

# Chapitre 4: Régulation numérique: principe et implémentation

Les systèmes échantillonnés comme les systèmes à temps continu, doivent en général satisfaire à **un cahier des charges** qui impose, **en boucle fermée, un certain nombre de performances** (qui d'ailleurs sont les mêmes qu'en temps continu) : **précision, rapidité, marge de stabilité et limitation du dépassement.**

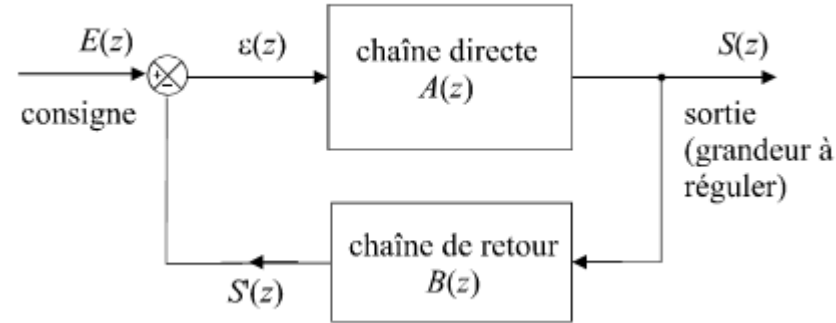
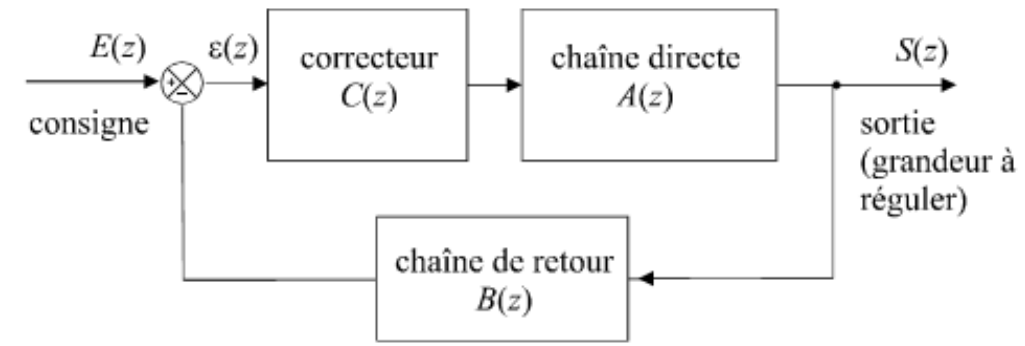


Figure.1 Schéma général d'un système échantillonné asservi.

Considérons un système constitué d'une chaîne directe et d'une chaîne de retour. La plupart du temps, on ne choisit ni les lois de fonctionnement des systèmes  $A(z)$  et  $B(z)$ , ni, bien sûr, leurs fonctions de transfert qui, en général, sont des données imposées par la conception même du système asservi en cours d'élaboration.

## Rôle du correcteur

L'idée consiste à introduire dans la chaîne directe, en amont du système  $A(z)$ , un dispositif supplémentaire de fonction de transfert  $C(z)$ , appelé **correcteur numérique** et dont le rôle essentiel doit consister à modifier les performances du système initial.



Cela revient à dire que nous transformons les fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée de manière à imposer à **l'ensemble de fonctionner selon le cahier des charges voulu**.

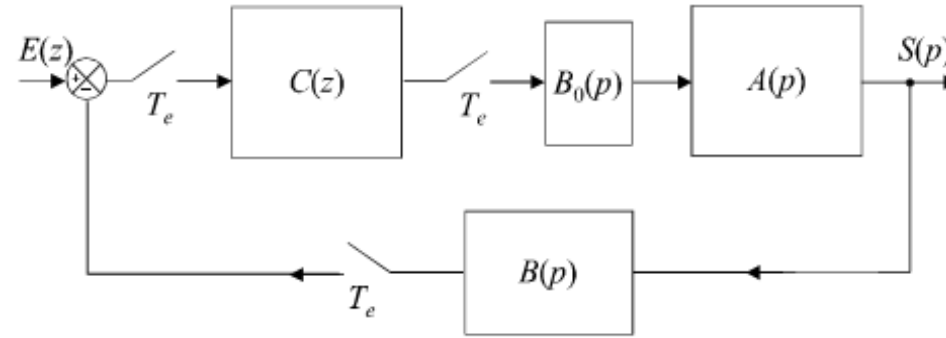
Si  $G_i(z)$  et  $H_i(z)$  sont les fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée du système initial et  $G_c(z)$  et  $H_c(z)$  les fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée du système corrigé, on aura :

$$G_i(z) = A(z)B(z) \qquad H_i(z) = \frac{A(z)}{1 + A(z)B(z)}$$
$$G_c(z) = A(z)B(z)C(z). \qquad H_c(z) = \frac{A(z)C(z)}{1 + A(z)B(z)C(z)}$$

