Chapitre 1 : Introduction a la dynamique des structures

1.1. Introduction

Le mouvement oscillatoire est l'un des mouvements les plus importants observés dans la nature. Dans le cas d'un système sans sollicitations extérieures, on parle d'oscillations libres. Pour un système conservatif, les oscillations sont non amorties et en présence de frottement, l'amplitude des mouvements décroit conduisant à des oscillations amorties.

Cette partie du cours traite des systèmes à un seul degré de liberté, c'est-à-dire des systèmes pour lesquels le déplacement peut être représenté par une seule coordonnée.

Le modèle simple d'un oscillateur à un seul degré de liberté est constitué d'un bloc rigide de masse m, d'un ressort élastique de raideur k et d'un amortisseur visqueux de coefficient α. Le seul déplacement possible de l'oscillateur est dans la direction $\overrightarrow{ox}$.

Chapitre 1 : Introduction a la dynamique des structures

1.2. Objectif de la dynamique des structures

La dynamique des structures est la branche de la mécanique du solide qui concerne l'étude des oscillations des structures soumises à des sollicitations variables dans l'espace et le temps.

Dans bon nombre de secteurs industriels (comme par exemple l'automobile, l'aéronautique, le ferroviaire, le génie civil...etc.), il est primordial dans le cadre du dimensionnement et de la conception de déterminer les niveaux d'efforts que les structures peuvent supporter, mais également les propriétés amortissantes qu'elles peuvent développer.

1.3. Caractéristiques d'un problème dynamique

Dans un problème dynamique, la charge et la réponse varient avec le temps : une étude dynamique est donc plus complexe et moins rapide qu'une étude statique. Les forces d'inerties sont inhérentes au comportement dynamique des structures.

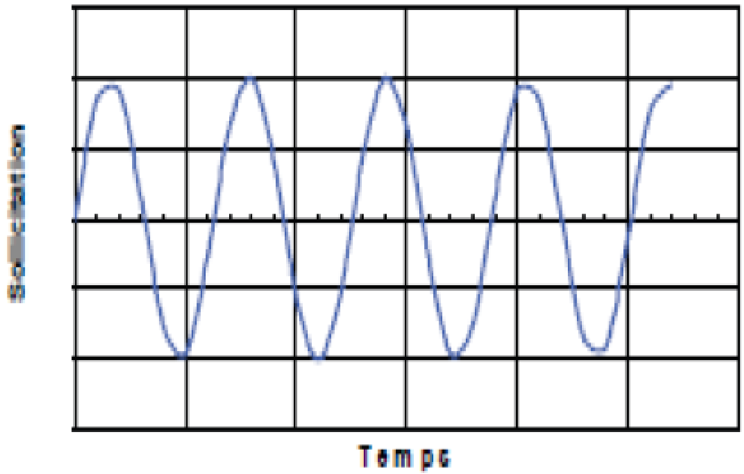
Chapitre 1 : Introduction a la dynamique des structures

1.4. Types de chargements

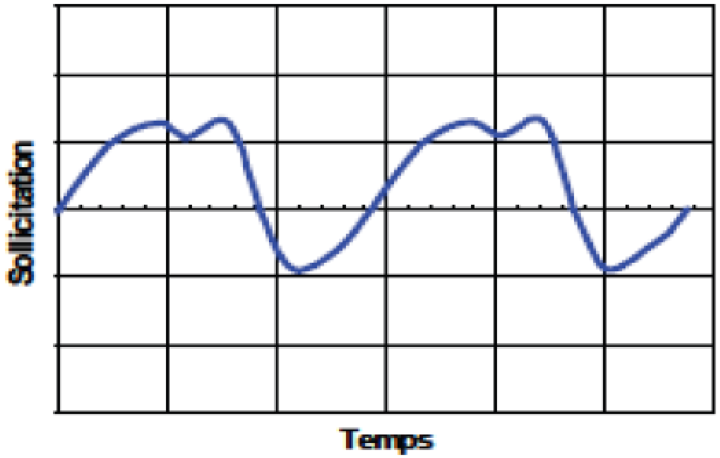
Périodique :

Les chargements périodiques sont constitués de charges répétitives qui conservent la même évolution dans le temps sur un grand nombre de cycles (machines alternatives).

