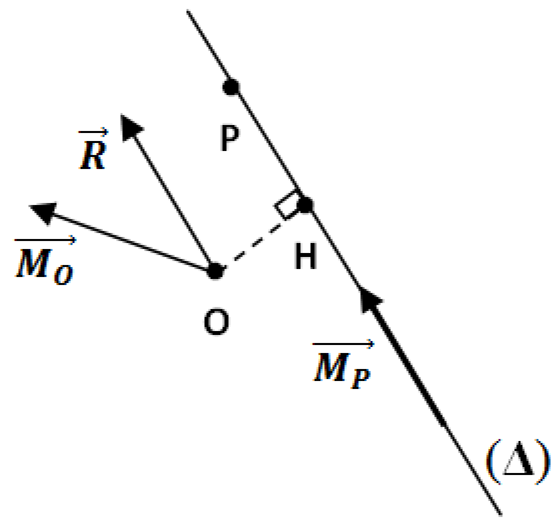
$$\vec{R} \wedge \overrightarrow{M_P} = \vec{0}$$

***alors :***

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{M_O}}{R^2}$$

***et***

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{M_O}}{R^2} + \lambda\, \vec{R}$$



# I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

## I.1.8 *Axe, point et moment central d'un torseur*

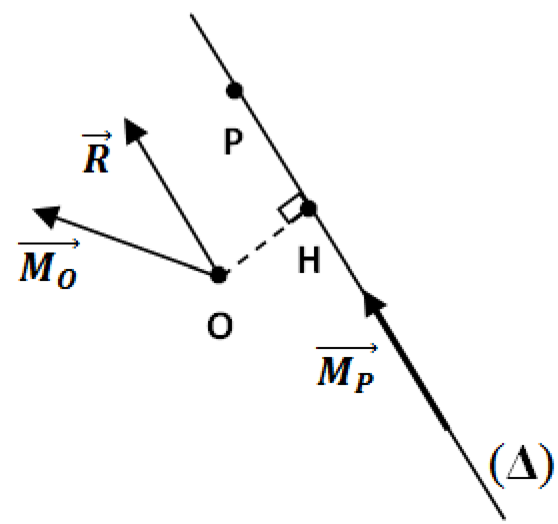
**P** : appelé **point central** où le moment du torseur à la même direction que la résultante ;

**OH** : représente la distance minimale entre le point **O** et l'axe $(\Delta)$ .

$$\overrightarrow{M_P} = \lambda \vec{R} \qquad \vec{R} \wedge \overrightarrow{M_P} = \vec{0} \qquad \overrightarrow{OH} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{M_O}}{R^2} \qquad \overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{M_O}}{R^2} + \lambda \vec{R}$$

$\overrightarrow{M_P}$ : est **moment central**, c'est le moment du torseur en un point quelconque **P** de son axe central **(Δ)**.

La **norme** $\|\overrightarrow{M_P}\|$ du moment d'un torseur est **minimale** pour les points centraux. Par conséquent si le moment d'un torseur est nul en un point, ce point appartient à l'axe central. L'axe central se définit alors à l'aide de ce point et de la résultante.

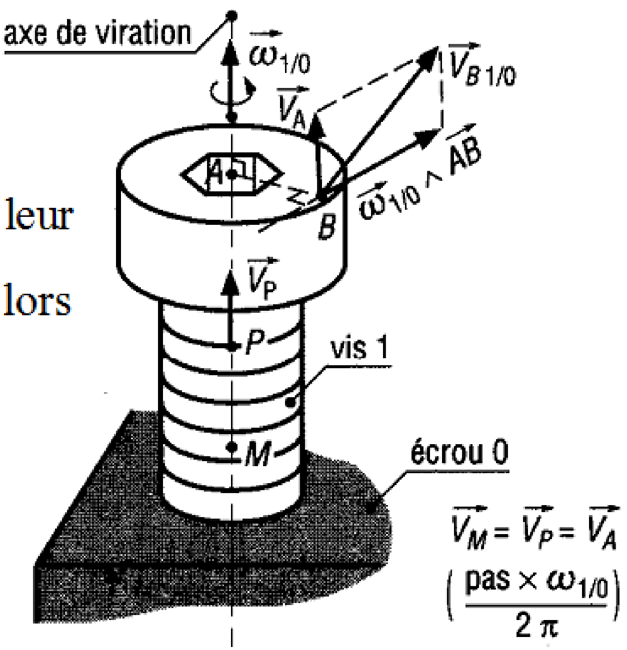


# I.1 Notion du torseur et ses caractéristiques

## I.1.8 *Axe central d'un torseur*

**Exemple 1-8 : Système vis-écrou**

$\overrightarrow{V_p}$ est colinéaire à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ du solide, leur mouvement peut être comparé à celui d'un tournevis lors d'une opération de vissage ou de dévissage .



## I.2 Définitions et hypothèses

### I.2.1 Hypothèses

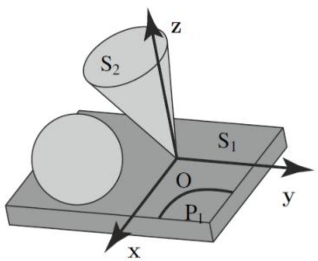
Dans tout ce cours (Théorie de mécanisme), nous considérerons que :

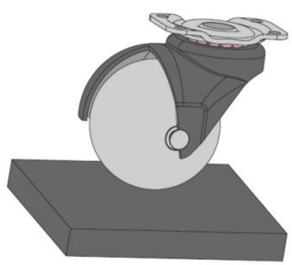
- Les pièces sont **indéformables** ;
- Les liaisons mécaniques entre les solides sont considérées comme **parfaites** (sans jeu et sans frottement) : les contacts sont maintenus ;
- Le contact s'établit théoriquement en un **point**, une portion de **ligne** ou d'une **surface** ;
- Les surfaces de contact, appelées **surfaces fonctionnelles**, sont supposées géométriquement parfaites ;
- Les **effets dynamiques** sur l'ensemble des pièces sont **négligés**, de telle sorte que le principe fondamental de la statique puisse s'appliquer.

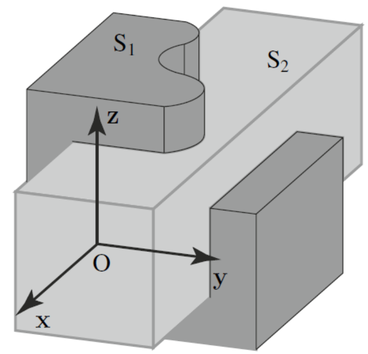
## I.2 Définitions et hypothèses

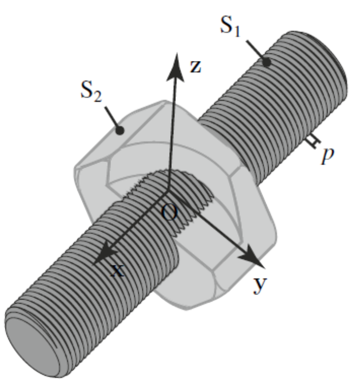
### I.2.2 Définitions

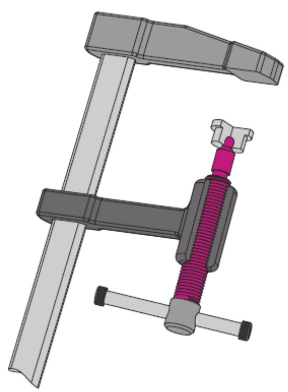
**a. Une liaison** (ou un couple cinématique) est un assemblage de deux éléments se trouvant en contact permanent est susceptibles d'un mouvement relatif.

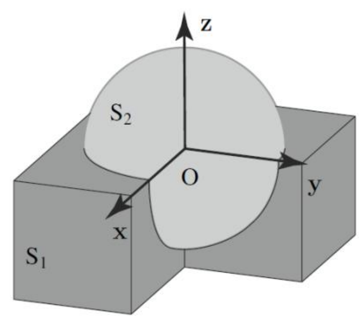


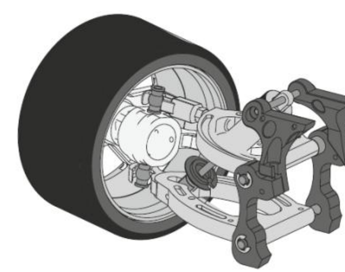





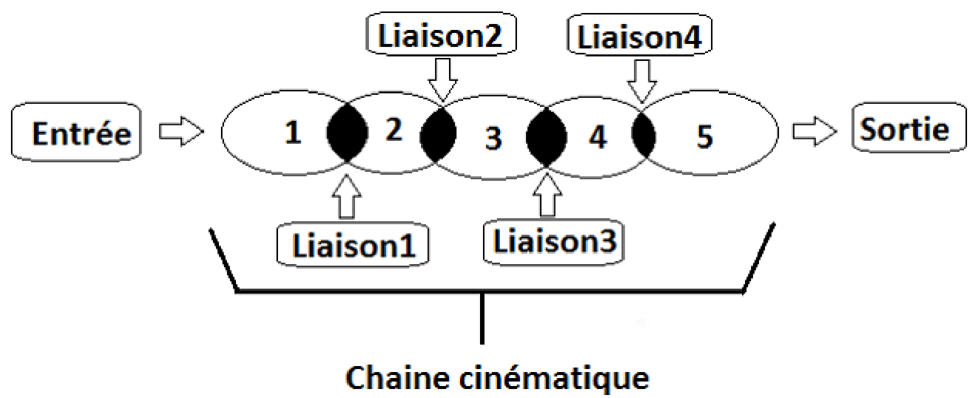


## I.2 Définitions et hypothèses

### I.2.2 Définitions

**b. Une chaine cinématique** est tout simplement l'ensemble de solides liés de telle façon que le mouvement entrant se transmet d'un solide à un autre jusqu'au dernier élément par lequel sort le mouvement.

