CHAPITRE 2

APPLICATIONS LINÉAIRES

En algèbre linéaire, on s'intéresse aux applications qui préservent la structure d'espace vectoriel, c'est-à-dire, les applications d'un espace vectoriel dans un autre qui préservent les combinaisons linéaires. Dans ce chapitre, qui est un peu l'axe de tout le reste du document, nous allons donner essentiellement les définitions et les résultats elémentaires de base.

Les notions abordées dans ce chapitre sont :

— Définitions : Application linéaire, Noyau, image et rang d'une application linéaire.

2.1 Définitions

Definition 2.1 *Soient E et E' deux espaces vectoriels sur le même corps $\Bbbk$ et f une application de E dans E'. On dit que f est linéaire, si :*

1. $f(v+w) = f(v) + f(w)$, $\forall v, w \in E$,
2. $f(\lambda v) = \lambda f(v), \forall v \in E, \forall \lambda \in \Bbbk$.

L'ensemble des applications linéaires de E dans E' est noté $\mathcal{L}_{\Bbbk}(E, E')$ ou, plus simplement, $\mathcal{L}(E, E')$.

Si une application linéaire f de E dans E (même espace de d´epart et d'arrivée). on dit que f est un endomorphisme de E. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $End_{\Bbbk}(E)$ ou, plus simplement $End(E)$.

Si une application linéaire f est bijective, on dit que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Remark 2.1
1. *Si f est linéaire, on a : $f(0) = 0$. Il suffit de faire $\lambda = 0$ dans $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.*
2. *D'après 1) et 2), une application $f : E \to E'$ est linéaire, si et seulement si, pour tout $\lambda \in \Bbbk$ et pour tout $x, y \in E$, on a*

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

Example 2.1 *Soient E un $\Bbbk$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. On appelle injection canonique de F dans E, l'application $i : F \to E$ définie par,*

$$\forall x \in F,\ i(x) = x,$$

Alors i est une application linéaire.

Example 2.2

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (2x+y, y-z), \end{array}$$

est une application linéaire.

Si $v = (x, y, z)$ et $w = (x', y\prime, z')$, on a :

$$\begin{aligned} f(v+w) &= f(x+x', y+y', z+z') \\ &= (2(x+x') + (y+y'), y+y'-z-z') \\ &= (2x+y, y-z) + (2x'+y', y'-z') \\ &= f(v) + f(w), \\ f(\lambda v) &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &= (2\lambda x + \lambda y, \lambda y - \lambda z) \\ &= \lambda(2x+y, y-z) \\ &= \lambda f(v). \end{aligned}$$

Comme on peut s'en rendre compte par cet exemple, la linéarité de f tient au fait que les composantes x, y, z dans l'espace d'arrivée (ici $\mathbb{R}^2$) apparaissent toutes à la puissance 1. plus précisément chaque composante dans l'espace d'arrivée est un polynôme homogène de degré 1 en x, y, z. Nous verrons cela d'une manière plus précise dans la suite.

Ainsi, par exemple, l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x^2-y, y+z) \end{array}$$

n'est pas linéaire (ni 1), ni 2) de la définition 2.1 ne sont satisfaites à cause du terme au carré).

Example 2.3 *Soient $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ les espaces vectoriels des applications $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ respectivement continues et continues à dérivée continue. L'application :*

$$\begin{array}{rccc} D: & \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & f' \end{array}$$

est une application linéaire, puisque :

$$\begin{array}{lcll} D(f+g) & = & (f+g)' = f'+g' & = Df+Dg \\ D(\lambda f) & = & (\lambda f)' & = \lambda f' \end{array}$$

si $\lambda\in\mathbb{R}$, et f et $g\in\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

Example 2.4 *Soit $v_0 \neq 0_E$ un vecteur de E, l'application translation définie par*

$$\begin{array}{rccc} t: & E & \to & E \\ & v & \mapsto & v+v_0 \end{array}$$

n'est pas linéaire (noter, par exemple, que : $t(0) = v_0 \neq 0_E$).

Example 2.5 *Soient E un $\Bbbk$-espace vectoriel de dimension finie n et $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E. Alors l'application f définie par,*

$$\begin{array}{rccc} t: & \Bbbk^n & \to & E \\ & (\alpha_1,...,\alpha_n) & \mapsto & f((\alpha_1,...,\alpha_n)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i. \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. On en déduit donc que tout $\Bbbk$-espace vectoriel de dimension finie n est isomorphe à $\Bbbk^n$.