Tout l'art de la correction des systèmes échantillonnés consiste à choisir **la bonne fonction de transfert  $C(z)$**  pour ce correcteur numérique de manière à régler **chaque performance sur sa valeur requise, sans perturber, bien sûr, le fonctionnement du système**. Ces corrections sont en général assurées par un ordinateur.

## Correction numérique d'un système à temps continu

Très souvent, on choisit, pour des questions de souplesse et de précision, de corriger numériquement un système à temps continu. Cette figure représente le schéma de la boucle d'asservissement correspondante. Un bloqueur doit être intercaler entre le correcteur numérique et le système à commander.



On peut appliquer les techniques de recherche d'un équivalent de de la boucle d'asservissement étudiées au chapitre précédent (que ce soit un équivalent à temps continu ou à temps discret).

### Problèmes spécifiques liés aux correcteurs numériques

Dans le cas des systèmes **à temps continu**, il a été relativement facile d'identifier les trois actions correctives simples : **action proportionnelle**, **action dérivée** et **action intégrale** et visualiser immédiatement, par exemple sur un **diagramme de Bode**, l'influence que ce type d'action avait sur le comportement fréquentiel, donc sur les performances.

Dans l'asservissements échantillonnés, on peut toujours présupposer un principe d'équivalence entre les actions correctives élémentaires en temps continu et la forme correspondante en  $z$  :

$$\text{Action proportionnelle : } C(p) = K \quad \leftrightarrow \quad C(z) = K$$

$$\text{Action intégrale : } C(p) = \frac{1}{p} \quad \leftrightarrow \quad C(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$\text{Action dérivée : } C(p) = p \quad \leftrightarrow \quad C(z) = 1 - z^{-1}$$

## Tentatives d'actions correctives simples

### 1. Amélioration de la précision

L'action intégrale améliore la précision du système, mais elle peut bousculer les autres performances, de manière souvent imprévisible.

#### a. Correcteur à action intégrale

L'étude menée au chapitre précédent à propos de la précision d'un système asservi à temps discret nous a conduit à la conclusion suivante : **la présence, dans la fonction de transfert en boucle ouverte, d'un intégrateur (i.e. d'un pôle égal à 1) assure la nullité de l'erreur de position**, c'est-à-dire la précision statique parfaite. Si **ce pôle est au moins double** (s'il y a au moins deux intégrateurs dans la chaîne directe), **l'erreur de vitesse est nulle, autrement dit la précision dynamique parfaite est assurée**. Par conséquent, **pour améliorer simplement la précision, en boucle fermée, d'un système à temps discret, on peut choisir un correcteur de fonction de transfert égale à :**

$$C(z) = \frac{K}{(1 - z^{-1})^n}$$

## b. Conséquence sur les autres performances

Dans l'exemple suivant on analyse l'influence de l'introduction d'un intégrateur sur le comportement global d'un asservissement.

Soit un système à temps discret de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(z)$  placé dans une boucle à retour unitaire, avec :

$$G(z) = \frac{2}{1 - 0,5z^{-1}} = \frac{2z}{z - 0,5}$$

$$\text{En boucle fermée : } H(z) = \frac{2z}{3z - 0,5}$$

Et par conséquent l'équation de récurrence est donnée par :  $s_k = 0,17s_{k-1} + 0,67e_k$ .