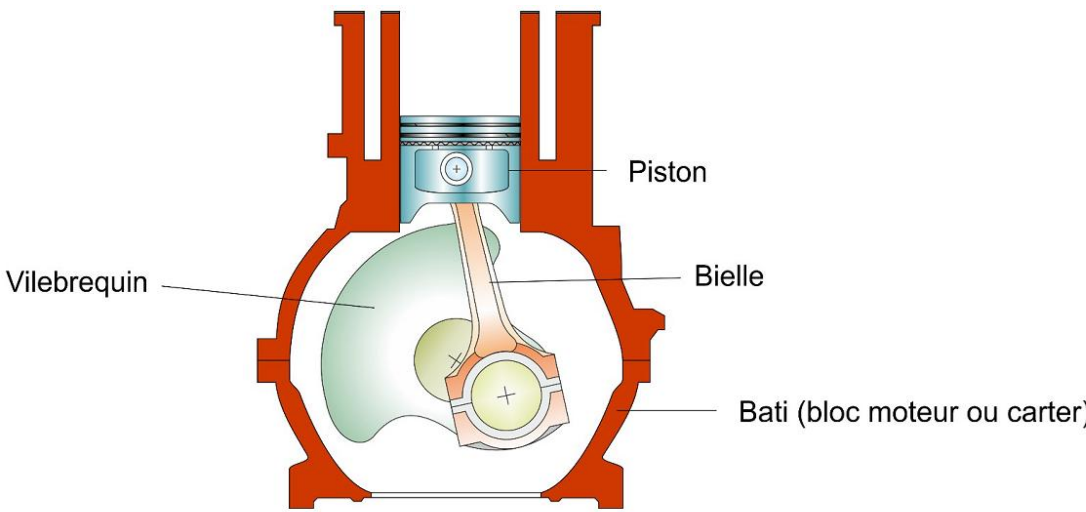


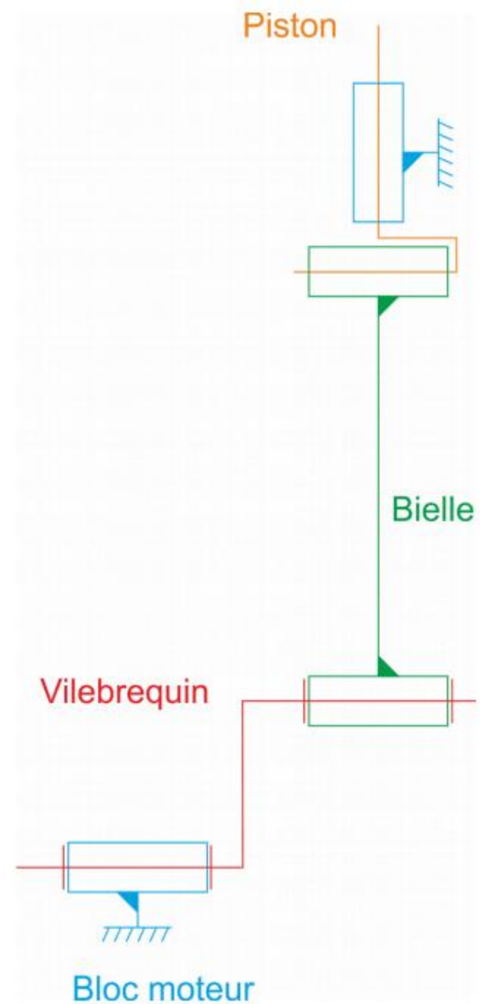
## I.2 Définitions et hypothèses

**Exemple de chaîne cinématique**

**Système bielle manivelle**

**vilebrequin + bielle + piston**



## I.2 Définitions et hypothèses

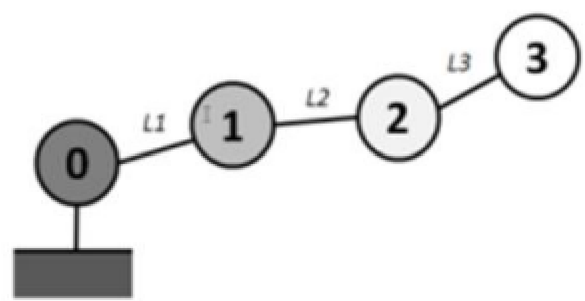
### I.2.2 Définitions

**b. Une chaine cinématique** est tout simplement l'ensemble de solides liés de telle façon que le mouvement entrant se transmet d'un solide à un autre jusqu'au dernier élément par lequel sort le mouvement.

On distingue trois types de chaînes : chaîne ouverte, chaîne fermée et chaîne complexe :

**Chaîne ouverte :**

On appelle une chaîne ouverte une chaîne de ***n*** solides assemblés par ***n-1*** liaisons en série. Les solides sont reliés deux par deux par une liaison simple, le premier solide est le **bâti** (ou le support).

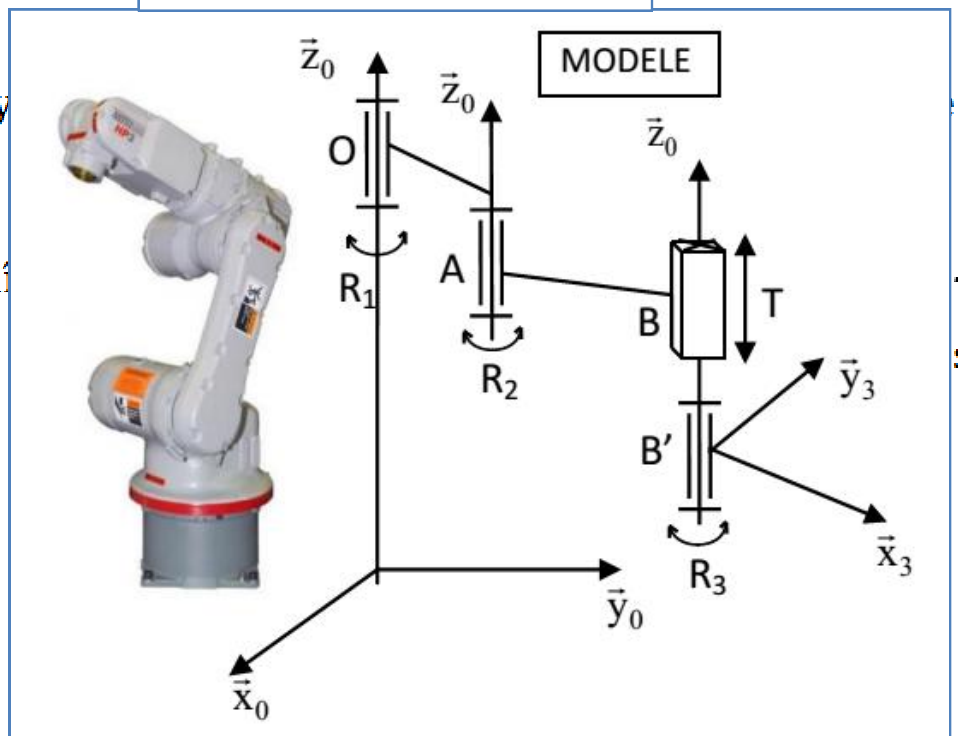


## I.2 Définitions et hypothèses

### I.2.2 Définitions

**b. Une chaine cinématique** est tout simplement l'ensemble de solides liés de telle façon que le mouvement entrant se transmet d'un solide à un autre jusqu'au dernier élément par lequel sort le mouvement.

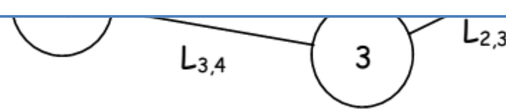
Exemple : bras de robot




On distingue trois ty … et chaîne complexe :

**Chaîne ouverte :**

On appelle une chaî … *-1* liaisons en série. Les solides sont reliés … solide est le **bâti** (ou le support).



## I.2 Définitions et hypothèses

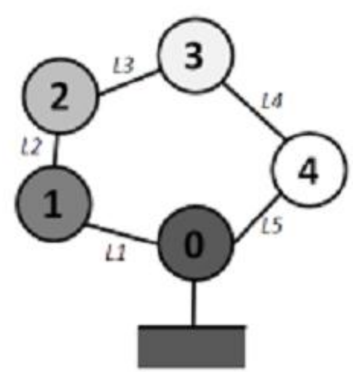
### I.2.2 Définitions

**b. Une chaine cinématique** est tout simplement l'ensemble de solides liés de telle façon que le mouvement entrant se transmet d'un solide à un autre jusqu'au dernier élément par lequel sort le mouvement.

On distingue trois types de chaînes : chaîne ouverte, chaîne fermée et chaîne complexe :

**Chaîne fermée :**

On appelle une chaîne fermée une chaîne de $n$ solides assemblés par $n$ liaisons. Le **premier** et le **dernier** élément de la chaîne ont une laissions **entre eux** : Le mécanisme "reboucle" sur le même solide.