Proposition 2.1 *i) Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur le même corps $\Bbbk$. $f: E\to F$ et $g: F\to G$ deux applications linéaires. Alors $g\circ f$ est une application linéaire.*

ii) Soit $f : E \to F$ un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors $f^{-1} : F \to E$ est aussi un isomorphisme d'espaces vectoriels.

iii) Deux espaces vectoriels de dimension finie et de même dimension sont isomorphes.

Proof. *i*) Soient $x \in E, y \in E$ et $\alpha \in \Bbbk$, alors on a

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x+y) &= g(f(x+y)) \\ &= g(f(x)+f(y)) \quad (\text{ car } f \text{ est linéaire }) \\ &= g(f(x))+g(f(y)) \quad (\text{ car } g \text{ est linéaire }) \\ &= (g \circ f)(x)+(g \circ f)(y).\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\alpha x) &= g(f(\alpha x)) \\ &= g(\alpha f(x)) \quad (\text{ car } f \text{ est linéaire }) \\ &= \alpha g(f(x)) \quad (\text{ car } g \text{ est lincaire }) \\ &= \alpha(g \circ f)(x).\end{aligned}$$

Donc $g \circ f$ est linéaire.

ii) Supposons que $f : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Soient $x \in F, y \in F$ et $\alpha \in \Bbbk$. Soient $a \in E$ et $b \in E$, tels que $f(a) = x$ et $f(b) = y$. Comme f est linéaire, alors on a $f(a+b) = x+y$, donc on atra

$$f^{-1}(x+y) = f^{-1}(f(a+b)) = a+b = f^{-1}(x)+f^{-1}(y).$$

On a aussi

$$f^{-1}(\alpha x) = f^{-1}(\alpha f(a)) = f^{-1}(f(\alpha a)) = \alpha a = \alpha f^{-1}(x).$$

Donc f^{-1} est lincaire.

iii) Soient E et F deux espaces vectoricls de même dimension n, alors d'après l'exemple précédent, E et F sont isomorphes à $\Bbbk^n$. Donc si $\varphi : E \longrightarrow \Bbbk^n$ et $\psi : F \longrightarrow \Bbbk^n$ sont deux isomorphismes d'espaces vectoriels, alors $\psi^{-1} \circ \varphi : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriel. □

Proposition 2.2 *Soient E et E' deux $\Bbbk$-espaces vectoriels. Pour f et g deux éléments de $L_{\Bbbk}(E, E')$ et pour α élément de $\Bbbk$, on définie $f+g$ et $\alpha \cdot f$, par*

$$\forall x \in E, \quad (f+g)(x) = f(x)+g(x) \text{ et } (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x).$$

Alors $(L_{\Bbbk}(E, E'), +, \cdot)$ est un $\Bbbk$-espace vectoriel.

Proof. Il suffit de vérifier que $L_{\Bbbk}(E, E')$ est un sous-espace vectoriel de E'^E le $\Bbbk$-cspace vectoriel de toutes les applications de E vers E'. □

Soient E et E' deux $\Bbbk$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $L_{\Bbbk}(E,E')$ est de dimension finie et on a

$$dim\left(L_K(E,E')\right) = dim(E) \times dim(E').$$

Proof. Soient $m = dim(E), n = dim(E'), (e_1, e_2, \ldots, e_m)$ une base de E et $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ une base de E'. Pour $(i,j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$, où pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathbb{N}_p = \{1, 2, \ldots, p\}$, on définit l'application $f_{ij} : E \longrightarrow E'$ par,

$$\forall x \in E, \quad f_{ij}(x) = x_j e'_i \quad \text{où } x = \sum_{j=1}^{m} x_j e_j.$$

Alors, $B = \{f_{ij} : (i,j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n\}$ forme une base de $L_K(E,E')$. En effet,
Soit $f \in L_{\Bbbk}(E,E')$, alors pour chaque $j \in \mathbb{N}_{m,}$, on a $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e'_i$.
Donc pour tout $x \in E$ avec $x = \sum_{j=1}^{m} x_j e_j$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^{m} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{m} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e'_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} x_j e'_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} f_{ij}(x). \end{aligned}$$