Le chargement harmonique est un cas particulier d'un chargement périodique ; dans ce cas, la sollicitation est décrite par une fonction sinusoïdale (machines tournantes).



Chargement harmonique



Chargement périodique anharmonique

Chapitre 1 : Introduction a la dynamique des structures

1.4. Types de chargements

Non périodique

Les charges non périodiques sont des charges variant de façon arbitraire dans le temps sans périodicité. Ces charges sont soit des impulsions de courte durée, soit des chargements de longue durée et de formes quelconques données.

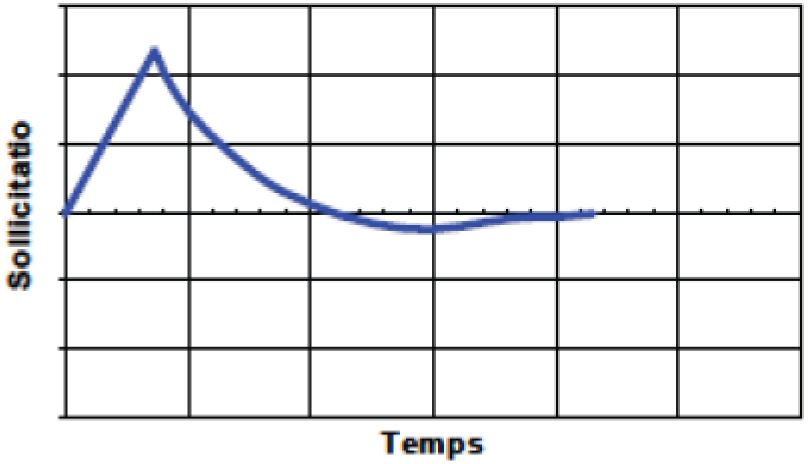
Charge impulsive : caractérisée par une sollicitation de courte durée (choc, explosion, rupture d'une pièce...).

Charge quelconque : la sollicitation est définie par une variation temporelle quelconque donnée.

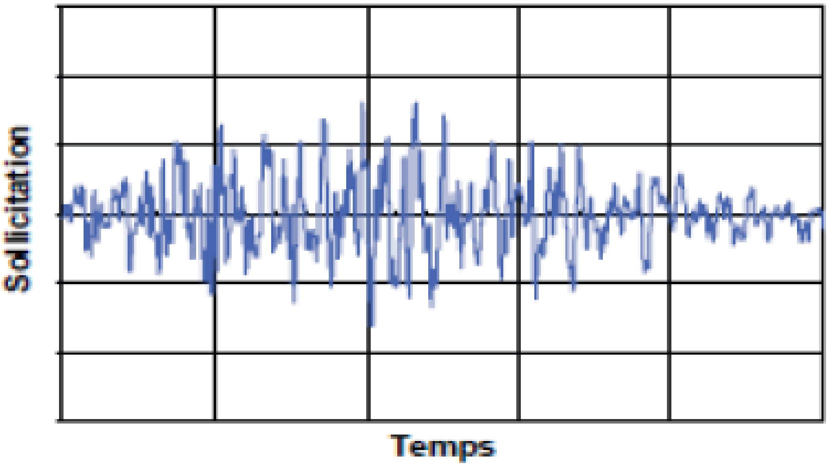
Chapitre 1 : Introduction a la dynamique des structures