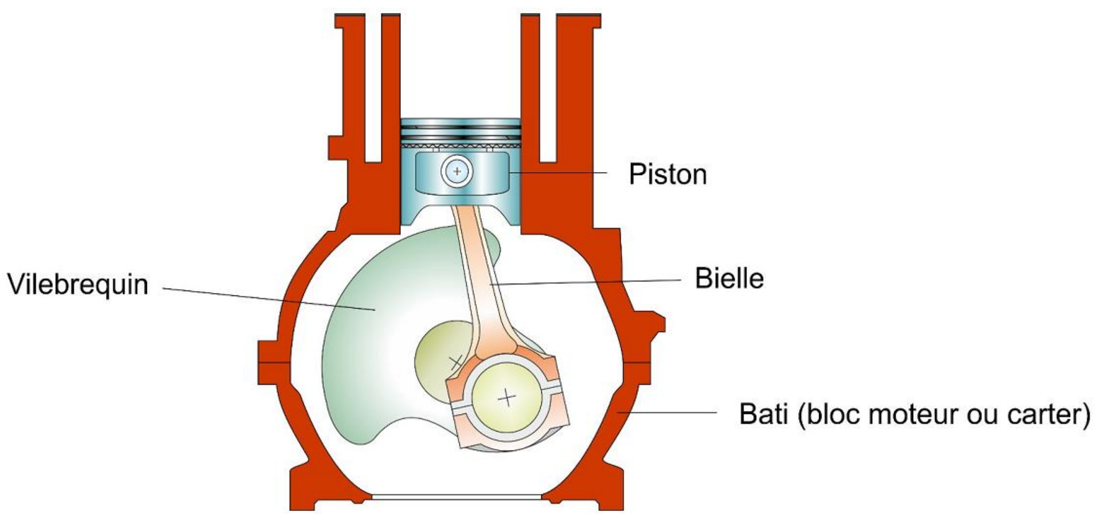


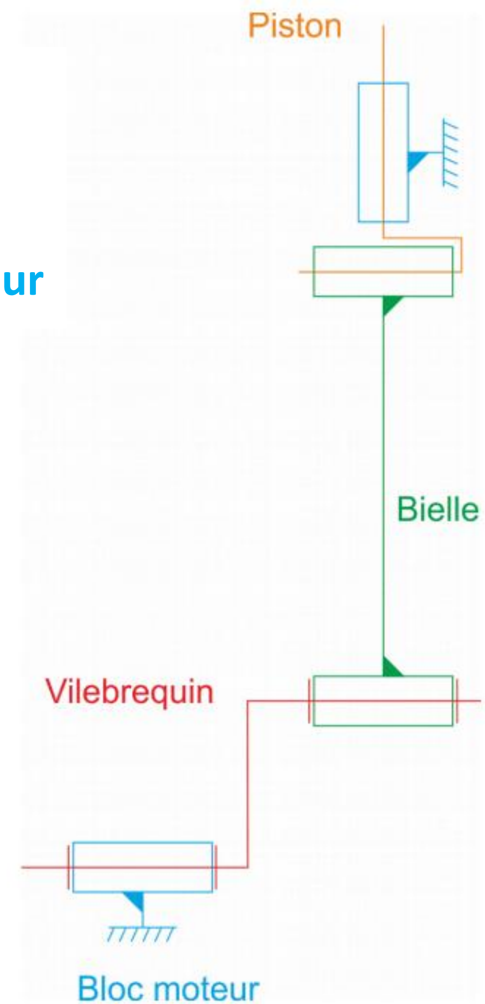
## I.2 Définitions et hypothèses

**Exemple de chaîne fermée**

**Système bielle manivelle**

**Bloc moteur + vilebrequin + bielle + piston + Bloc moteur**



## I.2 Définitions et hypothèses

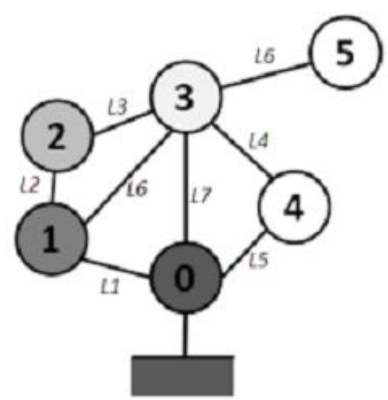
### I.2.2 Définitions

**b. Une chaine cinématique** est tout simplement l'ensemble de solides liés de telle façon que le mouvement entrant se transmet d'un solide à un autre jusqu'au dernier élément par lequel sort le mouvement.

On distingue trois types de chaînes : chaîne ouverte, chaîne fermée et chaîne complexe :

**Chaîne complexe :**

On appelle une chaîne complexe une chaîne de $n$ solides assemblés par $m$ liaisons (tel que, $m > n$). Elle est constituée de plusieurs chaînes fermées et plus de deux éléments sont reliés au bâti.



## I.2 Définitions et hypothèses

### I.2.2 Définitions

**b. Une chaine cinématique** est tout simplement l'ensemble de solides liés de telle façon que le mouvement entrant se transmet d'un solide à un autre jusqu'au dernier élément par lequel sort le mouvement.

**Exemple : Plate forme élévatrice**

On distingue trois types de ... ée et chaîne complexe :

**Chaîne complexe :**

On appelle une chaîne co ... és par $m$ liaisons (tel que, $m > n$). Elle est constitué ... deux éléments sont reliés au bâti.

## I.2 Définitions et hypothèses

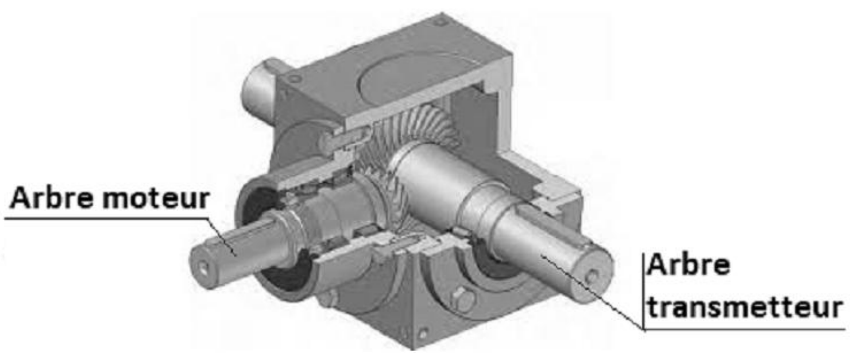
### I.2.2 Définitions

**c. Un mécanisme** est un ensemble de corps liés entre eux par des liaisons pour former une chaîne cinématique et avec un élément fixe appelé **bâti**, donc :

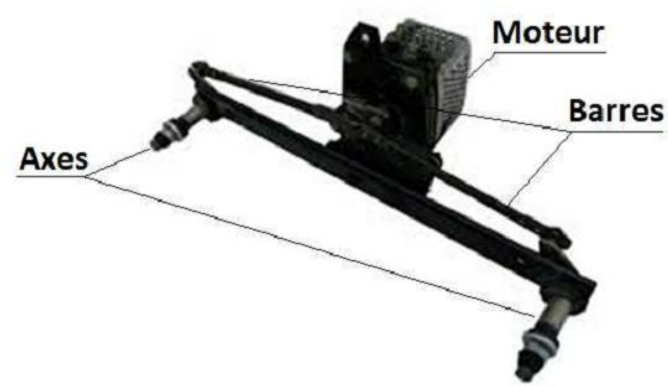
*Une chaîne cinématique dont,* ***au moins****, un de ses éléments est relié à un bâti forme un mécanisme*

Un mécanisme est destiné à **transmettre** ou à **transformer** du mouvement.

**Renvoi d'angle :** Transmission du mouvement de l'arbre moteur à l'arbre transmetteur.




**Mécanisme d'essuie glace :** Mécanisme qui transforme le mouvement de rotation continu en mouvement de rotation alternatif



## I.2 Définitions et hypothèses

### I.2.2 Définitions

**c. Un mécanisme** est un ensemble de corps liés entre eux par des liaisons pour former une chaîne cinématique et avec un élément fixe appelé **bâti**, donc :

*Une chaîne cinématique dont,* ***au moins****, un de ses éléments est relié à un bâti forme un mécanisme*

