Université Djilali Bounaama –Khemis Miliana

Faculté des Sciences et de la Technologie

L1- ST-SM. Maths2

Chapitre 4 : Fonctions à pluieurs variables

Mathématiques 2 (L1-ST-SM)

Présenté par Leila Slimane

Chapitre 1

Fonctions à Plusieurs Variables

1.1 Notions de base

On commence par donner la notion d'une norme.

Définition 1.1.1 *Soit E un espace véctoriel réel ou complexe. Une norme sur E est une application $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :*

i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$,

ii) $\forall \lambda \in \Bbbk,\ \forall x \in E :\ \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ *(homogénéité),*

iii) $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*

Exemple 1.1.1 *Soit $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. L'espace $\mathbb{R}^n$ peut être muni de l'une des normes suivantes :*

1. $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$.
2. $\|x\|_2 = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_n)^2}$.
3. $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|)$.

Définition 1.1.2 *Une fonction réelle de plusieurs variables est une application :*

$$\begin{aligned} f: \quad & D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ & x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto f(x). \end{aligned}$$

Exemple 1.1.2 *Les fonctions f et g définies respectivement par :*

$$\begin{aligned} f \quad & : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \quad & f(x,y) = 4x - 7y + 1, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g \quad & : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto \quad & g(x,y,z) = \tfrac{\sin(xyz)}{x^2+y^2+(z-1)^2}, \end{aligned}$$

sont des fonctions de plusieurs variables.

Définition 1.1.3 *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de plusieurs variables. Alors :*

- *D est appelé le domaine de définition de la fonction f (l'ensemble de x pour lesquels cette fonction est définie).*
- *L'ensemble $f(D) = \{f(x),\ x \in D\}$ est appelé l'image de D par f.*
- *Si $F \subset \mathbb{R}$, on appelle l'image réciproque de F par f, l'ensemble noté $f^{-1}(F)$ où*

  $f^{-1}(F) = \{x \in D,\ f(x) \in F\}$.

Exemple 1.1.3

1. *Le domaine de définition de la fonction f définie par :*

   $f(x,y) = 4x - 7y + 1$ *est* $D_f = \mathbb{R}^2$.

2. *Soit g la fonction définie par $g(x,y) = \ln(2x-y)$. Alors le domaine de définition de g est :*

   $D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2x - y > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2x > y\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y < 2x\}$.

   D_g est le demi plan situé au dessous de la droite $y = 2x$.

3. *Considérons la fonction h donnée par $h(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Son domaine de définition est donné par :*

   $D_h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 9 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 9\}$.

   Comme $x^2 + y^2 = 9$ est l'équation du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $r = 3$. Le domaine D_h est l'intérieur de ce cercle (le cercle est inclus aussi dans D_h).

1.2 Limites

Dans ce qui suit on munit $\mathbb{R}^n$ d'une normes quelconque des trois normes équivalentes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$. Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage d'un point a sauf peut être en a, et soit $l \in \mathbb{R}$.

Définition 1.2.1 *On dit que la fonction f admet l pour limite au point a si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x - a\| < \delta, \ \|f(x) - l\| < \varepsilon,$$

et on écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

On note que $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ et $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$. Dire que $x \to a$ signifie que toutes les coordonnés de x tendrent vers les coordonnés de a à la fois et indépendamment ; il y'a une infinité de chemins à parcourir pour faire tendre x vers a. Par exemple en dimension 2, un point (x, y) peut tendre vers $(0, 0)$, d'une infinité de manières, par exemple :

- le long de l'axe horizontal, c'est-à-dire $y = 0$ et $x \to 0$,
- le long de l'axe vertical, c'est-à-dire $x = 0$ et $y \to 0$,
- le long d'une courbe quelconque, par exemple la prabole $y = x^2$.

Remarque 1.2.1 *Les opérations algébriques sur les limites concernant somme, différence, produit, quotient et composition déjà vues dans le cas d'une variables restent valables pour le cas d'une fonction à plusiaurs variables.*

Théorème 1.2.1 *Si une fonction admet une limite en un point alors cette limite est unique.*

On donne quelques remarques sur la limite dans le cas de deux variables.

1. La limite de $f(x, y)$ existe quand (x, y) tend vers (a, b) si elle est indépendante du chemin choisi.
2. Pour montrer qu'une limite n'existe pas il suffit de trouver deux chemins différents qui donnent deux valeurs différentes de la même limite.

