Chapitre 4 : Systèmes continus

4.1. Introduction

La formulation mathématique de l'équation d'équilibre dynamique d'un système continu possédant un nombre infini de degrés de liberté conduit à des équations différentielles aux dérivées partielles. Les variables indépendantes sont le temps et la position du point.

Le milieu continu est supposé linéaire élastique, homogène et isotrope. Notons que la réponse propre de la structure est indépendante du chargement appliqué.

Dans ce chapitre, on s'intéresse essentiellement à l'étude des barres et poutres, c'est-à-dire, des problèmes unidimensionnels pour lesquelles les coordonnées se réduisent à la donnée de la section repérée par son abscisse curviligne x. Le champ de déplacement est donc : $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$, en d'autres termes, on utilise les hypothèses de la résistance des matériaux.

Chapitre 4 : Systèmes continus

4.1. Introduction

Les hypothèses de l'établissement des équations de l'équilibre dynamique sont:

- Le système est constitué d'une poutre droite,
- Les sections droites des poutres restent droites au cours de la déformation (hypothèse de Navier-Bernoulli),
- Les transformations restent petites (Hypothèse des petites perturbations).

Nous nous intéresserons ici aux vibrations libres des poutres droites, c'est à dire la réponse vibratoire caractérisée par les modes et pulsation propres.

Dans tout ce qui suit, on suppose que la section de la poutre est constante et que les modules d'élasticité du matériau (constantes de Lamé) sont constantes.

Chapitre 4 : Systèmes continus

4.2. Équations d'équilibre dynamique d'une poutre droite

Le principe de Hamilton appliqué à des poutres droites est donnée par :

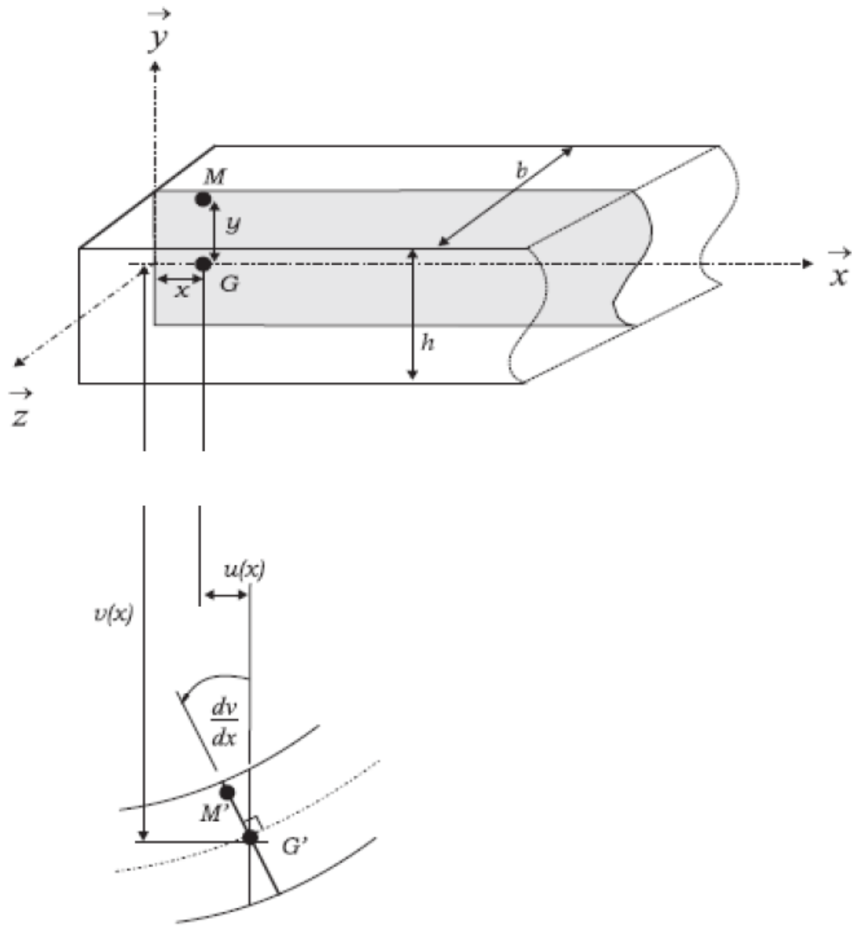
$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t)\, dt = 0 \qquad \forall \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) \text{ C. A. } (0); \text{ C. I. } (0) \tag{1}$$

$\mathcal{L}$: Le Lagrangien du système.

