Chapitre 2 : Vibrations forcées des systèmes à un degré de liberté

2.1. Introduction

L'objectif de la dynamique des structures est d'étudier les vibrations des systèmes causées par des charges dynamiques qui, contrairement à des charges statiques varient avec le temps.

Une charge dynamique est une charge dont la grandeur, la direction ou le point d'application varient avec le temps.

Dans ce cours, on s'intéressera à l'étude de la réponse dynamique de l'oscillateur sous amorti soumis à une sollicitation extérieure F(t).

Chapitre 2 : Vibrations forcées des systèmes à un degré de liberté

2.2. Équation du mouvement

L'équation du mouvement d'un système élémentaire à un seul degré de liberté est donnée par (cf. chapitre I) :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F \qquad (1)$$

La solution de l'équation (1) est la somme de la solution de l'équation homogène (sans second membre) et la solution particulière due au second membre (la force appliquée).

Dans le cas d'un système sous amorti, la solution de l'équation homogène est donnée par :

$$x(t) = \rho\cos(\omega_d t - \theta)e^{-\xi\omega t} \qquad (2)$$

Elle constitue la réponse transitoire de l'oscillateur. Ce terme disparait pour des valeurs importantes du temps et la réponse totale tend vers la solution stationnaire.

Chapitre 2 : Vibrations forcées des systèmes à un degré de liberté

2.3. Sollicitation harmonique

Soit une fonction de chargement de type sinusoïdal d'amplitude constante F_0 et de pulsation ϖ:

$$F(t) = F_0 \sin\varpi t \tag{3}$$

L'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F_0 \sin\varpi t \tag{4}$$

La solution particulière de cette équation s'écrit sous la forme :

$$x_p(t) = A\sin\varpi t + B\cos\varpi t \tag{5}$$

Chapitre 2 : Vibrations forcées des systèmes à un degré de liberté

2.3. Sollicitation harmonique

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F_0 \sin\varpi t \qquad (4)$$

$$x_p(t) = A\sin\varpi t + B\cos\varpi t \qquad (5)$$

En substituant l'équation (5) dans (4), et en séparant les termes en sinus et en cosinus, on obtient :

$$(-A\varpi^2 - B\varpi(2\xi\omega) + A\omega^2)\sin\varpi t = \frac{F_0}{m}\sin\varpi t$$

$$(-B\varpi^2 + A\varpi(2\xi\omega) + B\omega^2)\cos\varpi t = 0$$

$\Longrightarrow$ Ce qui donne :

$$(1-\beta^2)A - (2\xi\beta)B = \frac{F_0}{k}$$

$$(1-\beta^2)B + (2\xi\beta)A = 0$$

où $\beta = \frac{\varpi}{\omega}$ est le rapport des fréquences.

d'où :

$$A = \frac{F_0}{k}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{F_0}{k}\frac{-2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}$$

Chapitre 2 : Vibrations forcées des systèmes à un degré de liberté

2.3. Sollicitation harmonique

La solution particulière qui correspond au régime permanent s'écrit :

$$x_p(t) = \frac{F_0}{k}\frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^2+(2\xi\beta)^2}\left(\left(1-\beta^2\right)\sin\varpi t - 2\xi\beta\cos\varpi t\right) \tag{6}$$

La réponse $x_p(t)$ s'exprime donc :

$$x_p(t) = \rho\sin(\varpi t - \phi) \tag{7}$$

où : $\rho = \frac{F_0}{k}\sqrt{\frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^2+(2\xi\beta)^2}}$ et $\phi = \mathrm{arctg}\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$

L'amplitude de la réponse peut s'écrire comme suit :

$$\rho = \frac{F_0}{k}\sqrt{\frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^2+(2\xi\beta)^2}} = \frac{F_0}{k}D \tag{8}$$