3. Si on utilise le changement $y = mx$ où m est un paramètre on obtient que $(x, y) \to (0, 0)$ est équivalent à $x \to 0$. Dans ce cas, si on trouve que la limite dépend du paramètre m la limite n'existe pas. Si elle ne dépend pas de m on peut rien conclure.
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) \neq \lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{y\to b} f(x, y))$ en général.
5. Le passage en coordonnées polaires : $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$ est une technique qui nous aide à déterminer si la limite existe ou n'existe pas quand $(x, y) \to (0, 0)$. En effet $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ et par la suite $(x, y) \to (0, 0)$ est équivalent à $r \to 0$. Si la limite existe elle ne doit pas dépendre de θ.

Proposition 1.2.1 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie au voisinage d'un point (a, b), sauf peut être en (a, b), et soit $l \in \mathbb{R}$. Supposons que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ existe et $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = l$. Supposons de plus que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{y\to b} f(x, y)$ existe et que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x, y)$ existe alors :*

$$\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x, y)) = l = \lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x, y)).$$

Exemple 1.2.1 *Calculer la limite suivante :*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tfrac{x^3 y}{x^2+y^2}.$$

Passant en coordonnées polaires :

$$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta),\ r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi[.$$

On aura :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tfrac{x^3 y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \tfrac{r^4 \cos^3\theta \sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r^2 \cos^3\theta \sin\theta = 0.$$

Donc la limite existe et elle est égale à zéro.

Exemple 1.2.2 *La limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \tfrac{5xy}{x^2+y^2}$ n'existe pas. En effet si on passe en coordonées polaires :*

$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$, *on aura :*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5xy}{x^2 + y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{5r^2 \cos\theta \sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} 5\cos\theta \sin\theta = 5\cos\theta \sin\theta.$$

Elle dépend de θ, donc la limite n'existe pas.

Exemple 1.2.3 *Calculer* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{7x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
En utilisant le changement $y = mx$ où m est un paramètre ($(x, y) \to (0, 0)$ est équivalent à $x \to 0$) on obtient que :

$$\frac{7x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{7x^2 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{(7 - m^2)x^2}{(1 + m^2)x^2} = \frac{(7 - m^2)}{(1 + m^2)}.$$

Alors on a :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{7x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{7x^2 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{(7 - m^2)}{(1 + m^2)},$$

elle dépend de m donc la limite n'existe pas.

1.3 Continuité

Définition 1.3.1 *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage d'un point a. On dit que la fonction f est continue en a si et seulement si : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ et qu'elle est continue sur D si elle est continue en tout point de D.*

Les fonctions usuelles sont continues sur leur domaine de définition.

Exemple 1.3.1 *Soit $f(x, y) = 3x^2 - 7y + 1$ et $(a, b) = (1, 2)$.*

On a :

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(1,2)} 3x^2 - 7y + 1 = -10 = f(1, 2).$$

Donc f est continue au point $(1, 2)$.

Théorème 1.3.1

1. *La somme et le produit de deux applications continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ sont continues.*
2. *La composée d'une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ par une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue.*

Exemple 1.3.2 *Étudier la continuité de la fonction f définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On remarque que le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}^2$.

1. *La fonction f est continue si $(x,y) \neq (0,0)$ car la fonction $(x,y) \to x^3y$ est continue et la fonction $(x,y) \to x^2+y^2$ est continue, donc leur fraction est continue.*
2. *Le cas $(x,y) = (0,0)$. la fonction f est continue en $(x,y) = (0,0)$ si : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$.*

   On a $f(0,0) = 0$ et d'après l'exemple 1.2.1 la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^2+y^2} = 0$, donc l'égalité $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ est vérifiée, c'est-à-dire f est continue en $(0,0)$.
   Par la suite f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 1.3.3 *Étudier la continuité de la fonction f définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^2$. Elle est continue quand $(x,y) \neq (0,0)$, car c'est une fonction rationnelle. Quand $(x,y) = (0,0)$ la fonction f est discontinue en $(0,0)$ puisque d'après l'exemple 1.2.1 la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^2+y^2}$ n'existe pas. Alors f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0\}$.

1.4 Dérivées partielles

Définition 1.4.1 *Soit f une fonction définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^n$. On dit que f admet une dérivée partielle première (ou d'ordre 1) par rapport à la variable x_i au point $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in D$ si la fonction d'une seule variable $x_i \mapsto f(a_1, a_2, \cdots, x_i, a_{i+1,} \cdots a_n)$*

admet une dérivée en a_i. Autrement dit, la dérivée partielle de f par rapport à x_i au point $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, est défnie par :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \cdots, a_i + h, a_{i+1}, \cdots a_n) - f(a_1, a_2, \cdots, a_i, a_{i+1}, \cdots a_n)}{h}$$

si cette limite existe.