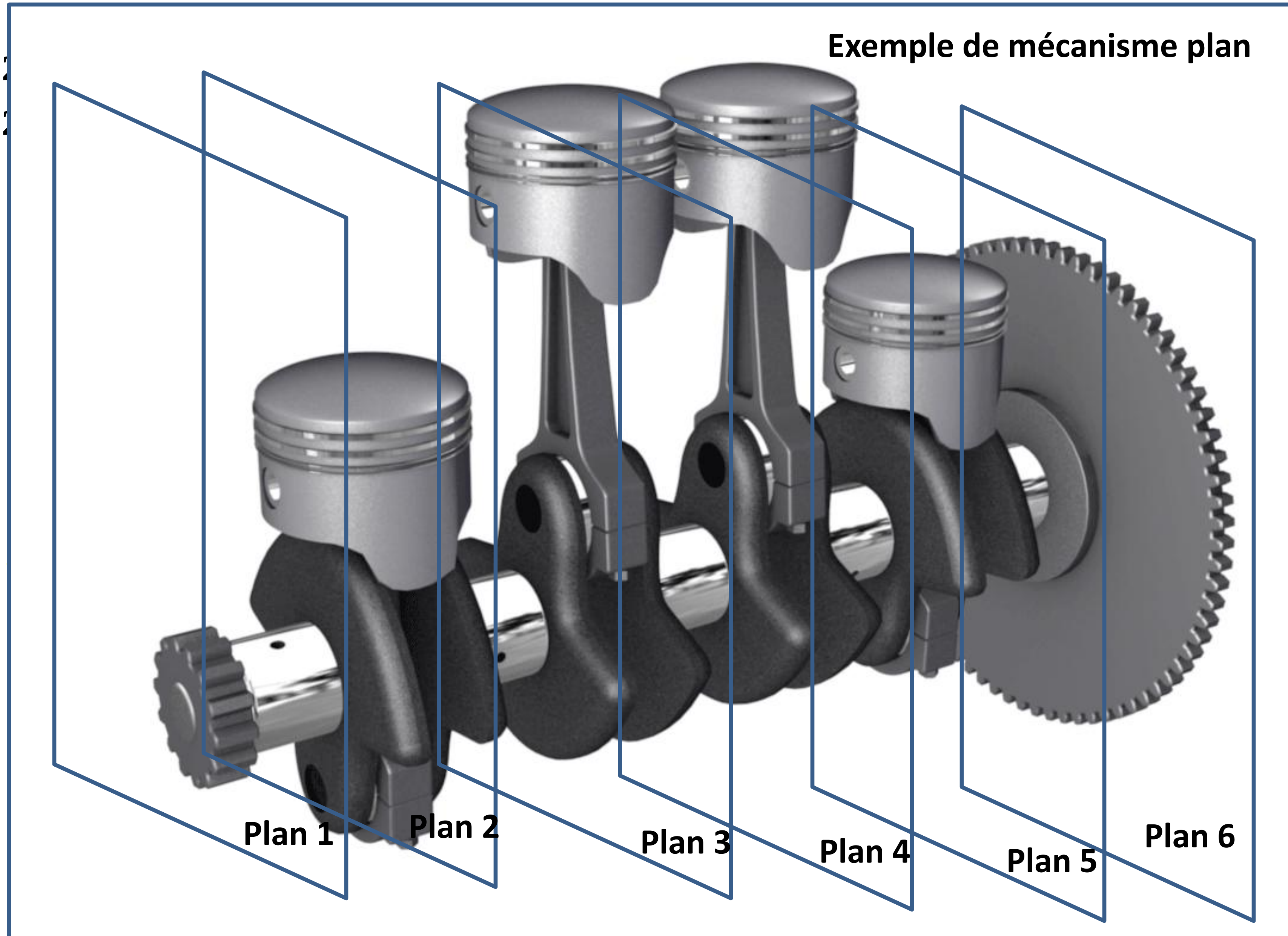
Un mécanisme est destiné à **transmettre** ou à **transformer** du mouvement.

Selon la **nature** des mouvements produits par un mécanisme, on distingue **trois** types de mécanisme : **plan**, **sphérique** ou **spatial** :

**Mécanismes plans :** Un mécanisme est dit plan si les trajectoires de tous les points des éléments mobiles se trouvent dans un même plan ou dans des plans parallèles.

**I.2**

**I.2**




ne

de

des

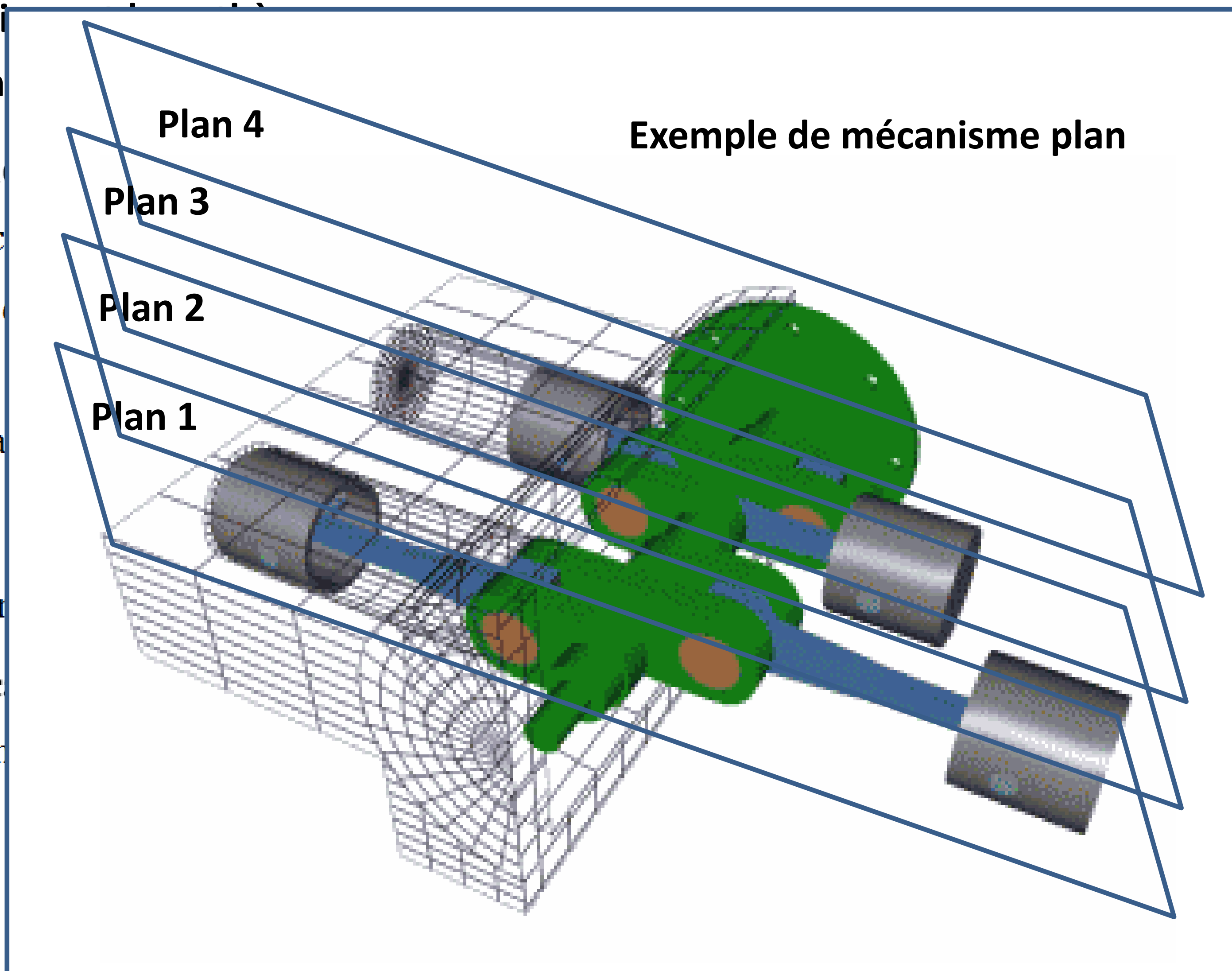
## I.2 Définiti

### I.2.2 Défin

**c. Un m** ormer une

chaîne c

*Une* *rme un*




Un méca

Selon la s types de

mécanism

**Méc** points des

élém

## I.2 Définitions et hypothèses

### I.2.2 Définitions

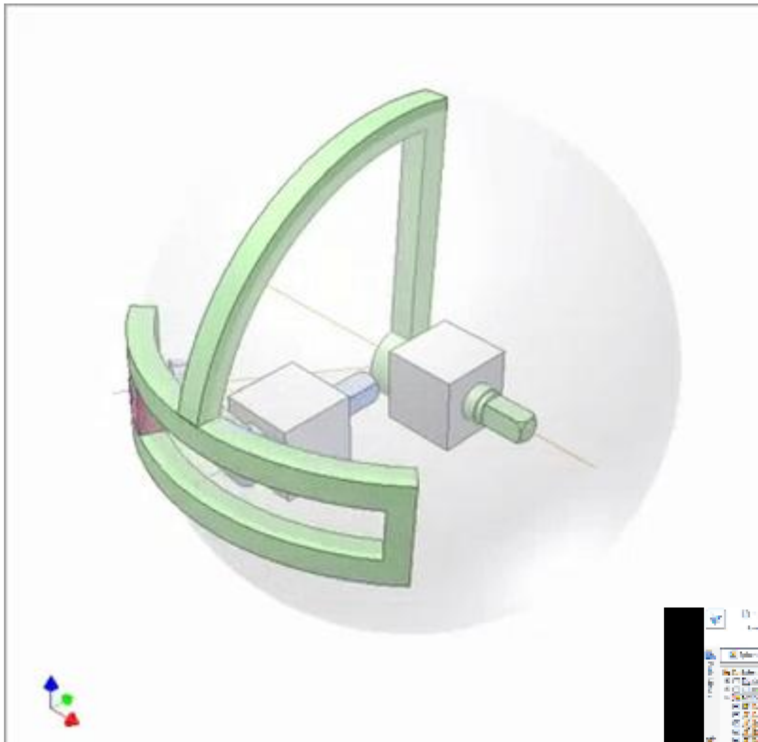
**c. Un mécanisme** est un ensemble de corps liés entre eux par des liaisons pour former une chaîne cinématique et avec un élément fixe appelé **bâti**, donc :