1.4. Types de chargements

Non périodique



Chargement impulsif



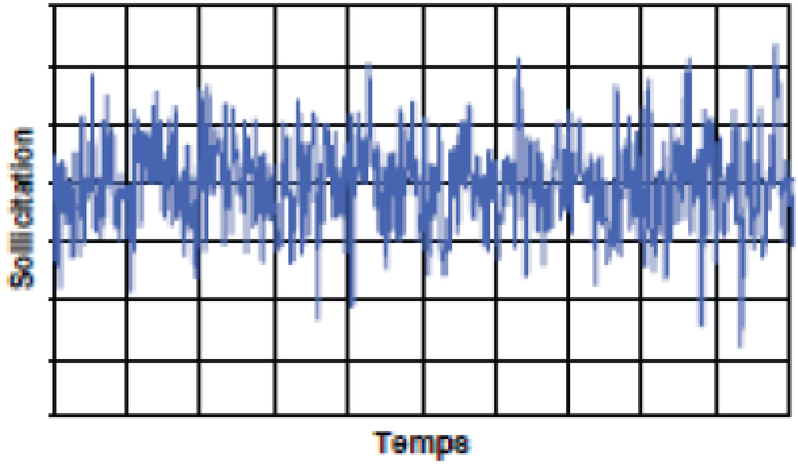
Chargement quelconque

Chapitre 1 : Introduction a la dynamique des structures

1.4. Types de chargements

<u>Chargement aléatoire</u>

Le chargement est dit dynamique aléatoire si l'évolution de la charge n'est pas parfaitement connue mais peut être définie de manière statistique (impacts de roulement pour les trains, collision de véhicules, séismes, ...). Cette partie ne sera pas abordée dans ce cours.



Chargement aléatoire

Chapitre 1 : Introduction a la dynamique des structures

1.5. Équation du mouvement

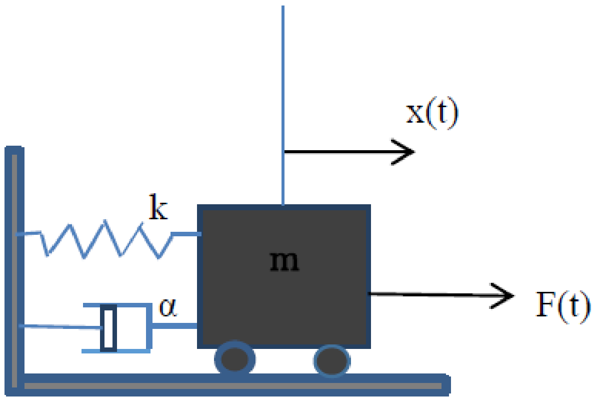
On suppose que les efforts s'appliquent au centre de gravité de la masse,

La force extérieure appliquée caractérise la sollicitation F;

La force de rappel élastique $F_k = kx$;

La force due à l'amortissement $F_\alpha = \alpha\dot{x}$;

La force d'inertie s'exerçant sur la masse $F_i = m\ddot{x}$.



Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\sum F_{ext} = m\ddot{x} \Longrightarrow F - F_k - F_\alpha = m\ddot{x} \Leftrightarrow m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F$$

C'est l'équation du mouvement d'un système à 1DDL

La solution de cette équation est la **somme** de la solution de l'équation **homogène** obtenue en annulant le second membre et la solution **particulière**.

Chapitre 1 : Introduction a la dynamique des structures

1.6. Résolution de l'équation du mouvement - Oscillations libres

L'équation **homogène** de l'équation différentielle est l'équation caractérisant les oscillations libres :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0 \qquad (2)$$

Les mouvements du système en l'absence de chargement sont appelés oscillations libres.

L'équation différentielle admet comme solution :

$x(t) = Ce^{st}$ Où C est une constante d'intégration.

En substituant cette équation dans (2), on obtient :

$$(ms^2 + \alpha s + k)Ce^{st} = 0$$

$$\Leftrightarrow s^2 + \frac{\alpha}{m}s + \omega^2 = 0 \qquad (4) \qquad \text{où } \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Chapitre 1 : Introduction a la dynamique des structures

1.6. Résolution de l'équation du mouvement - Oscillations libres

1.6.1. Oscillations libres non amorties

Dans ce cas, l'amortissement est nul, c'est-à-dire, $\alpha = 0$ et l'équation (4) se réduit à :

$$s^2 + \omega^2 = 0 \Leftrightarrow s = \pm i\omega \tag{5a}$$

La solution de l'équation (2) prend la forme :

$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \tag{5b}$$

où A et B sont des constants d'intégration qu'on determine à l'aide des conditions initiales du déplacement $x(0) = x_0$ et de la vitesse $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

