Chapitre 3 : Systèmes à n degrés de liberté

3.1. Introduction

Le nombre de degrés de liberté d'un système mécanique est le nombre de coordonnées qui évoluent indépendamment les unes des autres.

Pour un système possédant n degrés de liberté spatiale, donc il décrit par n coordonnées généralisées $(q_1, q_1, \ldots \ldots \ldots, q_n)$. En d'autres termes, on se ramène à résoudre n équations différentielles du mouvement.

L'analyse modale permet via un changement de l'espace de description d'exprimer le comportement dynamique d'une structure complexe de manière beaucoup plus simple.

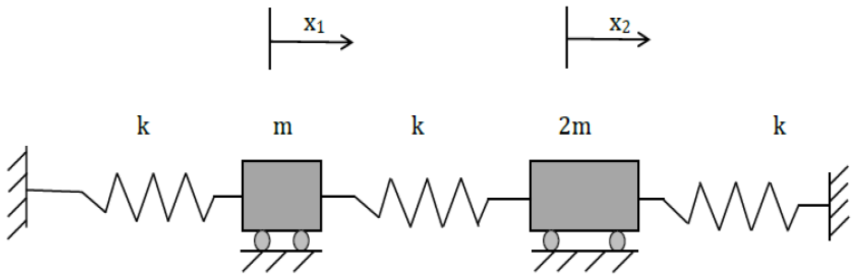
Chapitre 3 : Systèmes à n degrés de liberté

3.2. Exemple d'un système à deux degrés de liberté

Considérons le modèle simple d'un système à deux degrés de liberté

Les équations différentielles du mouvement sont données par :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ 2m\ddot{x}_1 - kx_1 + 2kx_2 = 0 \end{cases} \qquad (1a)$$



On pose :

$$\begin{cases} x_1 = A_1 e^{i\omega t} \\ x_2 = A_2 e^{i\omega t} \end{cases} \qquad (1c)$$

Où A_1 et A_2 sont des constantes inconnues.

On peut exprimer l'équation (1a) sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (1b)$$

Chapitre 3 : Systèmes à n degrés de liberté

3.2. Exemple d'un système à deux degrés de liberté

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (1b)$$

Ce qui implique que :

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - 2m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Les deux fréquences propres du système sont données par :

$$\omega_1 = \sqrt{0.634\frac{k}{m}}$$

Et $\omega_2 = \sqrt{2.366\frac{k}{m}}$

Pour le premier mode, nous avons : $\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{(1)} = 0.731$

Pour le deuxième mode, nous avons : $\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{(2)} = -2.73$

Chapitre 3 : Systèmes à n degrés de liberté

3.3. Système à plusieurs degrés de liberté - cas non amorti

Nous supposons ici que le système n'est soumis à aucune force extérieure et que l'amortissement est nul.

L'équation du mouvement d'un système libre à n degrés de liberté s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad (2)$$

où $\mathbf{M}(n * n)$ et $\mathbf{K}(n * n)$ sont respectivement les matrices de masse et de rigidité, symétriques supposées définies positives.

Multipliant l'équation (2) par $\mathbf{M}^{-1}$, on obtient :

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \mathbf{I}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad (3)$$

Chapitre 3 : Systèmes à n degrés de liberté

3.3. Système à plusieurs degrés de liberté - cas non amorti

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

On suppose que le mouvement est harmonique $\ddot{\mathbf{x}} = -\lambda \mathbf{x}$, $\lambda = \omega^2$.

Nous précisons que λ est une valeur propre, il vient alors :

$$\det(-\lambda \mathbf{I} + \mathbf{D}) = 0 \tag{4}$$

À chaque valeur propre λ_i, on calcule son vecteur propre $\mathbf{X}_i$ correspondant :

$$(-\lambda \mathbf{I} + \mathbf{D})\mathbf{X}_i = \mathbf{0} \tag{5}$$

Chapitre 3 : Systèmes à n degrés de liberté

3.3.1. Orthogonalité des modes propres de vibration

En dynamique linéaire, Les modes propres d'une structure sont orthogonaux. En d'autres termes, les vecteurs modaux sont orthogonaux par rapport aux matrices **M** et **K**, nous avons :

$$\mathbf{X}_i'\mathbf{M}\mathbf{X}_j = m_i\delta_{ij}$$

où m_i est appelée masse modale,

et $$\mathbf{X}_i'\mathbf{K}\mathbf{X}_j = k_i\delta_{ij}$$

où k_i est appelée rigidité modale.