*Une chaîne cinématique dont, **au moins**, un de ses éléments est relié à un bâti forme un mécanisme*

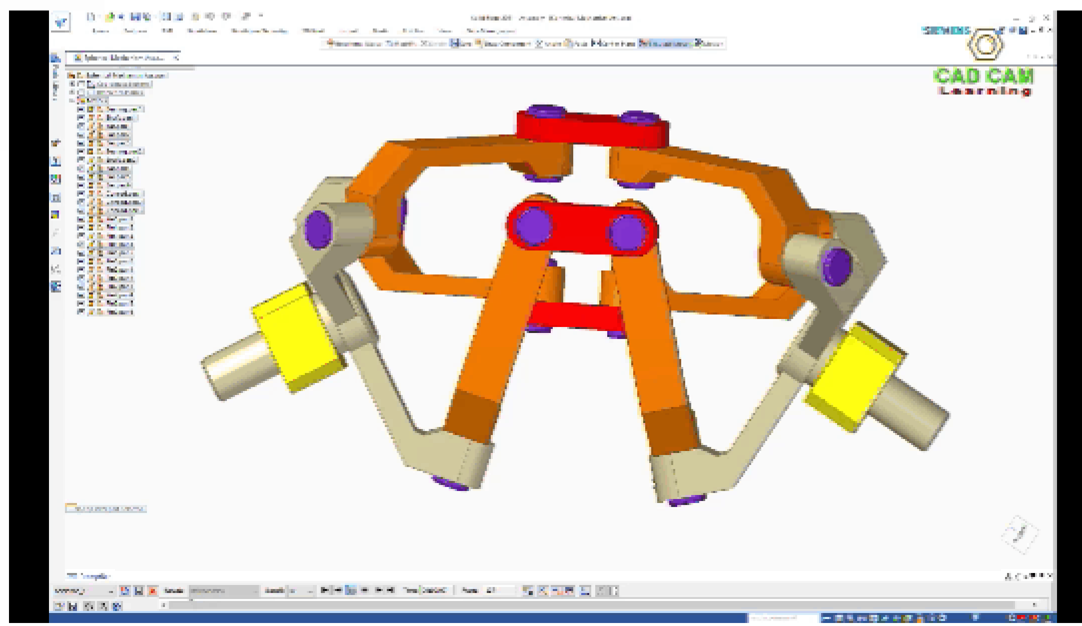
Un mécanisme est destiné à **transmettre** ou à **transformer** du mouvement.

Selon la **nature** des mouvements produits par un mécanisme, on distingue **trois** types de mécanisme : **plan**, **sphérique** ou **spatial** :

**Mécanismes sphériques :** Un mécanisme est dit sphérique lorsque les points des éléments mobiles ont des trajectoires se trouvant sur des sphères concentriques.



**Exemple de mécanisme sphérique**



## I.2 Définitions et hypothèses

### I.2.2 Définitions

**c. Un mécanisme** est un ensemble de corps liés entre eux par des liaisons pour former une chaîne cinématique et avec un élément fixe appelé **bâti**, donc :

*Une chaîne cinématique dont, **au moins**, un de ses éléments est relié à un bâti forme un mécanisme*

Un mécanisme est destiné à **transmettre** ou à **transformer** du mouvement.

Selon la **nature** des mouvements produits par un mécanisme, on distingue **trois** types de mécanisme : **plan**, **sphérique** ou **spatial** :

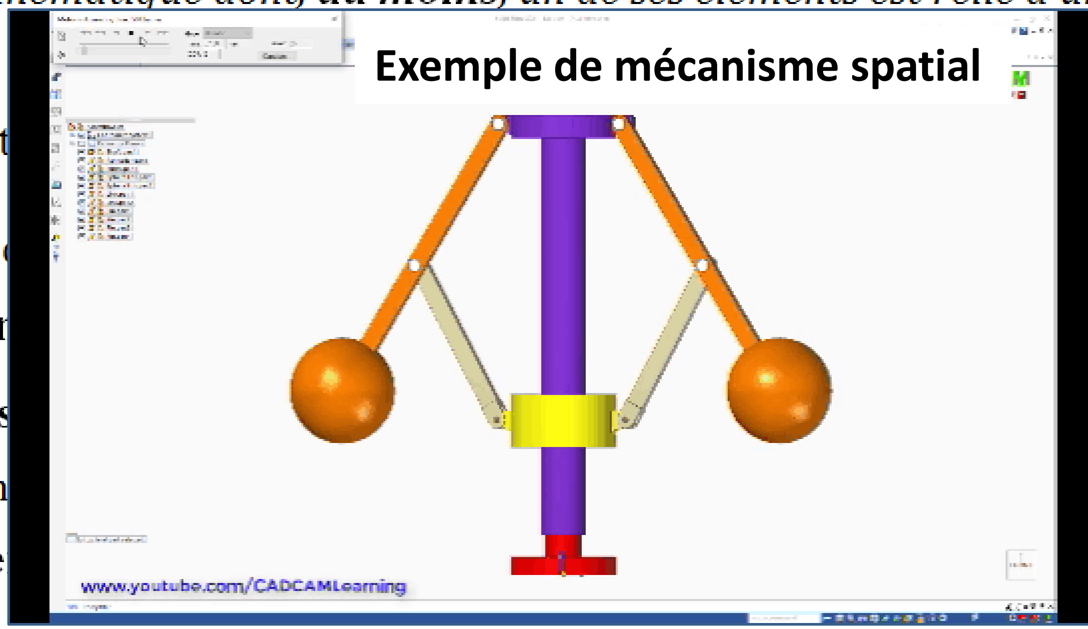
**Mécanismes spatiaux :** Un mécanisme est dit spatial **(3D)** si au moins un élément a des points qui ont des **trajectoires dans l'espace** avec la remarque que les axes des articulations **ne se coupent pas.**

## I.2 Définitions et hypothèses

### I.2.2 Définitions

**c. Un mécanisme** est un ensemble de corps liés entre eux par des liaisons pour former une chaîne cinématique et avec un élément fixe appelé **bâti**, donc :

*Une chaîne cinématique dont, **au moins**, un de ses éléments est relié à un bâti forme un*




Un mécanisme est

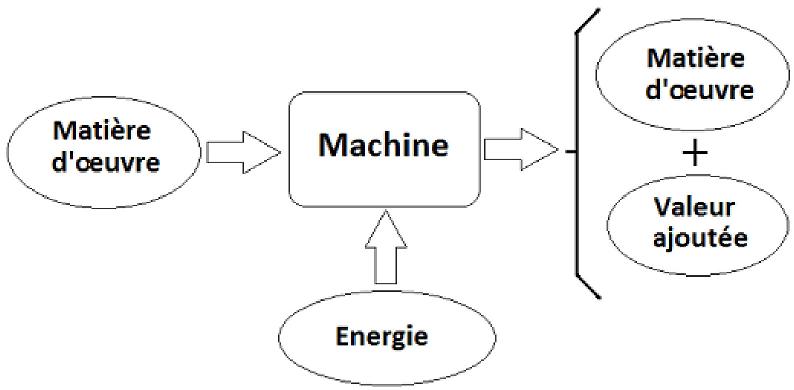
Selon la **nature** … ue **trois** types de mécanisme : **pla**

**Mécanismes** … un élément a des points qui on … es des articulations **ne se coupe**

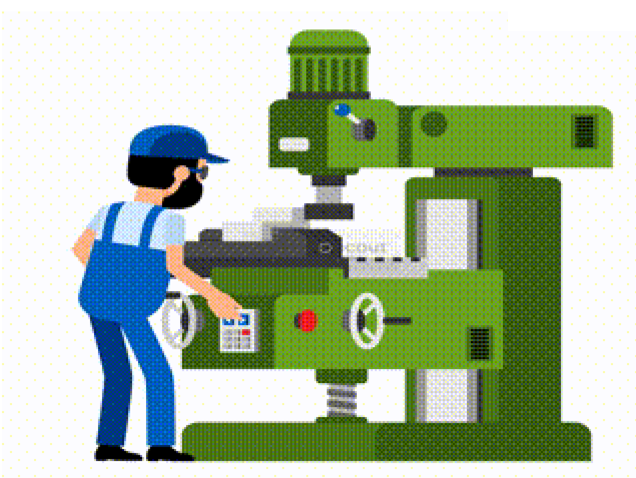
## I.2 Définitions et hypothèses

### I.2.2 Définitions

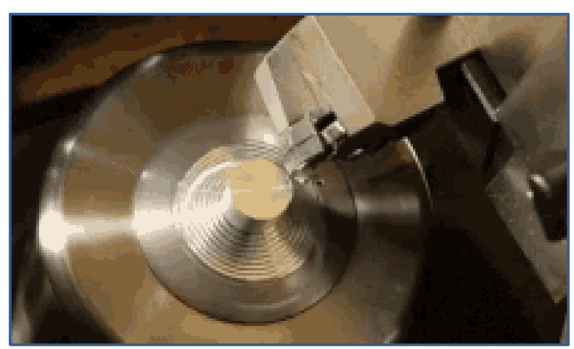
**d. Machine** est un assemblage de pièces permettant d'exercer un travail sur une matière d'œuvre (outil, matière à façonner, charge à déplacer, ...) en utilisant une source d'énergie.