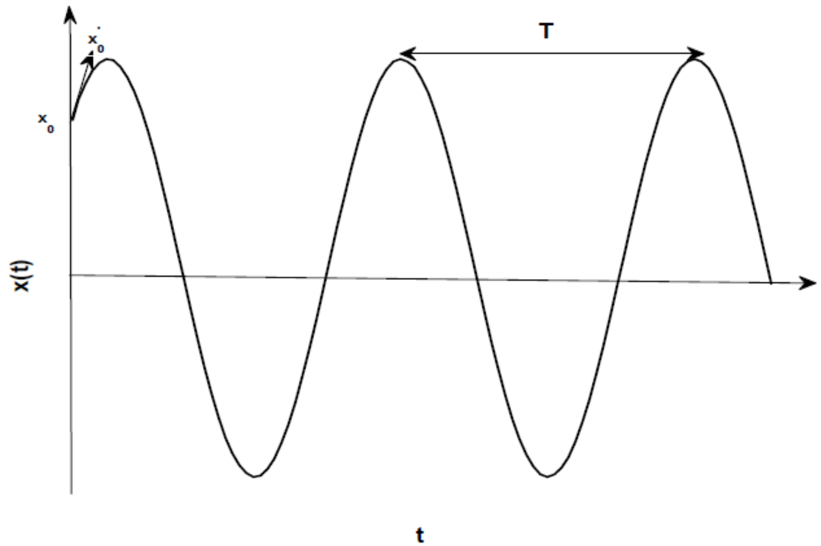
La solution de l'équation (2) est une fonction harmonique qui peut s'écrire :

$$x(t) = \rho\cos(\omega t - \theta) \qquad \text{où : } \rho = \sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2 + x_0^2} \text{ et } \theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{\dot{x}_0}{x_0\omega}\right)$$

Chapitre 1 : Introduction a la dynamique des structures

1.6. Résolution de l’équation du mouvement - Oscillations libres

1.6.1. Oscillations libres non amorties



$$x(t) = \rho\cos(\omega t - \theta)$$

ρ : L’amplitude du mouvement,

ω (rad/s) : La pulsation propre du mouvement,

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ (s): La période propre du mouvement,

La fréquence propre $f = \frac{1}{T}$ (Hz) est le nombre de cycles que décrit l'oscillateur non amorti en une seconde.

Chapitre 1 : Introduction a la dynamique des structures

1.6. Résolution de l'équation du mouvement - Oscillations libres

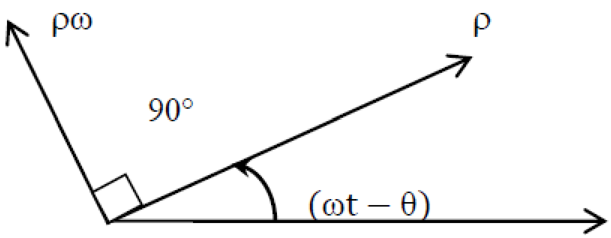
1.6.1. Oscillations libres non amorties

$$x(t) = \rho\cos(\omega t - \theta)$$

L'expression de la vitesse est donnée par :

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\rho\omega\sin(\omega t - \theta) = \rho\omega\cos\left(\omega t - \theta + \frac{\pi}{2}\right),$$

La valeur maximale de la vitesse est : $V_{max} = \rho\omega$. Le déphasage entre vitesse et position est de $\frac{\pi}{2}$.



Représentation vectorielle de l'amplitude et de la vitesse d'un oscillateur

Chapitre 1 : Introduction a la dynamique des structures

1.6. Résolution de l'équation du mouvement - Oscillations libres

1.6.2. Oscillations libres amorties

Dans ce cas, le coefficient d'amortissement est non nul, c'est-à-dire, $\alpha \neq 0$, les solution de l'équation (4) sont :

$$s_{1,2} = -\frac{\alpha}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 - \omega^2} \qquad (6a)$$

Et la solution de l'équation (2) est :

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} \qquad (6b)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes d'intégration.

Chapitre 1 : Introduction a la dynamique des structures

1.6. Résolution de l'équation du mouvement - Oscillations libres

1.6.2. Oscillations libres amorties

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} \qquad (6b)$$

On distingue trois cas particuliers suivant le signe du discriminant $\Delta = \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 - \omega^2$.

a. Système à amortissement critique

Il correspond au cas où le discriminant est nul, c'est-à-dire, $\Delta = 0$.

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \alpha_C = 2\sqrt{km}$$

Et , $s_1 = s_2 = -\frac{\alpha}{2m} = -\omega$

La réponse du système s'écrit :

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\omega t}$$

Où A et *B* sont des constantes d'intégration.