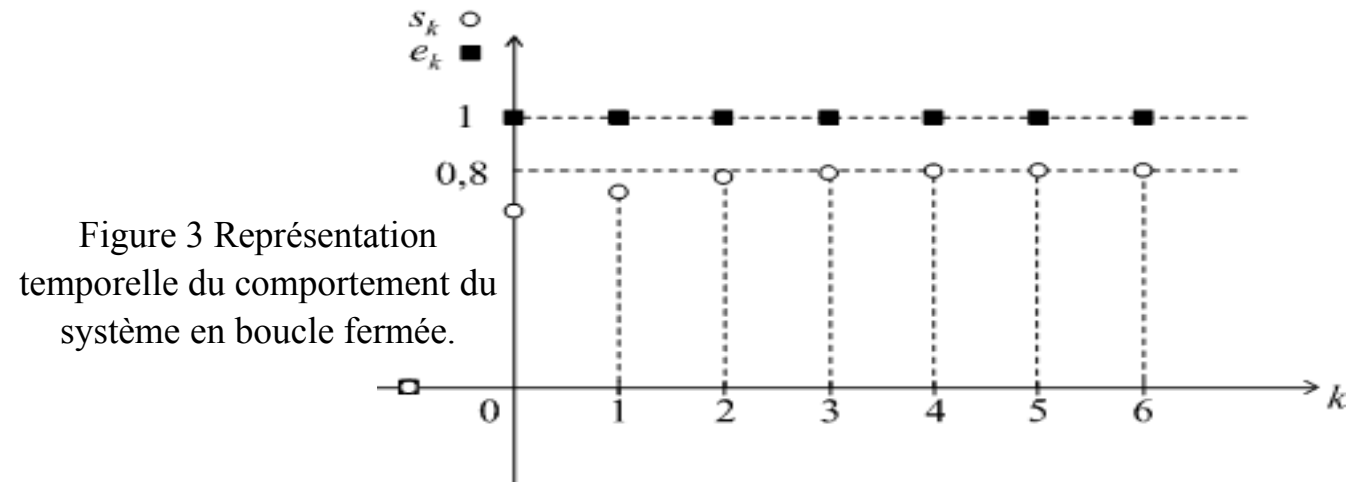
Ce système est stable en boucle fermée puisque l'unique pôle de la fonction de transfert en boucle fermée est inférieur à 1 :

$$p_1 = \frac{0,5}{3} = 0,17 < 1$$

Considérons les suites d'échantillons d'entrée (échelon unité) et de sortie (tableau 1) et représentons-les graphiquement (Figure 3).

$e_k$	1	1	1	1	1	1	1
$s_k$	0,667	0,777	0,796	0,799	0,800	0,800	0,800

Tableau 1 Simulation de la suite d'échantillons.



L'erreur de position a pour valeur :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + G(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \frac{2z}{z - 0,5}} = \frac{1 - 0,5}{1 - 0,5 + 2} = 0,2 = 20 \%$$

Introduisons un intégrateur dans la chaîne directe. On a, à présent :

$$G(z) = \frac{K}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{2z}{z - 0,5} = \frac{2z^2}{(z - 1)(z - 0,5)}$$

Avec  $K = 1$  dans un premier temps.

La fonction de transfert en boucle fermée devient :

$$H(z) = \frac{2z^2}{(z - 1)(z - 0,5) + 2z^2} = \frac{2z^2}{3z^2 - 1,5z + 0,5} = \frac{2}{3 - 1,5z^{-1} + 0,5z^{-2}}$$

Et l'équation de récurrence devient:

$$s_k = 0,5s_{k-1} - 0,17s_{k-2} + 0,67e_k$$

Les pôles de cette fonction de transfert sont les racines de l'équation  $3z^2 - 1,5z + 0,5 = 0$ .

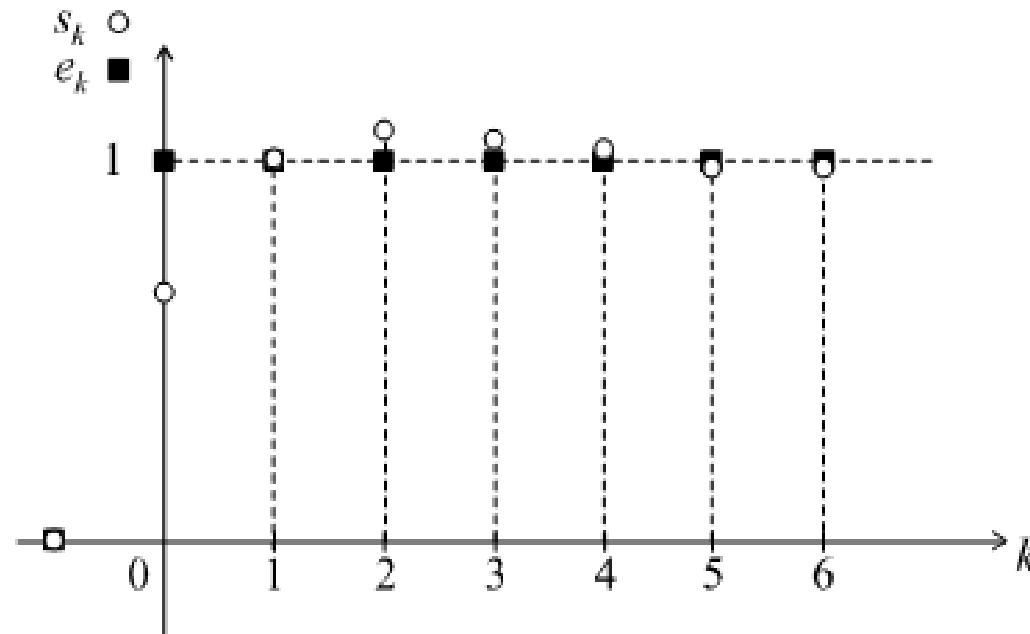
En effet :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1,5)^2 - 6 = -3,75 \quad p_{1/2} = \frac{1,5 \pm j\sqrt{3,75}}{6} \Rightarrow |p_1| = |p_2| = 0,41$$