Les composantes du champ de déplacement sont les deux déplacements $u(x), v(x)$ et une rotation $v'(x) = \frac{dv(x)}{dx}$.

Chapitre 4 : Systèmes continus

4.2. Équations d'équilibre dynamique d'une poutre droite



État initial

État déformé

Chapitre 4 : Systèmes continus

4.2. Équations d'équilibre dynamique d'une poutre droite

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t)\, dt = 0 \qquad \forall \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) \text{ C. A. } (0); \text{ C. I. } (0) \qquad (1)$$

$$v'(x) = \frac{dv(x)}{dx}$$

Soit ρ la masse linéique de la poutre et S l'aire de la section de la poutre. Les équations d'équilibre dynamique d'une poutre droite à plan moyen chargée dans ce plan sont données par

Condition cinématiques et conditions initiales :

$$\begin{cases} u(x_i, t) = u_i^d(t), v(x_i, t) = v_i^d(t), \phi(x_i, t) = \phi_i^d(t), \quad \forall t \\ u(x, t_j) = u^{(j)}, v(x, t_j) = v^{(j)}, \phi(x, t_j) = \phi^{(j)} \qquad \forall x \\ \dot{u}(x, t_j) = \dot{u}^{(j)}, \dot{v}(x, t_j) = \dot{v}^{(j)}, \dot{\phi}(x, t_j) = \dot{\phi}^{(j)} \qquad \forall x \end{cases} \qquad (2)$$

Chapitre 4 : Systèmes continus

4.2. Équations d'équilibre dynamique d'une poutre droite

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t)\, dt = 0 \qquad \forall \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) \text{ C. A. } (0); \text{ C. I. } (0) \tag{1}$$

$$v'(x) = \frac{dv(x)}{dx}$$

Soit ρ la masse linéique de la poutre et S l'aire de la section de la poutre. Les équations d'équilibre dynamique d'une poutre droite à plan moyen chargée dans ce plan sont données par

Équilibre intérieur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N(x,t)}{\partial x} + p_x(x,t) = \rho S \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial T(x,t)}{\partial x} + p_y(x,t) = \rho S \dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial M(x,t)}{\partial x} + T(x,t) + c_z(x,t) = \rho I \dfrac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} \end{cases} \tag{3}$$

Chapitre 4 : Systèmes continus

4.2. Équations d'équilibre dynamique d'une poutre droite

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t)\, dt = 0 \qquad \forall \delta \mathbf{u}(\mathbf{x})\ \text{C. A.}\ (0); \text{C. I.}\ (0) \tag{1}$$

$$v'(x) = \frac{dv(x)}{dx}$$

Soit ρ la masse linéique de la poutre et S l'aire de la section de la poutre. Les équations d'équilibre dynamique d'une poutre droite à plan moyen chargée dans ce plan sont données par

Équilibre au bord

$$N(x_i, t) = N^i(t), T(x_i, t) = T^i(t), M(x_i, t) = M^i(t) \tag{4}$$

Chapitre 4 : Systèmes continus

4.2. Équations d'équilibre dynamique d'une poutre droite

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t)\, dt = 0 \qquad \forall \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) \text{ C. A. } (0); \text{ C. I. } (0) \tag{1}$$

$$v'(x) = \frac{dv(x)}{dx}$$

Soit ρ la masse linéique de la poutre et S l'aire de la section de la poutre. Les équations d'équilibre dynamique d'une poutre droite à plan moyen chargée dans ce plan sont données par

Loi de comportement

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{ll}\delta_{ij} \tag{5a}$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} N(x,t) = \int_{S(x)} \sigma_{xx}(x,t) ds \\ T(x,t) = \int_{S(x)} \sigma_{xy}(x,t) ds \\ M(x,t) = \int_{S(x)} -y\sigma_{xx}(x,t) ds \end{cases} \tag{5b}$$

Chapitre 4 : Systèmes continus

4.2. Équations d'équilibre dynamique d'une poutre droite

$$\begin{cases} N(x,t) = \int_{S(x)} \sigma_{xx}(x,t)ds \\ T(x,t) = \int_{S(x)} \sigma_{xy}(x,t)ds \\ M(x,t) = \int_{S(x)} -y\sigma_{xx}(x,t)ds \end{cases} \tag{5b}$$

où :

$N(x,t), T(x,t)$ sont les efforts normal et tranchant et $M(x,t)$ est le moment de flexion.

λ et μ sont les constantes de Lamé et I est le moment quadratique.