Chapitre 1 : Introduction a la dynamique des structures

1.6. Résolution de l'équation du mouvement - Oscillations libres

1.6.2. Oscillations libres amorties

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} \tag{6b}$$

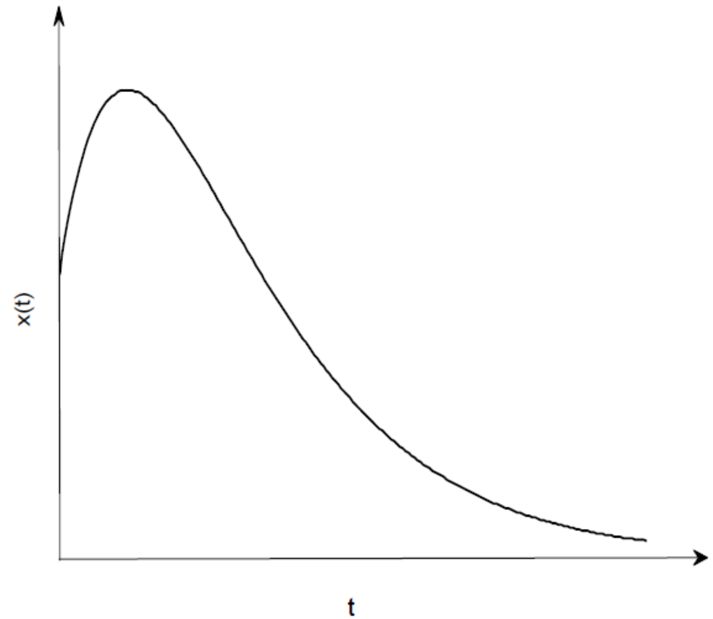
On distingue trois cas particuliers suivant le signe du discriminant $\Delta = \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 - \omega^2$.

a. Système à amortissement critique

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\omega t}$$

En exploitant les conditions initiales, on obtient

$$x(t) = (x_0 + (x_0\omega + \dot{x}_0)t)e^{-\omega t}$$



Chapitre 1 : Introduction a la dynamique des structures

1.6. Résolution de l'équation du mouvement - Oscillations libres

1.6.2. Oscillations libres amorties

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} \tag{6b}$$

On distingue trois cas particuliers suivant le signe du discriminant $\Delta = \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 - \omega^2$.

b. Système sur amortis

Ce cas correspond à **$\Delta > 0$** et la réponse du système s'écrit :

$$x(t) = \left(C_1 e^{\omega\sqrt{\xi^2-1}\,t} + C_2 e^{-\omega\sqrt{\xi^2-1}\,t}\right) e^{-\xi\omega t}$$

qui peut s'écrire en fonction des conditions initiales :

$$x(t) = \left(\frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\widehat{\omega}} \sinh(\widehat{\omega} t) + x_0 \cosh(\widehat{\omega} t)\right) e^{-\xi\omega t}$$

avec : $\widehat{\omega} = \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$ $\qquad\qquad$ $\xi = \frac{\alpha}{\alpha_C}$ le taux d'amortissement

Chapitre 1 : Introduction a la dynamique des structures

1.6. Résolution de l'équation du mouvement - Oscillations libres

1.6.2. Oscillations libres amorties

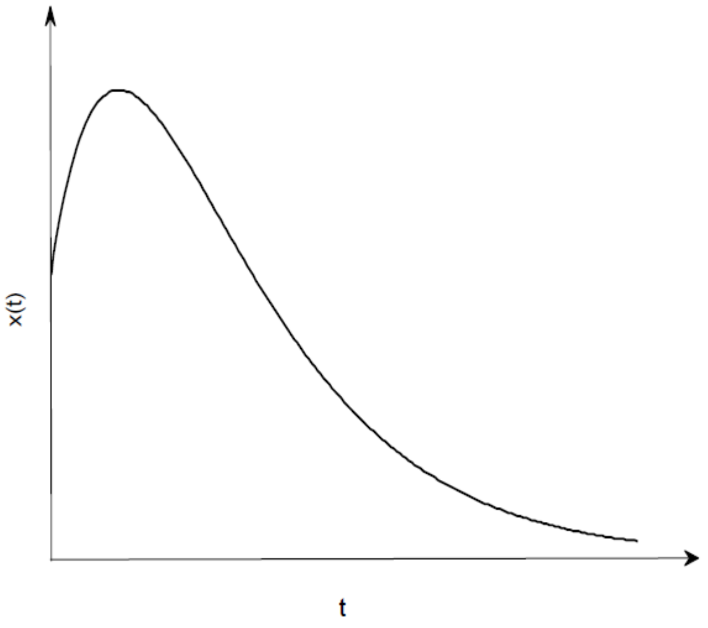
$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} \tag{6b}$$