Donc B est une partie génératrice finie de $L_K(E,E')$.
Il est facile de vérifier que B est une partie libre, en remarquant que

$$\forall k \in \mathbb{N}_m, \quad f_{ij}(e_k) = \begin{cases} e'_i & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j. \end{cases}$$

$Card(B) = Card\left(\mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n\right) = m \times n$, donc $dim\left(L_K(E,E')\right) = m \times n$. □

2.2 Noyau, image et rang

Proposition 2.3 *Soient E et F deux $\Bbbk$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors,*

i) L'image par f d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F. En particulier, $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F, appelé image de f et noté Imf. Sa dimension est appelée rang de f et est notée

$$rg\ f = dim\left(Imf\right).$$

ii) L'image réciproque par f d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E. En particulier, $f^{-1}\left(\{0_F\}\right)$ est un sousespace vectoriel de E, appelé noyau de f et noté $ker(f)$.

Proof. i) Soit A un sous-espace vectoriel de E. Alors, $f(A) \neq \emptyset$, car $0_F = f(0_E)$, donc $0_F \in f(A)$.

Si $x \in A$, $y \in A$ et $\alpha \in K$, on a

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \text{ et } \alpha \cdot f(x) = f(\alpha \cdot x).$$

Comme $x + y \in A$ et $\alpha \cdot x \in A$, alors $f(x) + f(y) \in f(A)$ et $\alpha \cdot f(x) \in f(A)$.

ii) Soit, maintenant, B un sous-espace vectoriel de F. Alors $f^{-1}(B) \neq \emptyset$, car $f(0_E) = 0_F$ et $0_F \in B$, donc $0_E \in f^{-1}(B)$.

Si $x \in f^{-1}(B), y \in f^{-1}(B)$ et $\alpha \in K$, alors on a $f(x) \in B$ et $f(y) \in B$ et comme B est un sous-espace vectoriel de F et f linéaire, alors $f(x + y) \in f(B)$ et $f(\alpha \cdot x) \in f(B)$, donc $x + y \in f^{-1}(B)$ et $\alpha \cdot x \in f^{-1}(B)$. Rappelons que

$$z \in f^{-1}(B) \Longleftrightarrow f(z) \in B.$$

□

Remark 2.2 *Soient E et F deux $\Bbbk$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors*

1.
$$\ker(f) = \{x \in E : f(x) = 0_F\}$$
$$x \in \ker(f) \Longleftrightarrow f(x) = 0_F.$$

2.
$$\text{Imf} = \{f(x) : x \in E\}$$
$$y \in \text{Imf} \Longleftrightarrow \exists x \in E : y = f(x).$$

Proposition 2.4 *Soient E et F deux $\Bbbk$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors*

i) f est injetive $\Longleftrightarrow ker(f) = \{0_E\}$.

ii) f est surjetive $\Longleftrightarrow Imf = F$.

Proof. i) $\Longrightarrow$) Supposons que f est injective et soit $x \in ker(f)$. On a $f(x) = 0_F$ et comme f est linéaire, alors $f(0_E) = 0_F$, donc $f(x) = f(0_E)$ et puisque f est injective, alors $x = 0_E$. Ainsi, $ker(f) = \{0_E\}$.

$\Longleftarrow$) Supposons que $ker(f) = \{0_E\}$.

Soient $x \in E$ et $y \in E$, tels que $f(x) = f(y)$, a-t-on $x = y$?

Comme f est linéaire et $f(x) = f(y)$, alors on a $f(x - y) = 0_F$, donc $x - y \in ker(f)$, puis comme $ker(f) = \{0_F\}$, alors on s $x = y$ et par suite, f est injective.

ii) Trivial, car une application $f : E \longrightarrow F$ est surjective, si et seulement si, $f(E) = F$. □

Example 2.6 *Soit :*

$$D : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ P & \mapsto & P'. \end{array}$$

Le noyau de D est formé par les polynômes constants. D'autre part, $ImD = \mathbb{R}[x]$, car si $P \in \mathbb{R}[x], Q(x) := \int_0^x P(t)dt$ est un polynôme et on a $Q' = P$ c'est-à-dire $DQ = P$.