La condition de stabilité est donc toujours vérifiée (leurs modules sont inférieurs à 1). Les modules de ces pôles sont plus proches de 1 que l'unique pôle du système non corrigé (qui était égal à 0,17). On peut donc en déduire que la marge de stabilité est légèrement diminuée par l'ajout du correcteur (elle reste néanmoins très confortable).

Construisons un tableau avec les suites d'échantillons d'entrée (échelon unité) et de sortie (tableau 2) et représentons-les graphiquement

$e_k$	1	1	1	1	1	1	1
$s_k$	0,667	1,000	1,056	1,028	1,005	0,998	0,998



On note la présence d'un faible dépassement ce qui corrobore la légère perte de marge de stabilité

## 2. Compensation de la perte de stabilité par placement des pôles

On ajoute un gain  $K$  dans la chaîne directe en plus de l'intégrateur dans le système que nous venons d'étudier.

$$G(z) = \frac{K}{1-z^{-1}} \cdot \frac{2z}{z-0,5} = \frac{2Kz^2}{(z-1)(z-0,5)} \text{ avec } K \neq 1$$

La fonction de transfert en boucle fermée :

$$H(z) = \frac{2Kz^2}{(1+2K)z^2 - 1,5z + 0,5}$$

Cette fois, on a :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1,5)^2 - 2(1+2K) = 0,25 - 4K$$

Pour augmenter la marge de stabilité, on doit chercher à réduire le module des pôles. Le discriminant restant négatif tant que  $K > 0,0625$ , nous pouvons partir du principe que les pôles resteront complexes conjugués :

$$p_{1/2} = \frac{1,5 \pm j\sqrt{4K - 0,25}}{2(1+2K)}$$

$$|p_1| = |p_2| = \frac{\sqrt{(1,5)^2 + 4K - 0,25}}{2(1+2K)} = \frac{1}{\sqrt{2(1+2K)}}$$

Il suffit de choisir une valeur de K qui correspond à une valeur souhaitée pour le module de chaque pôle, par exemple :

$$|p_1| = |p_2| = 0,25 \text{ pour } K = 3,5$$

On a alors :

$$H(z) = \frac{7}{8 - 1,5z^{-1} + 0,5z^{-2}}$$

ce qui correspond à l'équation de récurrence :  $s_k = 0,1875s_{k-1} - 0,0625s_{k-2} + 0,875e_k$

$e_k$	1	1	1	1	1	1	1
$s_k$	0,875	1,039	1,015	1,000	0,999	1,000	1,000

Tableau 3 Simulation de la suite d'échantillons.