δ_{ij} est le symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

Chapitre 3 : Systèmes à n degrés de liberté

3.3.1. Orthogonalité des modes propres de vibration

Démonstration :

Le problème aux valeurs propres s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\mathbf{X}_i &= \omega_i^2 \mathbf{M}\mathbf{X}_i \\ \mathbf{K}\mathbf{X}_j &= \omega_j^2 \mathbf{M}\mathbf{X}_j \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{X}_j'\mathbf{K}\mathbf{X}_i &= \omega_i^2 \mathbf{X}_j'\mathbf{M}\mathbf{X}_i \\ \mathbf{X}_i'\mathbf{K}\mathbf{X}_j &= \omega_j^2 \mathbf{X}_i'\mathbf{M}\mathbf{X}_j \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{X}_i'\mathbf{K}\mathbf{X}_j &= \omega_i^2 \mathbf{X}_i'\mathbf{M}\mathbf{X}_j \\ \mathbf{X}_j'\mathbf{K}\mathbf{X}_i &= \omega_j^2 \mathbf{X}_j'\mathbf{M}\mathbf{X}_i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{X}_j'\mathbf{M}\mathbf{X}_i &= 0, \quad i \neq j \\ \mathbf{X}_j'\mathbf{K}\mathbf{X}_i &= 0, \quad i \neq j \end{aligned}$$

Physiquement, les relations d'orthogonalité expriment le fait que le travail des forces d'inertie et élastiques du mode i lors d'un déplacement selon le mode j est nul $(i \neq j)$.

Chapitre 3 : Systèmes à n degrés de liberté

3.3.2. Régime libre

Considérons la matrice modale $\mathbf{P}$ et soient $\mathbf{P}'\mathbf{M}\mathbf{P} = \mathbf{M}_g$, $\mathbf{P}'\mathbf{K}\mathbf{P} = \mathbf{K}_g$

Dans l'équation (2), on remplace $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$, il vient alors :

$$\mathbf{P}'\mathbf{M}\mathbf{P}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{P}'\mathbf{K}\mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{M}_g\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}_g\mathbf{y} = \mathbf{0} \qquad (11)$$

L'équation (11) représente n équations différentielles linéaires découplées :

$$\ddot{y}_i + \omega_i^2 y_i = 0, \quad i = 1,2, \dots \dots . n \qquad (12)$$

La solution de l'équation (12) est celle d'un système à un degré de liberté :

$$y_i(t) = y_i(0)\cos\omega_i t + \frac{\dot{y}_i(0)}{\omega_i}\sin\omega_i t, \quad i = 1,2, \dots \dots . n \qquad (13)$$

Chapitre 3 : Systèmes à n degrés de liberté

3.3.2. Régime libre

$$\mathbf{M}_g\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}_g\mathbf{y} = \mathbf{0} \tag{11}$$

$$\ddot{y}_i + \omega_i^2 y_i = 0, \quad i = 1,2, \ldots \ldots . n \tag{12}$$

$$y_i(t) = y_i(0)\cos\omega_i t + \frac{\dot{y}_i(0)}{\omega_i}\sin\omega_i t, \quad i = 1,2, \ldots \ldots . n \tag{13}$$

En utilisant les équations précédentes, il est possible de calculer le vecteur des déplacements $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots \ldots \ldots . . , x_n(t))'$.

Note : Les vecteurs et les matrices sont représentés par un symbole gras, et $\mathbf{A}'$ est la matrice transposée de la matrice $\mathbf{A}$.

Chapitre 3 : Systèmes à n degrés de liberté

3.4. Système avec amortissement

Les équations du mouvement s'écrivent dans le cas d'un système amorti :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{14}$$

où **C** est la matrice d'amortissement.

Amortissement de Rayleigh :

La matrice d'amortissement est exprimée sous la forme d'une combinaison linéaire des matrices de masse et de raideur de la manière suivante :

$$\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K}, \quad a, b \text{ constants.} \tag{15}$$

Il est évident que dans ce cas la propriété d'orthogonalité de la matrice d'amortissement par rapport aux modes propres est préservée.

Chapitre 3 : Systèmes à n degrés de liberté

3.4. Système avec amortissement

Amortissement de Rayleigh :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad (14)$$

$$\mathbf{C} = \mathrm{a}\mathbf{M} + \mathrm{b}\mathbf{K}, \quad \text{a, b constants.} \qquad (15)$$

En substituant l'équation (15) dans (14), on obtient :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + (\mathrm{a}\mathbf{M} + \mathrm{b}\mathbf{K})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad (16)$$

Qui peut être écrite sous la forme suivante :

$$\Longrightarrow \mathbf{M}_g\ddot{\mathbf{y}} + \left(\mathrm{a}\mathbf{M}_g + \mathrm{b}\mathbf{K}_g\right)\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}_g\mathbf{y} = \mathbf{0} \qquad (17)$$

L'équation (17) représente n équations différentielles découplées :

$$\ddot{y}_i + (a + b\omega_i^2)\dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, n \qquad (18)$$

Chapitre 3 : Systèmes à n degrés de liberté

3.5. Système forcé

L'équation différentielle se met sous la forme : $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$ est le vecteur des forces.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \tag{19}$$

On suppose que $\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K}$.