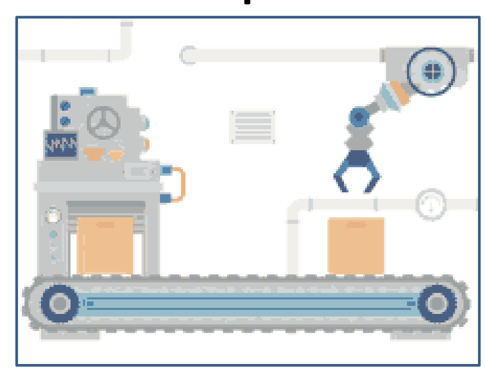

Fraiseuse



Tour



Machine dans une chaîne de production



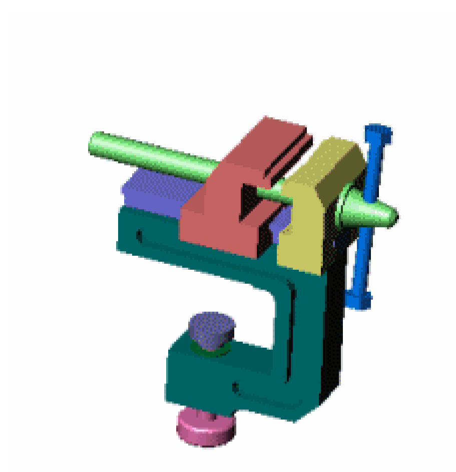
# I.2 Définitions et hypothèses

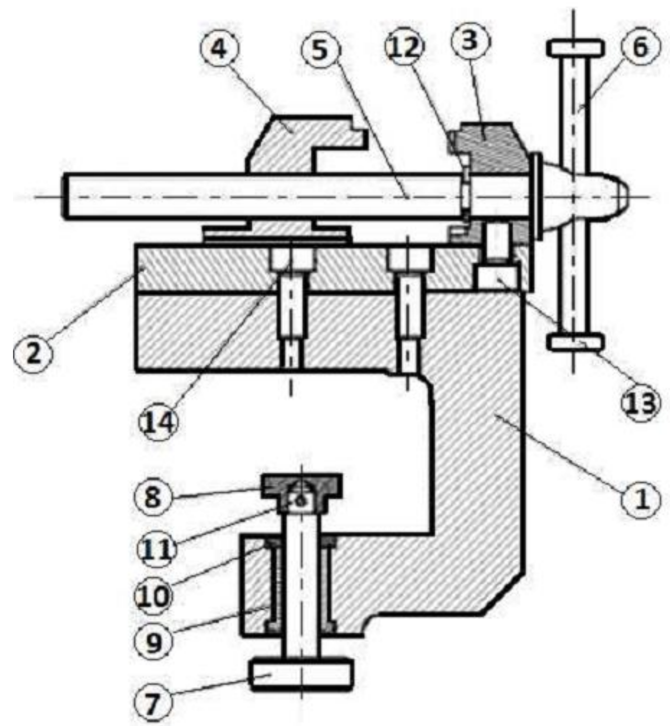
## I.2.2 Définitions

**e. Elément fixe ou bâti**, dans une machine (*ou un mécanisme*), les pièces fixes constituent un système rigide et immobile qu'on appelle **bâti**, celui-ci joue le rôle en quelque sorte d'un mur sur lequel sont suspendues les liaisons. En plus de ça le bâti est considéré comme **pièce de référence**.

**Exemple : Etau**

Les pièces 1, 2, 3, 9, 10, 13 et 14 sont fixes, elles constituent le bâti.

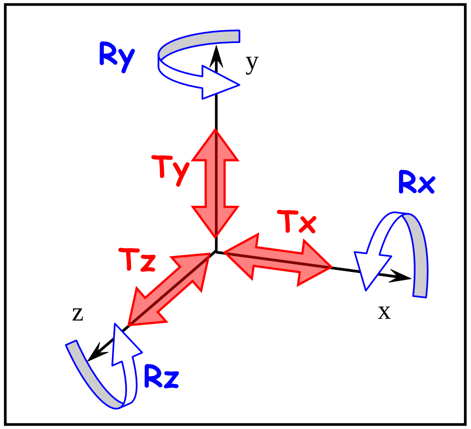




## I.3 *Liaisons usuelles*

### I.3.1. Degré de liberté DDL

Un solide libre dans l'espace possède **6** degrés de liberté : **3 translations** et **3 rotations**.




Mais dans un **système mécanique** le nombre de ses degrés de liberté sera limité par les liaisons qu'il entretient avec les autres pièces du système.

Du point de vue statique :

Manque de translation ⟹ Présence de force

Manque de rotation ⟹ Présence d'un moment

Du point de vue cinématique :

Présence de translation ⟹ Vitesse linéaire

Présence de rotation ⟹ Vitesse angulaire

## I.3 *Liaisons usuelles*

### I.3.2. *Torseur associé à une liaison*

a) Torseur cinématique :

Soit le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$ et le vecteur vitesse linéaire $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$

**Le torseur cinématique est :**

$$\vartheta_O = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega} \\ \vec{V} \end{Bmatrix} \text{ ou } \vartheta_0 = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{Bmatrix}$$

b) Torseur statique

Au point de contact s'appliquent des forces et des moments de réaction

$\vec{R}_{2/1} = \vec{R} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix}$ et $\vec{M}_{2/1} = \vec{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$

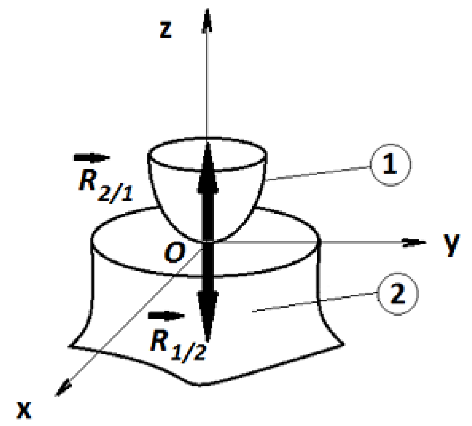
**Le torseur statique est :**

$$\tau_O = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M} \end{Bmatrix} \text{ ou } \tau_0 = \begin{Bmatrix} R_x & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{Bmatrix}$$

## I.3 *Liaisons usuelles*

### I.3.2. *Torseur associé à une liaison*

**Exemple 1-9 : *La liaison ponctuelle***




Considérons la liaison ponctuelle 1/2 (figure ci-contre). Suivant les trois axes on a 3 rotations et suivant les axes Ox et Oy on a 2 translations, la translation suivant Oz est absente à cause de la réaction $\vec{R}_{2/1}$.

**donc :** Le torseur cinématique associé à cette liaison :

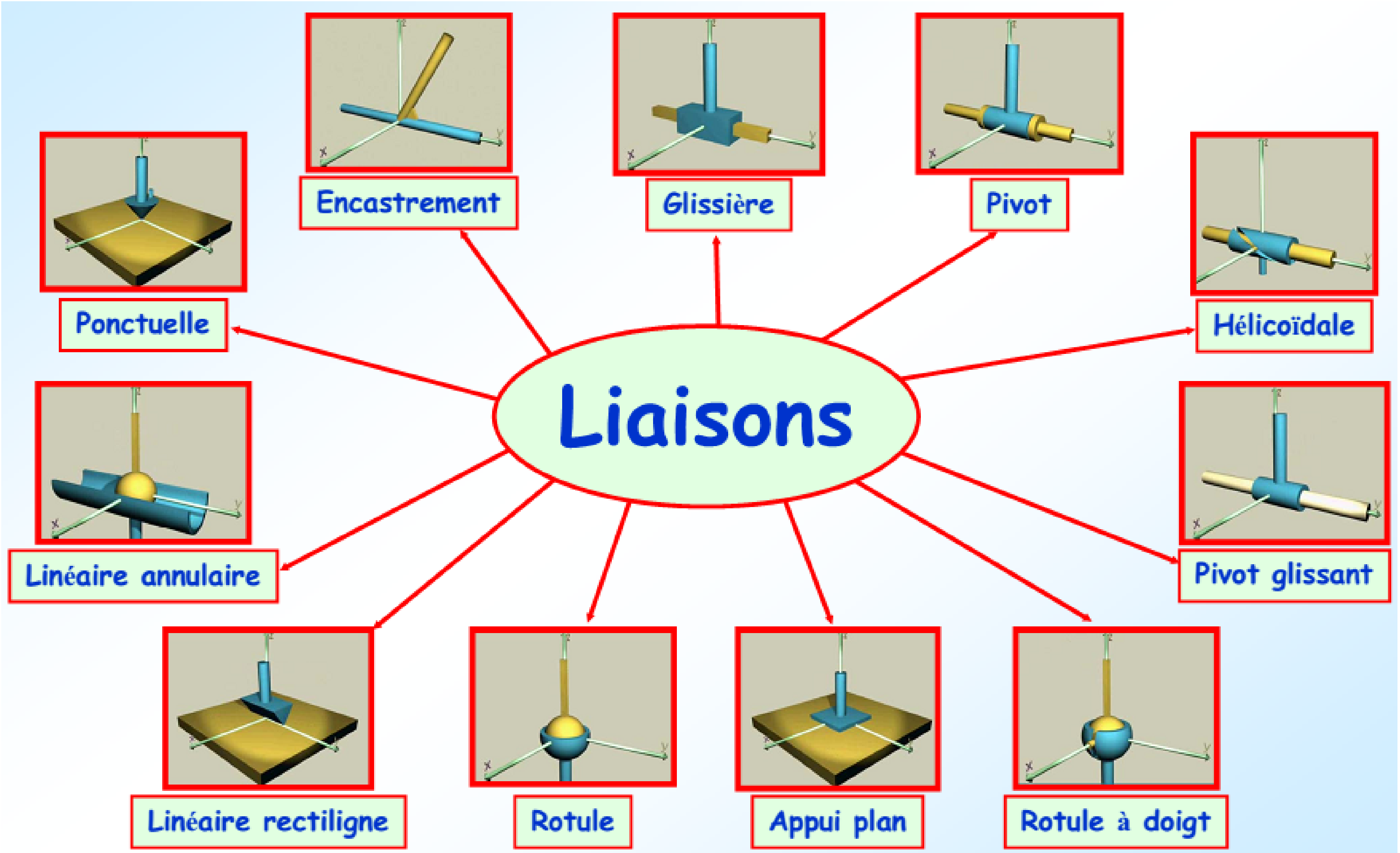
$$\vartheta_O = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega} \\ \vec{V} \end{Bmatrix} \text{ ou } \vartheta_O = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}$$