$\mathbf{p}(x,t), \mathbf{c}(x,t)$ sont respectivement les forces linéiques et les couples réparties.

Chapitre 4 : Systèmes continus

4.3. Vibrations des barres et des poutres

4.3.1. Vibrations longitudinales des barres

a. Équation d'équilibre dynamique

L'équation d'équilibre dynamique axial d'une barre s'écrit :

$$-\rho S \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + ES\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right) + p_x(x,t) = 0 \qquad (6)$$

Les conditions aux limites sont :

$$R_i(t) = ES \left.\frac{\partial u(x)}{\partial x}\right|_{x_i}, \text{ ou } u(x_i,t) = u_i^d(t)\ , \ \forall t \qquad (7)$$

Les conditions initiales sont :

$$u(x,t_j) = u(x)^{(j)} \text{ et } \dot{u}(x,t_j) = \dot{u}(x)^{(j)}\ , \ \forall x \qquad (8)$$

Chapitre 4 : Systèmes continus

4.3. Vibrations des barres et des poutres

4.3.1. Vibrations longitudinales des barres

b. Modes propres

Le calcul des fréquences et modes propres permet de déterminer la réponse intrinsèque à la structure, ce calcul est utilisé dans le domaine de l'analyse modale. La base modale est infinie dans le cas des milieux continus.

L'équation d'équilibre s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (9)$$

Les modes propres de vibration sont les solutions périodiques de l'équation (9). On utilise la technique de séparation des variables pour résoudre l'équation (9).

$$u(x, t) = \psi(x)\eta(t) \qquad (10)$$

Chapitre 4 : Systèmes continus

4.3. Vibrations des barres et des poutres

4.3.1. Vibrations longitudinales des barres

b. Modes propres

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{9}$$

$$u(x,t) = \psi(x)\eta(t) \tag{10}$$

En substituant l'équation (10) dans (9), on obtient :

$$\psi''(x) + \lambda^2\psi(x) = 0$$

et

$$\ddot{\eta}(t) + \omega^2\eta(t) = 0$$

où : $\omega = \lambda\sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

Chapitre 4 : Systèmes continus

4.3. Vibrations des barres et des poutres

4.3.1. Vibrations longitudinales des barres

b. Modes propres

$$\psi''(x) + \lambda^2\psi(x) = 0 \qquad\qquad \ddot{\eta}(t) + \omega^2\eta(t) = 0$$

La solution du problème conduit à des solutions purement harmoniques en espace et en temps :

$$u(x,t) = (A_1\cos\lambda x + A_2\sin\lambda x)(B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t) \tag{11}$$

où λ et ω sont respectivement les pulsations en espace et en temps. A_1, A_2, B_1 et B_2 sont des constantes d'intégration inconnues.

Chapitre 4 : Systèmes continus

4.3. Vibrations des barres et des poutres

4.3.2. Vibrations des poutres en flexion simple

a. Équation d'équilibre dynamique

En vertu du principe de Hamilton, on en déduit les équations de l'équilibre intérieur et de l'équilibre au bord. Soit :

$$\text{A L'intérieur} \qquad \rho S \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} = p_y(x,t) - \frac{\partial C_z(x,t)}{\partial x} \tag{12}$$

On obtient une équation différentielle du quatrième ordre.

$$\text{En } x = 0, x = l\ \forall t \begin{cases} T_i(t) = EI \left.\frac{\partial^3 v(x,t)}{\partial x^3}\right|_{x_i} & \text{ou} \quad v(x_i,t) = v_i^d(t) \\ M_i(t) = EI \left.\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x_i} & \text{ou} \quad v'(x_i) = v_i'^d(t) \end{cases} \tag{13}$$

$$\text{à } t = 0, \forall x \quad \begin{cases} v(x,0) = v(x)^{(0)} & \text{et} \quad \dot{v}(x,0) = \dot{v}(x)^{(0)} \\ v'(x,0) = v'(x)^{(0)} & \text{et} \quad \dot{v}'(x,0) = \dot{v}'(x)^{(0)} \end{cases} \tag{14}$$

Chapitre 4 : Systèmes continus

4.3. Vibrations des barres et des poutres

4.3.2. Vibrations des poutres en flexion simple

b. Modes propres

L'équation d'équilibre est déduite de l'équation (13) de la manière suivante :

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{EI}{\rho S}\frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} \qquad (15)$$

La solution générale s'écrit :

$$v(x,t) = \psi(x)\eta(t) \qquad (16)$$

ce qui donne :

$$v(x,t) = (B_1 \sin\lambda x + B_2 \cos\lambda x + B_3 \sinh\lambda x + B_4 \cosh\lambda x) A\cos(\omega t - \varphi) \qquad (17)$$

où : $\frac{EI}{\rho S}\lambda^4 = \omega^2$

4.4. Orthogonalité des modes

Pour deux fréquences différentes, les modes propres vérifient la condition d'orthogonalité suivante :

$$\int_0^l \varphi_m(x)\varphi_n(x)\bar{m}(x)dx = 0 \tag{18}$$

où : m, n sont des entiers, l est la longueur de la poutre et $\bar{m}$ est la masse par unité de longueur.