Chapitre 2 : Vibrations forcées des systèmes à un degré de liberté

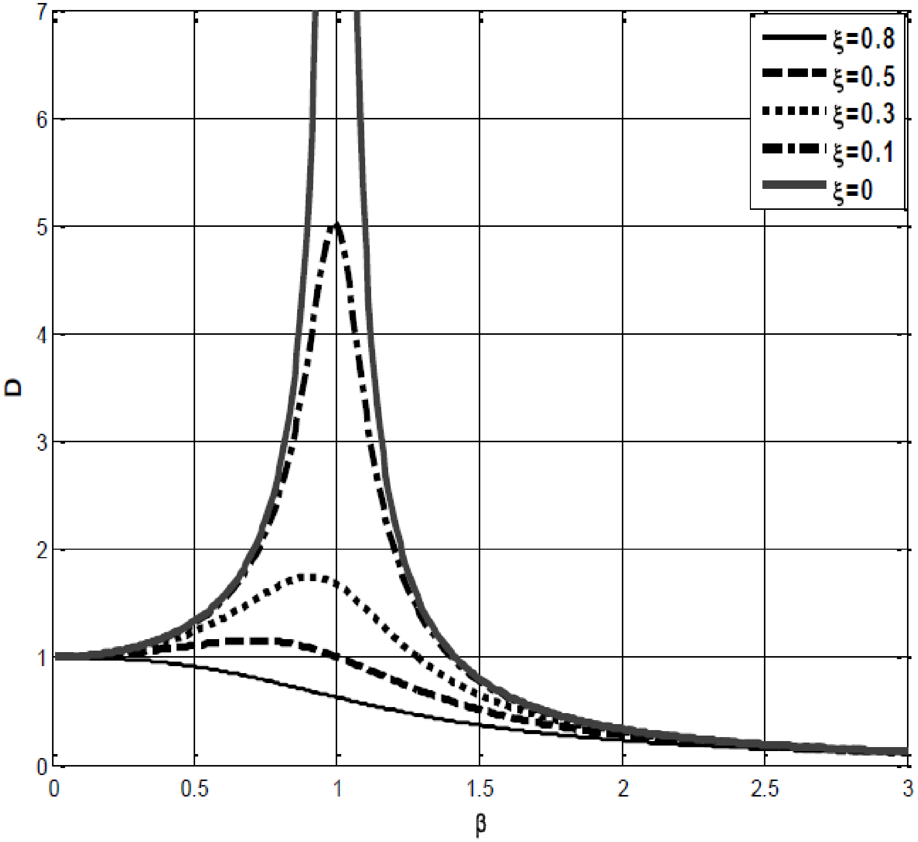
2.3. Sollicitation harmonique

L'amplitude de la réponse peut s'écrire comme suit :

$$\rho = \frac{F_0}{k}\sqrt{\frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^2+(2\xi\beta)^2}} = \frac{F_0}{k}D$$

où $\frac{F_0}{k}$ est le déplacement statique

et D est le facteur d'amplification dynamique



Chapitre 2 : Vibrations forcées des systèmes à un degré de liberté

2.3. Sollicitation harmonique

2.3.1. Résonance

Lorsque la pulsation de la force appliquée est égale ou voisine de la pulsation propre du système, le facteur d'amplification dynamique tend vers l'infini. On dit que le système est en résonance, cet état peut conduire à une dégradation rapide des propriétés du système pouvant aller jusqu'à la ruine.

Le maximum de la réponse est donné par :

$$\frac{\partial D}{\partial \beta} = 0$$

Ce qui implique que :

$$\beta_{pic} = \sqrt{1 - 2\xi^2} \qquad \text{et} \qquad D_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Chapitre 2 : Vibrations forcées des systèmes à un degré de liberté

2.3. Sollicitation harmonique

2.3.1. Résonance

Le maximum de la réponse est donné par :