En tenant compte des matrices $\mathbf{M}_g$, $\mathbf{k}_g$ et du vecteur $\mathbf{y}(t)$, on peut écrire que :

$$\Longrightarrow \mathbf{M}_g\ddot{\mathbf{y}} + \left(a\mathbf{M}_g + b\mathbf{K}_g\right)\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}_g\mathbf{y} = \mathbf{F}_g \tag{20}$$

où $\mathbf{F}_g = \mathbf{P}'\mathbf{F}$.

Soit : $\mathbf{f} = \mathbf{M}_g^{-1}\mathbf{F}_g$.

L'équation modale découplée est de la forme suivante :

$$\ddot{y}_i + (a + b\omega_i^2)\dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = f_i, \quad i = 1,2, \ldots\ldots, n \tag{21}$$

Chapitre 3 : Systèmes à n degrés de liberté

3.5. Système forcé

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \tag{19}$$

$$\mathbf{M}_g\ddot{\mathbf{y}} + \left(a\mathbf{M}_g + b\mathbf{K}_g\right)\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}_g\mathbf{y} = \mathbf{F}_g \tag{20}$$

$$\ddot{y}_i + (a + b\omega_i^2)\dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = f_i, \quad i = 1,2,\ldots\ldots, n \tag{21}$$

La solution complète est celle d'un système à un degré de liberté de déplacement $y_i(t)$. (cf. Chapitre II).

L'analyse modale est basée sur la propriété d'orthogonalité des modes propres permettant de découpler les équations différentielles du mouvement. La réponse totale peut être obtenue avec une précision suffisante en considérant un nombre de modes propres inferieur au nombre total de modes.

Chapitre 3 : Systèmes à n degrés de liberté

3.6. Exercice d'application

Soit une structure mécanique avec les caractéristiques suivantes :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 9m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 9k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}$$

L'équation différentielle du mouvement est :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}(t)$$

où : $\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_0 \end{pmatrix}$, où $F_0 = cte$

Déterminer les équations différentielles découplées du système.

Chapitre 3 : Systèmes à n degrés de liberté

3.6. Exercice d'application

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 9m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 9k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M\ddot{x}} + \mathbf{Kx} = \mathbf{F}(t)$$

$$\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_0 \end{pmatrix}$$

<u>Solution :</u>

Le calcul des fréquences et modes propres de vibration donne :

$$\omega_1^2 = \frac{2k}{3m}, \omega_2^2 = \frac{4k}{3m}.$$

Pour $\omega_1^2 = \frac{2k}{3m}$, on a : $\mathbf{X_1} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pour $\omega_1^2 = \frac{4k}{3m}$, on a : $\mathbf{X_2} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a :

$$\mathbf{M\ddot{x}} + \mathbf{Kx} = \mathbf{F}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{MP\ddot{y}} + \mathbf{KPy} = \mathbf{F}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{M_g\ddot{y}} + \mathbf{K_g y} = \mathbf{F_g}$$

3.6. Exercice d'application

Solution :

Le calcul des fréquences et modes propres de vibration donne :

$$\omega_1^2 = \frac{2k}{3m}, \omega_2^2 = \frac{4k}{3m}.$$

Pour $\omega_1^2 = \frac{2k}{3m}$, on a : $\mathbf{X_1} = \binom{1/3}{1}$

Pour $\omega_1^2 = \frac{4k}{3m}$, on a : $\mathbf{X_2} = \binom{-1/3}{1}$

On a :

$$\mathbf{M\ddot{x} + Kx = F}$$

$$\Rightarrow \mathbf{MP\ddot{y} + KPy = F}$$

$$\Rightarrow \mathbf{M_g\ddot{y} + K_g y = F_g}$$

On trouve que :

$$\mathbf{M_g} = \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}, \ \mathbf{K_g} = \begin{pmatrix} 4k/3 & 0 \\ 0 & 8k/3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{2F_0}{3m} \\ \frac{F_0}{3m} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

Ce qui donne :

$$\ddot{y}_1 + \frac{2k}{3m} y_1 = \frac{2F_0}{3m}$$

$$\ddot{y}_2 + \frac{4k}{3m} y_2 = \frac{F_0}{3m}$$