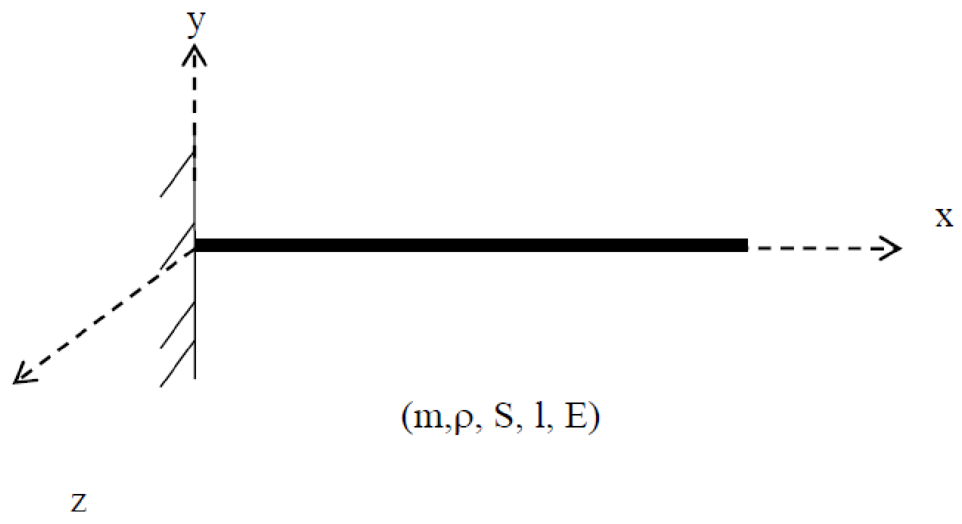
Cette relation est équivalente à la condition d'orthogonalité des modes de vibration pour un système discret à plusieurs degrés de liberté.

Chapitre 4 : Systèmes continus

4.5. Exercice d'application

Considérons une poutre en extension, constitué d'un matériau homogène

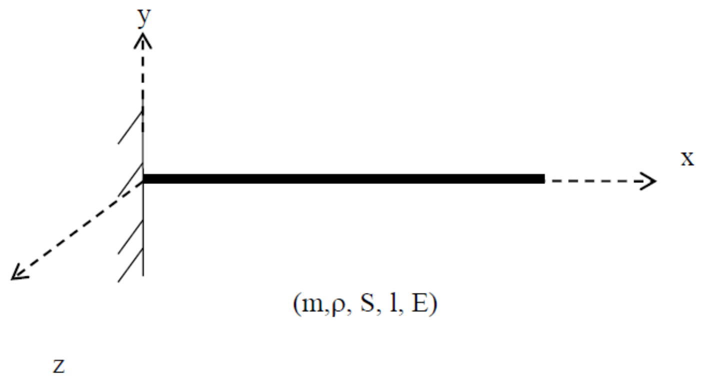
Déterminer les fréquences propres de vibrations de la poutre.



Chapitre 4 : Systèmes continus

4.5. Exercice d'application

Solution :



Le champ de déplacement s'écrit :

$$u(x,t) = (A_1\cos\lambda x + A_2\sin\lambda x)(B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t)$$

Les conditions aux limites sont :

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

$$N(l,t) = 0 \Rightarrow A_2\cos\lambda l = 0 \Rightarrow \lambda l = \frac{\pi}{2} \pm k\pi \Leftrightarrow \lambda_k = (2k-1)\frac{\pi}{2l}, k \in N^{*+}$$

La pulsation $\omega_k = \lambda_k\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ alors $\omega_k = (2k-1)\frac{\pi}{2l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$, $k \in N^{*+}$.

On suppose que la vitesse initiale est nulle, alors la solution du problème s'exprime :

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2l}x\right)\cos\left(\sqrt{E/\rho}(2k-1)\frac{\pi}{2l}t\right)$$