Dans le cas d'une fonction à deux variables $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on a deux dérivées partielles au point (α, β) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\alpha + h, \beta) - f(\alpha, \beta)}{h} \qquad \text{(dérivée partielle suivant } x\text{)},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\alpha, \beta + h) - f(\alpha, \beta)}{h} \qquad \text{(dérivée partielle suivant } y\text{)}.$$

On peut les notées aussi par :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = \partial_x f \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = \partial_y f.$$

Remarque 1.4.1 *Afin d'évaluer la dérivée partielle par rapport à x_i, il suffit de dériver en x_i l'éxprésion de f en traitant les autres variables comme des constantes.*

Exemple 1.4.1 *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = 2xy^3 + y\sin(z) + z\cos(4x)$.*
Alors : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2y^3 - 4z\sin(4x)$,

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 6xy^2 + \sin(z)$,

$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = y\cos(z) + \cos(4x)$.

Exemple 1.4.2 *Soit :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5xy}{x^2+y^2} & si\ (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & si\ (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- *Si $(x, y) \neq (0, 0)$ alors :*

  $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{5xy}{x^2+y^2}\right) = -5y\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad et \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{5xy}{x^2+y^2}\right) = 5x\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$
- *Si $(x, y) = (0, 0)$ il faut passer par la définiton en limite des dérivées partielles afin de déterminer si elles existent ou non. On a :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0.$$

Donc les dérivées partielles existent en $(0,0)$ (malgrè que f n'est pas continue en $(0,0)$ d'après l'exemple 1.3.3).

Remarque 1.4.2 *On sait que si une fonction réelle d'une seule variable est dérivable en un point alors elle est continue en ce point, mais ce n'est pas le cas pour une fonction de plusieurs variables : l'existence des dérivées partielles en un point n'implique pas la continuité en ce point.*

Définition 1.4.2 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. La fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est dite de classe $C^1(U)$ si toutes les fonctions dérivées partielles existent et elles sont continues sur U.*

Proposition 1.4.1 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si la fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $C^1(U)$ alors elle est continue sur U.*

1.5 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Définition 1.5.1 *Soit f une fonction définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^n$. Supposons que f admet une dérivée partielle par rapport à la variable x_i au point $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in D$. On dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 2, notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, au point a par rapport à x_j et x_i si la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R}$ admet elle-même une dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})$ selon x_j :* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})$.

Dans le cas d'une fonction à deux variables on a :

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y))$ on dérive deux fois par rapport à x,
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y))$ on dérive une fois par rapport à x, puis une fois par rapport à y.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y))$ on dérive une fois par rapport à y, puis une fois par rapport à x.

– $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y))$ on dérive deux fois par rapport à y.

Les dérivées secondes peuvent être notées par d'autres notations :

– $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \partial_{xx} f = f''_{xx}$,
– $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \partial_{yx} f = f''_{yx}$,
– $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \partial_{xy} f = f''_{xy}$,
– $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \partial_{yy} f = f''_{yy}$.

Exemple 1.5.1 *Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction suivante :*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \sin(x^2 + xy).$$

On a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x+y)\cos(x^2+xy)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(x^2+xy)$.

Donc :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}((2x+y)\cos(x^2+xy))$$
$$= 2\cos(x^2+xy) - (2x+y)^2\sin(x^2+xy),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)) = \frac{\partial}{\partial y}((2x+y)\cos(x^2+xy))$$
$$= \cos(x^2+xy) - x(2x+y)\sin(x^2+xy),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(x\cos(x^2+xy)) = \cos(x^2+xy) - x(2x+y)\sin(x^2+y),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = \frac{\partial}{\partial y}(x\cos(x^2+xy)) = -x^2\sin(x^2+xy).$$

Définition 1.5.2 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. La fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est dite de classe $C^2(U)$ si toutes les fonctions de dérivées partielles d'ordre 2 existent et elles sont continues sur U.*

Théorème 1.5.1 *(de Schwartz) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si la fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $C^2(U)$ alors :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad \textit{pour tout } i = 1, \cdots, n \textit{ et } j = 1, \cdots, n \textit{ tels que } i \neq j.$$

Exemple 1.5.2