On distingue trois cas particuliers suivant le signe du discriminant $\Delta = \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 - \omega^2$.

b. Système sur amortis

$$x(t) = \left(\frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\widehat{\omega}} \sinh(\widehat{\omega}t) + x_0 \cosh(\widehat{\omega}t)\right) e^{-\xi\omega t}$$

La réponse d'un système sur amorti n'est pas oscillatoire, elle est comparable à celle d'un amortissement critique.



Chapitre 1 : Introduction a la dynamique des structures

1.6. Résolution de l’équation du mouvement - Oscillations libres

1.6.2. Oscillations libres amorties

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} \qquad (6b)$$

On distingue trois cas particuliers suivant le signe du discriminant $\Delta = \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 - \omega^2$.

c. Systèmes sous amortis

Ce cas correspond à **$\Delta < 0$** et la réponse du système s’écrit :

$$s_{1,2} = -\xi\omega \pm i\omega\sqrt{1-\xi^2}$$

La pulsation propre amortie est définie par :

$$\omega_d = \omega\sqrt{1-\xi^2}$$

La réponse d'un système sous amorti s’écrit : $x(t) = \rho\cos(\omega_d t - \theta)e^{-\xi\omega t}$

Chapitre 1 : Introduction a la dynamique des structures

1.6. Résolution de l'équation du mouvement - Oscillations libres

1.6.2. Oscillations libres amorties

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} \tag{6b}$$

On distingue trois cas particuliers suivant le signe du discriminant $\Delta = \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 - \omega^2$.

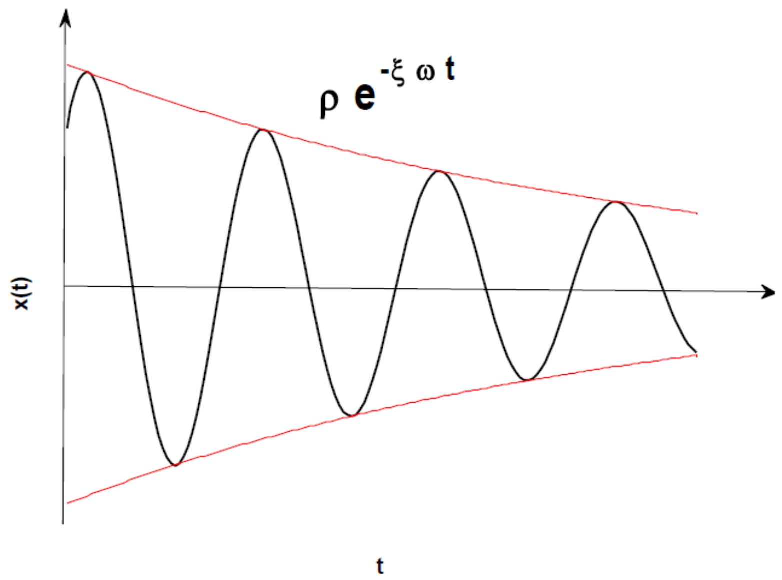
c. Systèmes sous amortis

$$x(t) = \rho \cos(\omega_d t - \theta) e^{-\xi \omega t}$$

où :