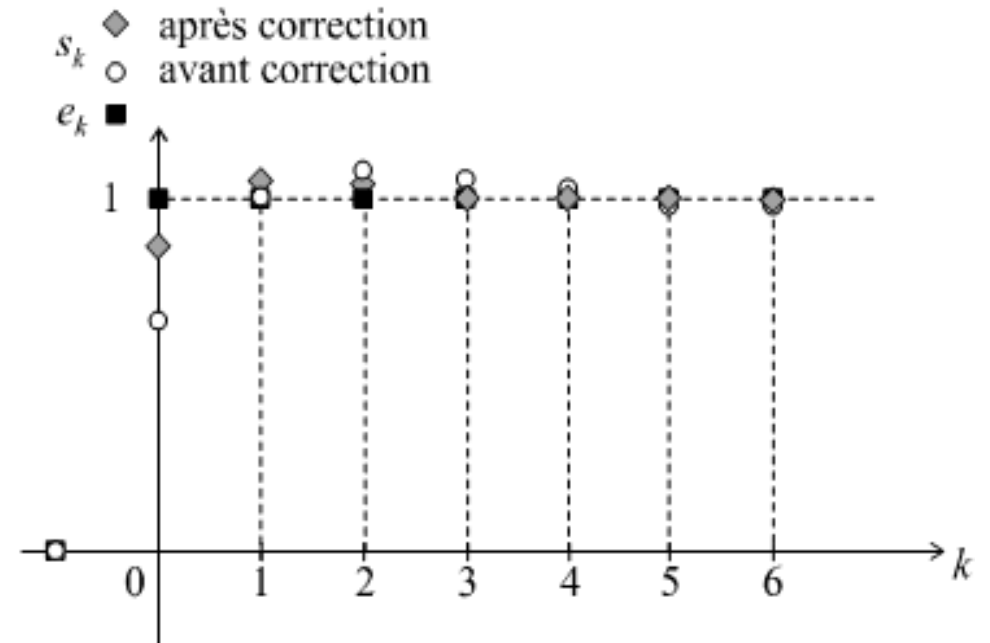


Figure 5 Représentation temporelle du comportement du système en boucle fermée après correction

### 3. Action dérivée

Soit un système échantillonné  $A(z)$  placé dans une boucle de régulation à retour unitaire et précédé d'un correcteur à action dérivée possède une fonction de transfert  $C(z)$  pour étudier l'influence de ce dernier sur le système, avec :

$$A(z) = \frac{1}{(z - 0,1)}$$

$$C(z) = K (1 - z^{-1}) \text{ avec } K > 0$$

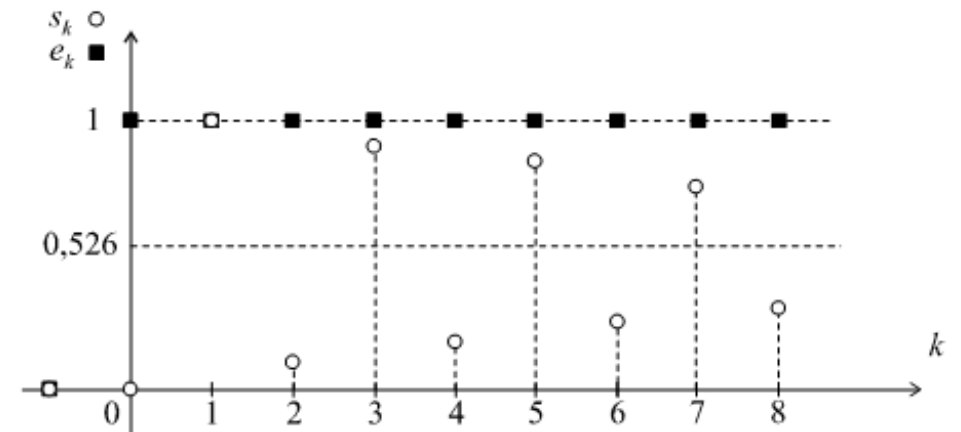
La fonction de transfert en boucle fermée du système non corrigé est :  $H_i(z) = \frac{A(z)}{1 + A(z)} = \frac{1}{z + 0,9}$

L'unique pôle de cette fonction de transfert est :  $p_1 = -0,9$

Ce pôle possède un module inférieur à 1 mais sa valeur est proche de **la limite d'instabilité** ; le système est donc stable en boucle fermée **mais mériterait sans doute d'être corrigé pour disposer d'une marge de sécurité plus confortable**. L'équation de récurrence en boucle fermée étant :  $s_k = -0,9s_{k-1} + e_{k-1}$

$e_k$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$s_k$	0	1	0,1	0,910	0,181	0,837	0,247	0,778	0,300

Tableau 4 Simulation de la suite d'échantillons.



Le système est stable, mais peu stable si l'on en croit le régime oscillatoire très peu amorti. De plus, il est très peu précis.