$$\frac{\partial D}{\partial \beta} = 0$$

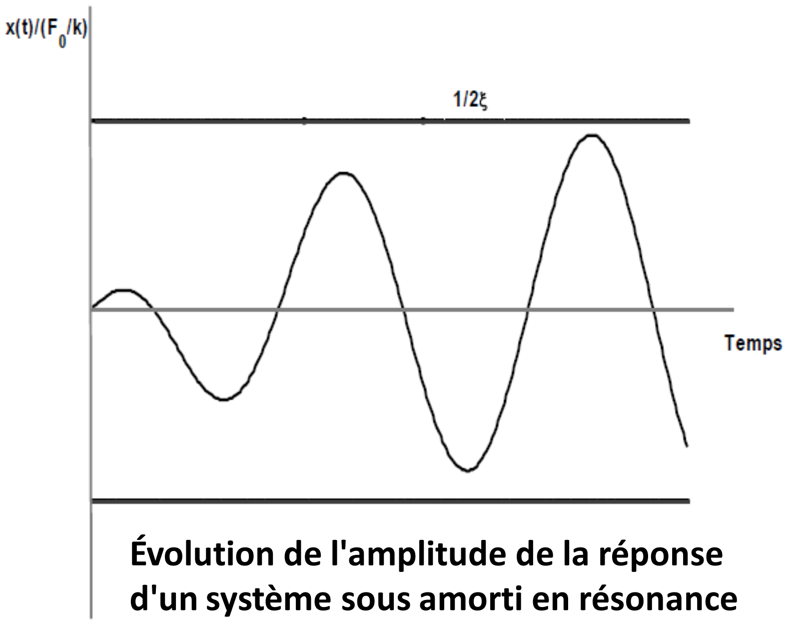
Ce qui implique que :

$$\beta_{pic} = \sqrt{1 - 2\xi^2} \qquad \text{et} \qquad D_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Pour de faibles amortissements, nous avons :

$$D_{max} \approx \frac{1}{2\xi}$$

Dans le cas d'un système faiblement amorti, l'amplitude de la réponse croit dans le temps mais reste bornée par la valeur $\frac{1}{2\xi}$



Évolution de l'amplitude de la réponse d'un système sous amorti en résonance

Chapitre 2 : Vibrations forcées des systèmes à un degré de liberté

2.3. Sollicitation harmonique

2.3.1. Résonance

Le maximum de la réponse est donné par :

$$\frac{\partial D}{\partial \beta} = 0$$

Ce qui implique que :

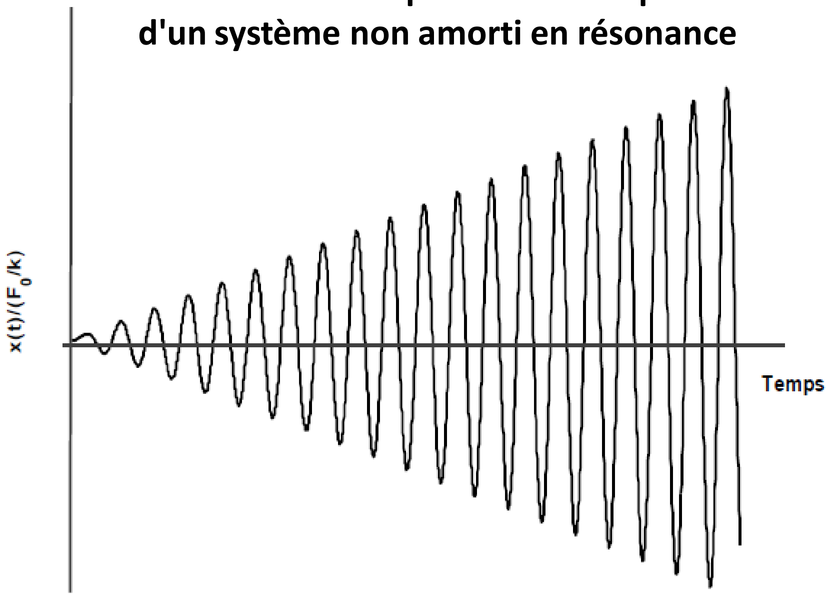
$$\beta_{pic} = \sqrt{1 - 2\xi^2} \qquad \text{et} \qquad D_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Pour de faibles amortissements, nous avons :

$$D_{max} \approx \frac{1}{2\xi}$$

Si l'amortissement est nul, l'amplitude de la réponse tend vers l'infini et le système devient instable.

Évolution de l'amplitude de la réponse d'un système non amorti en résonance



Chapitre 2 : Vibrations forcées des systèmes à un degré de liberté

2.3. Sollicitation harmonique

2.3.2. Isolation vibratoire

On est fréquemment confronté au problème de l'isolation d'une machine ou d'un équipement vis-à-vis de son support. Deux cas sont possibles :

- La machine génère des vibrations, et on veut réduire les forces transmises par ses vibrations ;
-Le bon fonctionnement de l'équipement considéré implique qu'il ne subisse pas l'influence des vibrations du support auquel il est fixé.