**et :** Au point de contact, le torseur statique s'écrit :

$$\tau_O = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M} \end{Bmatrix} \text{ ou } \tau_O = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_z & 0 \end{Bmatrix}$$

## I.3 *Liaisons usuelles*

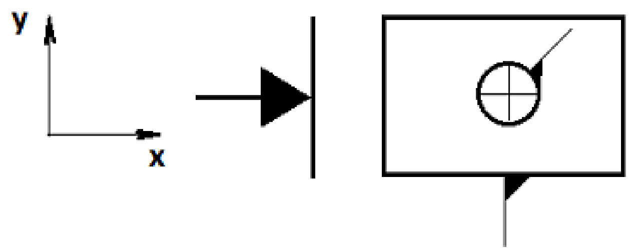
### I.3.3. *Liaisons élémentaires*

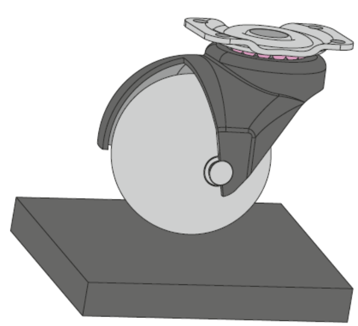


## I.3 *Liaisons usuelles*

### I.3.3. *Liaisons élémentaires*

Les liaisons élémentaires sont obtenues par contact entre des surfaces géométriques élémentaires appartenant à **deux** pièces :

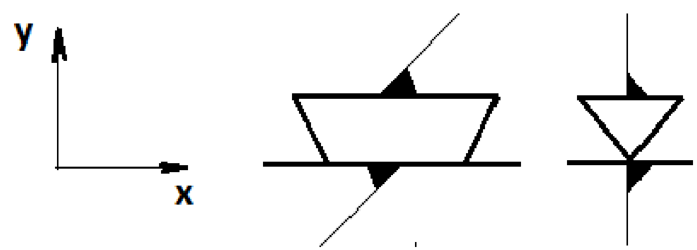
| Liaison | Schéma | Torseur statique | Torseur cinématique |
|---|---|---|---|
| Ponctuelle |  | $\tau_O = \begin{Bmatrix} R_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$ | $\vartheta_O = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{Bmatrix}$ |

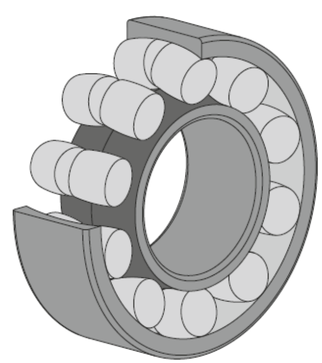


## I.3 *Liaisons usuelles*

### I.3.3. *Liaisons élémentaires*

Les liaisons élémentaires sont obtenues par contact entre des surfaces géométriques élémentaires appartenant à **deux** pièces :

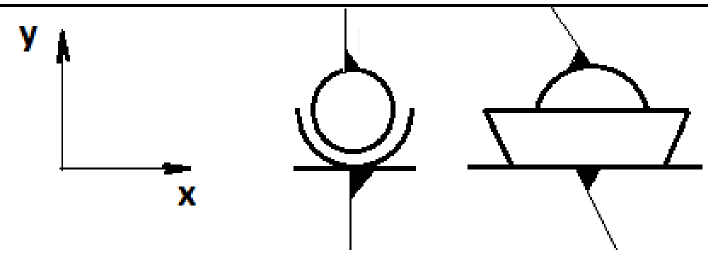
| Liaison | Schéma | Torseur statique | Torseur cinématique |
|---|---|---|---|
| Linéaire |   | $\tau_O = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ R_y & 0 \\ 0 & M_z \end{Bmatrix}$ | $\vartheta_O = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & 0 \\ 0 & V_z \end{Bmatrix}$ |

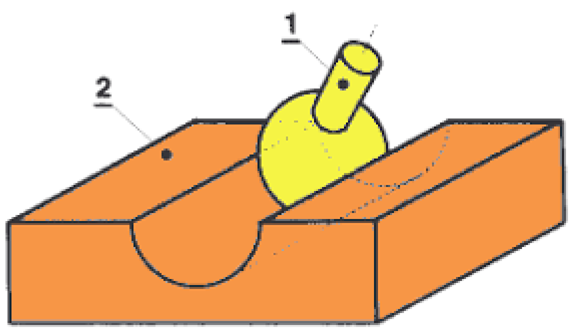


## I.3 *Liaisons usuelles*

### I.3.3. *Liaisons élémentaires*

Les liaisons élémentaires sont obtenues par contact entre des surfaces géométriques élémentaires appartenant à **deux** pièces :

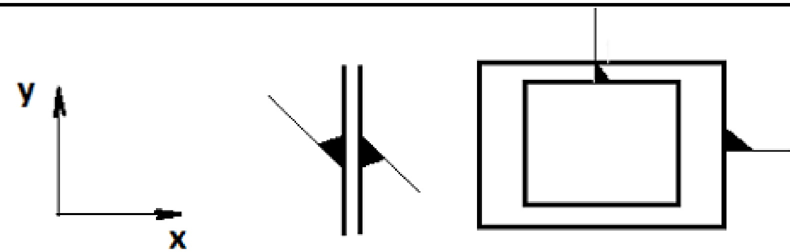
| Liaison | Schéma | Torseur statique | Torseur cinématique |
|---|---|---|---|
| Linéaire annulaire |   | $\tau_O = \begin{Bmatrix} R_x & 0 \\ R_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$ | $\vartheta_O = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_y & V_z \end{Bmatrix}$ |

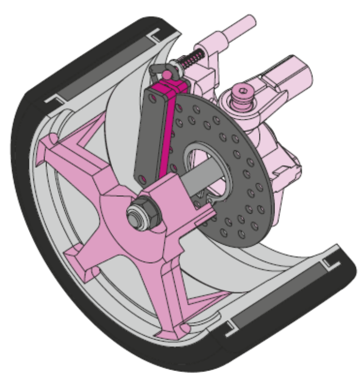


## I.3 *Liaisons usuelles*

### I.3.3. *Liaisons élémentaires*

Les liaisons élémentaires sont obtenues par contact entre des surfaces géométriques élémentaires appartenant à **deux** pièces :

| Liaison | Schéma | Torseur statique | Torseur cinématique |
|---|---|---|---|
| Liaison plan |   | $\tau_O = \begin{Bmatrix} R_x & 0 \\ 0 & M_y \\ 0 & M_z \end{Bmatrix}$ | $\vartheta_O = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & V_y \\ 0 & V_z \end{Bmatrix}$ |

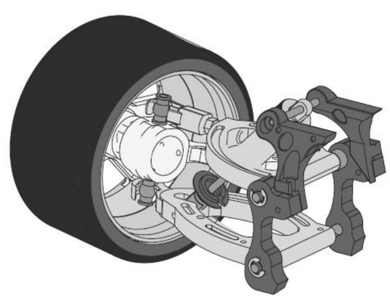


## I.3 *Liaisons usuelles*

### I.3.3. *Liaisons élémentaires*

Les liaisons élémentaires sont obtenues par contact entre des surfaces géométriques élémentaires appartenant à **deux** pièces :

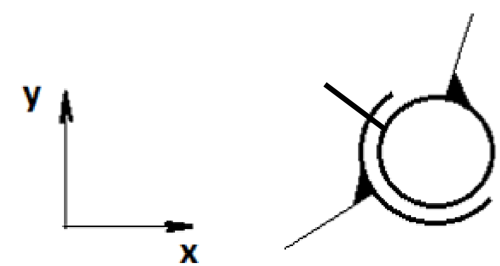
| **Liaison** | **Schéma** | **Torseur statique** | **Torseur cinématique** |
|---|---|---|---|
| Rotule **(sphérique)** |  | $\tau_O = \begin{Bmatrix} R_x & 0 \\ R_y & 0 \\ R_z & 0 \end{Bmatrix}$ | $\vartheta_O = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}$ |