En présence du correcteur à action dérivée, on a :

$$G(z) = C(z)A(z) = \frac{K(1 - z^{-1})}{z - 0,1} = \frac{K(z - 1)}{z(z - 0,1)}$$

La fonction de transfert en boucle fermée du système corrigé est donc :  $H(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{K(z - 1)}{z(z - 0,1) + K(z - 1)} = \frac{K(z - 1)}{z^2 + (K - 0,1)z - K}$

L'équation de récurrence correspondante est :  $s_k = (0,1 - K)s_{k-1} + Ks_{k-2} + Ke_{k-1} - Ke_{k-2}$

Calculons les pôles de cette fonction de transfert, cette fois, on a :  $\Delta = b^2 - 4ac = (K - 0,1)^2 + 4K$

Ce discriminant étant toujours positif, on a :

$$p_{1/2} = \frac{-(K - 0,1) \pm \sqrt{(K - 0,1)^2 + 4K}}{2}$$

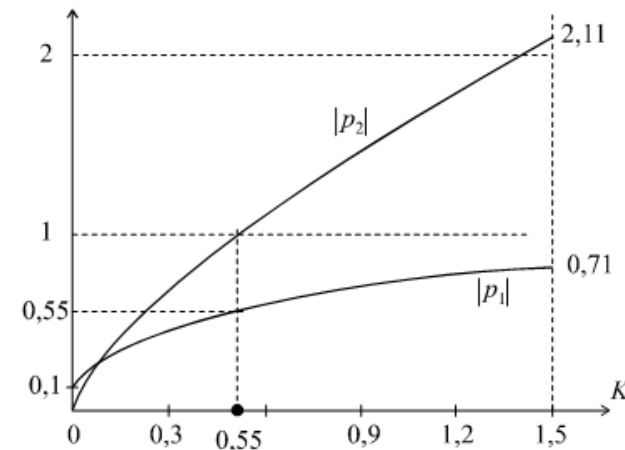
$$|p_1| = \frac{0,1 - K + \sqrt{(K - 0,1)^2 + 4K}}{2}$$

$$|p_2| = \frac{K - 0,1 + \sqrt{(K - 0,1)^2 + 4K}}{2}$$

On peut représenter, sur un même graphique, les variations de  $|p_1|$  et de  $|p_2|$  en fonction de  $K$  (Figure 7). Pour que le système soit stable, il faut que les deux pôles aient un module inférieur à 1.

On en déduit donc :  $K < 0,55$ .

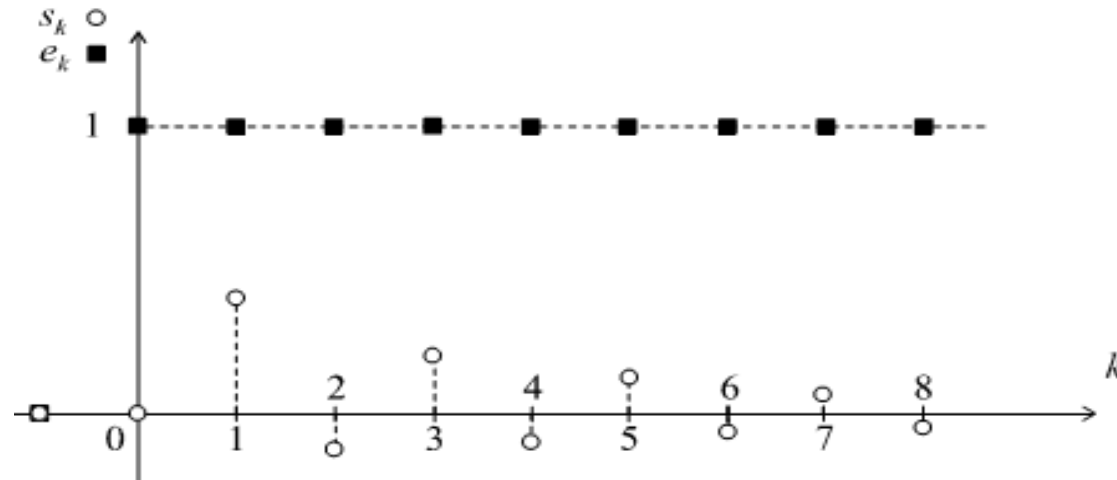
Choisissons par exemple  $K = 0,4$  puis calculons et traçons la suite d'échantillons en sortie du système lorsque celui-ci est soumis à un échelon unité .



Dans ce cas, on a :

$$s_k = -0,3s_{k-1} + 0,4s_{k-2} + 0,4e_{k-1} - 0,4e_{k-2}$$

$e_k$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$s_k$	0	0,400	-0,120	0,196	-0,107	0,110	-0,076	0,067	-0,050



Le système est effectivement plus stable puisqu'il converge vers une valeur finie beaucoup plus vite, ce qui est conforme au calcul des nouveaux pôles.

$$|p_1| = 0,5 \quad |p_2| = 0,8$$

Dans ce cas, on a : Toutefois, ce type de correction est inacceptable puisque l'erreur de position atteint à présent 100 %.