Dans les deux cas, on conçoit la suspension de manière à ce qu'elle joue le rôle de filtre mécanique.

Chapitre 2 : Vibrations forcées des systèmes à un degré de liberté

2.3. Sollicitation harmonique

2.3.2. Isolation vibratoire

a. Isolation des machines :

Considérons le cas où l'on veut réduire les forces dynamiques transmises par une machine à la structure qui la supporte ou à son environnement immédiat.

Soit le système représenté sur la figure (5), la machine tournante produit une force verticale $F(t) = F_0 \sin\varpi t$.

La machine est portée sur un support à un seul degré de liberté, et l'équation différentielle du mouvement est :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F_0 \sin\varpi t$$

et sa solution en régime permanent est :

$x(t) = \rho\sin(\varpi t - \phi)$ où : $\rho = \frac{F_0}{k}\sqrt{\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$ et $\phi = \mathrm{arctg}\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$

Chapitre 2 : Vibrations forcées des systèmes à un degré de liberté

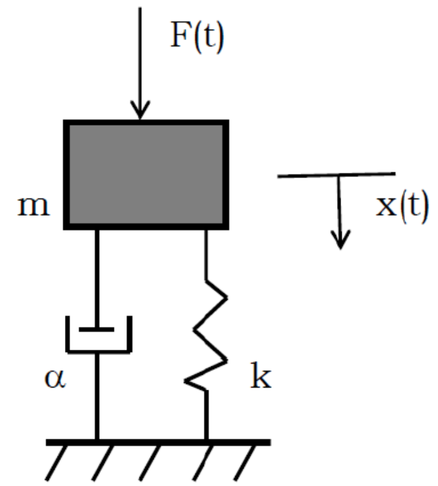
2.3. Sollicitation harmonique

2.3.2. Isolation vibratoire

a. Isolation des machines :

La transmissibilité du système est définie comme étant le rapport de l'amplitude de la force transmise à la base à l'amplitude de la force appliquée :

$$TR = \frac{F_{res}}{F_0} = \frac{\rho\sqrt{k^2+(\alpha\varpi)^2}}{F_0} = \sqrt{\frac{1+(2\xi\beta)^2}{\left(1-\beta^2\right)^2+(2\xi\beta)^2}}$$



Chapitre 2 : Vibrations forcées des systèmes à un degré de liberté

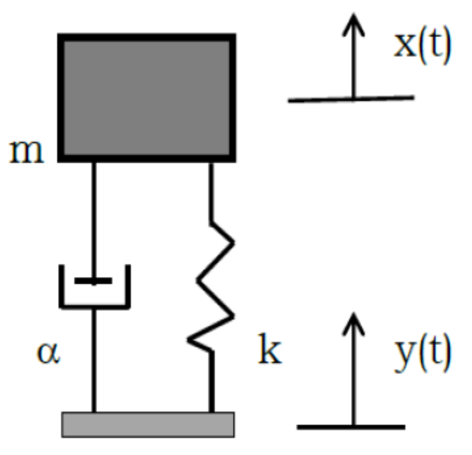
2.3. Sollicitation harmonique

2.3.2. Isolation vibratoire

b. Mouvement du support :

La masse m à isoler est portée par un système ressort - amortisseur sur un support soumis à des mouvements harmoniques verticaux ($y(t) = y_0 \sin\varpi t$)

L'équation différentielle du mouvement de la masse est :



$$-k(x-y) - \alpha(\dot{x}-\dot{y}) = m\ddot{x}$$

On pose : $z = x - y$ alors :

$$m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz = -m\ddot{y}$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz = m\varpi^2 y_0 \sin\varpi t$$

Et la transmissibilité du système est définie par : $TR = \frac{x_0}{y_0} = \sqrt{\frac{k^2+(\alpha\varpi)^2}{(k-m\varpi^2)^2+(\alpha\varpi)^2}} = \sqrt{\frac{1+(2\xi\beta)^2}{\left(1-\beta^2\right)^2+(2\xi\beta)^2}}$