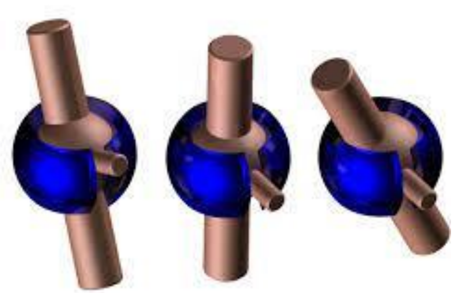


## I.3 *Liaisons usuelles*

### I.3.3. *Liaisons élémentaires*

Les liaisons élémentaires sont obtenues par contact entre des surfaces géométriques élémentaires appartenant à **deux** pièces :

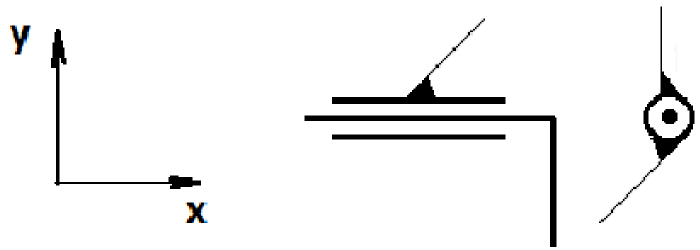
| Liaison | Schéma | Torseur statique | Torseur cinématique |
|---|---|---|---|
| Sphérique à doigt |  | $\tau_O = \begin{Bmatrix} R_x & M_x \\ R_y & 0 \\ R_z & 0 \end{Bmatrix}$ | $\vartheta_O = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}$ |

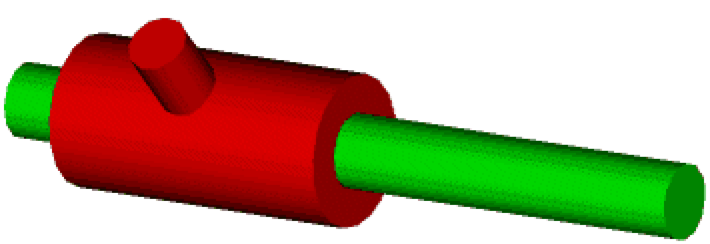


## I.3 *Liaisons usuelles*

### I.3.3. *Liaisons élémentaires*

Les liaisons élémentaires sont obtenues par contact entre des surfaces géométriques élémentaires appartenant à **deux** pièces :

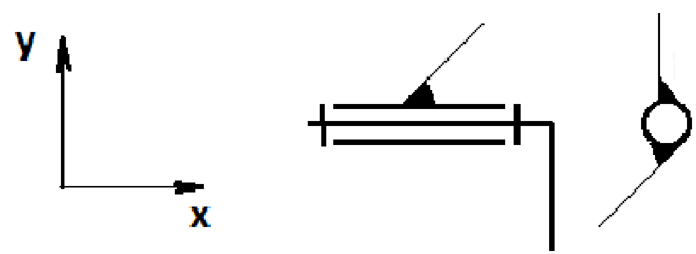
| **Liaison** | **Schéma** | **Torseur statique** | **Torseur cinématique** |
|---|---|---|---|
| Pivot Glissant |  | $\tau_O = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{matrix}\right\}$ | $\vartheta_O = \left\{\begin{matrix} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}$ |

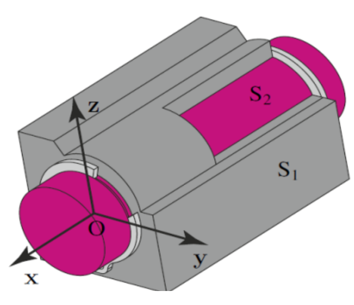


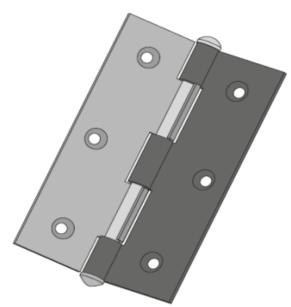
## I.3 *Liaisons usuelles*

### I.3.3. *Liaisons élémentaires*

Les liaisons élémentaires sont obtenues par contact entre des surfaces géométriques élémentaires appartenant à **deux** pièces :

| **Liaison** | **Schéma** | **Torseur statique** | **Torseur cinématique** |
|---|---|---|---|
| Pivot **(Articulation)** |  | $\tau_O = \begin{Bmatrix} R_x & 0 \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{Bmatrix}$ | $\vartheta_O = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$ |

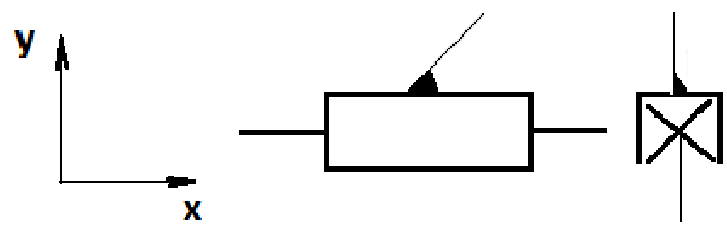


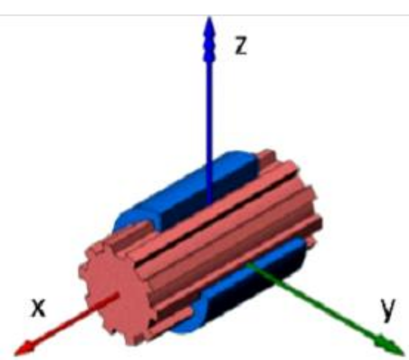



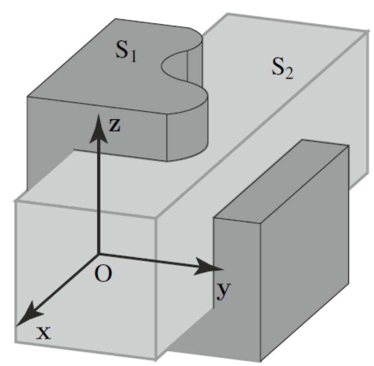
## I.3 *Liaisons usuelles*

### I.3.3. *Liaisons élémentaires*

Les liaisons élémentaires sont obtenues par contact entre des surfaces géométriques élémentaires appartenant à **deux** pièces :

| **Liaison** | **Schéma** | **Torseur statique** | **Torseur cinématique** |
|---|---|---|---|
| Glissière |   | $\tau_O = \begin{Bmatrix} 0 & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{Bmatrix}$ | $\vartheta_O = \begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$ |

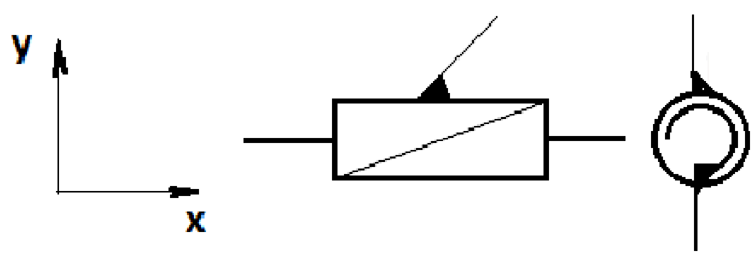


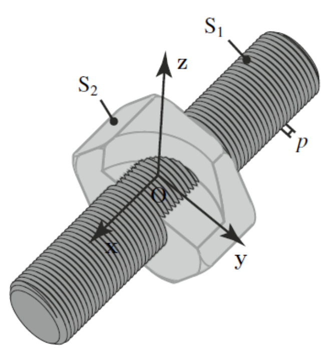



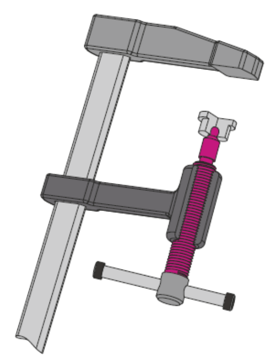

## I.3 *Liaisons usuelles*

### I.3.3. *Liaisons élémentaires*

Les liaisons élémentaires sont obtenues par contact entre des surfaces géométriques élémentaires appartenant à **deux** pièces :

| **Liaison** | **Schéma** | **Torseur statique** | **Torseur cinématique** |
|---|---|---|---|
| Hélicoidale |  | $\tau_O = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{Bmatrix}$ | $\vartheta_O = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$ |

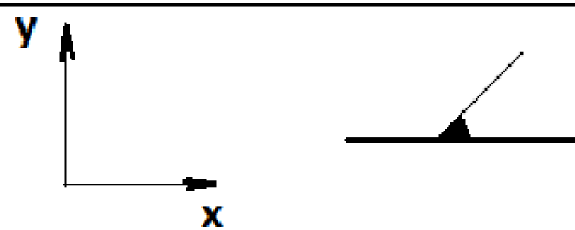




## I.3 *Liaisons usuelles*

### I.3.3. *Liaisons élémentaires*

Les liaisons élémentaires sont obtenues par contact entre des surfaces géométriques élémentaires appartenant à **deux** pièces :

| **Liaison** | **Schéma** | **Torseur statique** | **Torseur cinématique** |
|---|---|---|---|
| Encastrement |   | $\tau_O = \begin{Bmatrix} R_x & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{Bmatrix}$ | $\vartheta_O = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$ |