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_d}\right)^2 + x_0^2}$$

et $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{x_0 \omega_d}\right)$



Chapitre 1 : Introduction a la dynamique des structures

1.6. Résolution de l'équation du mouvement - Oscillations libres

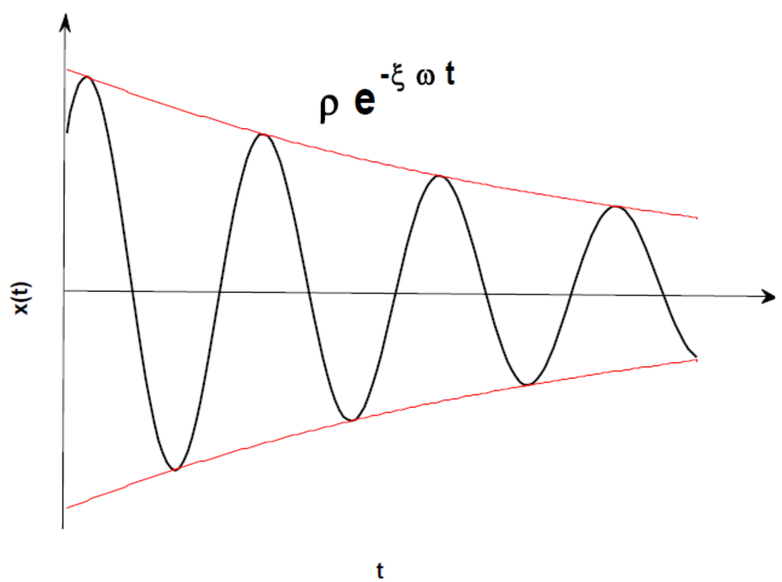
1.6.2. Oscillations libres amorties

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} \qquad (6b)$$

On distingue trois cas particuliers suivant le signe du discriminant $\Delta = \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 - \omega^2$.

c. Systèmes sous amortis

Le système sous amorti oscille de part et d'autre de la position d'équilibre à la pseudo pulsation. Dans le cas du mouvement pseudo périodique, l'amplitude diminue exponentiellement.



Le décrément logarithmique, est défini par :

$$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T_d)} = \xi\omega T_d$$

On a : $\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$

Chapitre 1 : Introduction a la dynamique des structures

1.7. Exercice d'application

Pour déterminer les propriétés dynamiques d'une structure à un seul degré de liberté, on effectue un essai de vibration libre en déplaçant le système de 20mm et en relâchant, on mesure un déplacement de 15mm au premier retour à un temps égal à 0.2s.

On demande de calculer la rigidité de la structure, l'amortissement et le rapport des amplitudes après trois cycles d'oscillations.

On donne M=1941Kg.

Chapitre 1 : Introduction a la dynamique des structures

1.7. Exercice d'application

1.7.1. Calcul de la rigidité de la structure :

On a :

$$\delta = \ln\frac{x(t)}{x(t+T_d)} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \delta = \ln\frac{x_0}{x_1} \approx 2\pi\xi$$

Alors $\xi \approx \frac{1}{2\pi}\ln\frac{20}{15} \Rightarrow \xi \approx 0.0458$

La pulsation propre du système est donnée par :

$$\omega = \frac{2\pi}{0.2}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \omega = 31.45\text{rad/s}$$

La rigidité du système est donc :

$$k = m\omega^2 \Rightarrow k = 1941 \times 31.45^2 = 1920\text{kN/m}$$

Chapitre 1 : Introduction a la dynamique des structures

1.7. Exercice d’application

1.7.2. Calcul de l'amortissement de la structure :

On a : $\alpha = \xi\alpha_c$

Où l'amortissement critique α_c est exprimé par :

$\alpha_c = 2m\omega \Rightarrow \alpha_c = 2 \times 1941 \times 31.45 = 122088\text{Ns/m}$

Ce qui implique que : $\alpha = 0.0458 \times 122088 \Rightarrow \alpha = 5592\text{Ns/m}$

Chapitre 1 : Introduction a la dynamique des structures

1.7. Exercice d'application

1.7.3. Calcul du rapport des amplitudes après trois cycles d'oscillations :

Le décrément logarithmique est défini par :

$$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T_d)} = \ln \frac{x_{N-1}}{x_N} \quad \text{(N est le nombre de cycles).}$$

On a : $\frac{x_0}{x_N} = \frac{x_0}{x_1}\frac{x_1}{x_2}\frac{x_2}{x_3} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{x_{N-1}}{x_N} = e^{\delta}e^{\delta}e^{\delta} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots e^{\delta} = e^{N\delta}$

$$\Leftrightarrow \delta = \frac{1}{N}\ln\frac{x_0}{x_N} \Leftrightarrow \frac{x_0}{x_N} = e^{N\delta}$$

Alors $\frac{x_0}{x_3} = e^{3\delta} \Rightarrow \frac{x_0}{x_3} = e^{3\left(\ln\frac{x_0}{x_1}\right)} = \left(\frac{x_0}{x_1}\right)^3 \Rightarrow \frac{x_0}{x_3} = \;\; 2.3703.$