Example 2.7 *Soit :*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3(x,y,z) \longmapsto (x',y',z') \qquad \text{où :} \quad \begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2x + y - 3z \\ z' = 3x + 2y - 4z. \end{cases}$$

Ker$f$ est l'ensemble des triplets $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ qui vérifient le système :

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ 3x + 2y - 4z = 0. \end{cases}$$

On trouve facilement $x = 2\lambda, y = -\lambda, z = \lambda$; c'est-à-dire Ker f est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(2,-1,1)$.

Pour ce qui est de Im f, on a :

$(x',y',z') \in Imf$, si et seulement si, il existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant le système :

$$\{x + y - z = x'2x + y - 3z = y'3x + 2y - 4z = z'$$

Il s'agit donc de savoir pour quelles valeurs de x', y', z' ce système est compatible. En échelonnant, on trouve :

$$\begin{cases} x + y - z = x' \\ -y - z = y' - 2x' \\ -y - z = z' - 3x' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - y - z = x' \\ y + z = 2x' - y' \\ 2x' - y' + z' - 3x' = 0, \end{cases}$$

la condition de compatibilité est $2x' - y' + z' - 3x' = 0$ c'est-à-dire $x' + y' - z' = 0$. L'image de f est donc le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x' + y' - z' = 0$.

Proposition 2.5 *Soit $f \in \mathcal{L}(E,E')$ et $\{v_i\}_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.*

1. *Si f est injective et la famille de E $\{v_i\}_{i\in I}$ est libre, alors la famille $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ de E' est libre.*

2. *Si f est surjective et la famille $\{v_i\}_{i\in I}$ est génératrice de E alors la famille $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ est génératrice de E'.*

En particulier si f est bijective l'image d'une base de E est une base de E'.

Proof. 1. Supposons la famille $\{v_i\}_{i\in I}$ libre et soit f injective. Pour toute famille extraite $\{v_{\alpha_1}, \ldots, v_{\alpha_q}\}$, la relation

$$\lambda_1 f(v_{\alpha_1}) + \cdots + \lambda_q f(v_{\alpha_q}) = 0$$

implique $f(\lambda_1 v_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_q v_{\alpha_q}) = 0$, c'est-à-dire $\lambda_1 v_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_q v_{\alpha_q} \in Ker f$. Or Ker $f = \{0\}$, donc

$$\lambda_1 v_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_q v_{\alpha_q} = 0$$

et puisque la famille $\{v_i\}_{i\in I}$ est libre, on a $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_q = 0$. Donc la famille $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ est libre.2. Soit $y \in E'$ quelconque ; puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. D'autre part la famille $\{v_i\}_{i\in I}$ est génératrice, donc x est de la forme

$$x = \lambda_1 v_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_p v_{\alpha_p}$$

d'où : $f(x) = \lambda_1 f(v_{\alpha_1}) + \cdots + \lambda_p f(v_{\alpha_p})$ .y est donc combinaison linéaire d'éléments de la famille $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ et, puisqu'il est choisi arbitrairement dans E', la famille $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ est génératrice.
□

Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes, si et seulement si, ils ont même dimension.

Proof. En effet, s'il existe un isomorphisme $f : E \longrightarrow E'$, l'image par f d'une base de E est une base de E', donc E et E' ont même dimension. Réciproquement, supposons que $dimE = dimE'$ et soient $\{e_1, \ldots, e_n\}, \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ deux bases respectivement de E et E'. Considérons l'application $f : E \longrightarrow E'$ construite de la manière suivante :

- pour $k = 1, \ldots, n$ on pose : $f(e_k) = e'_k$;
- si $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ on pose : $f(x) = \sum_{k=1}^n x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^n x_k e'_k$,

(en d'autres termes, on définit f sur la base de E et on la prolonge par linéarité sur E tout entier). On vérifie facilement que f est linéaire et bijective (la vérification est laissée en exercice). □

Remark 2.3 *Comme on le voit de la démonstration, l'isomorphisme de E sur E' dépend du choix des bases dans E et dans E' et en général il n'y a pas d'isomorphisme canonique.*

Proposition 2.6 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une appligation linéaire. Alors*

$a)$ Pour tout sous-espace vectoriel G de E, on a

$$f^{-1}(f(G)) = G + ker(f).$$

$b)$ f est injective, si et seulement si, pour tout sous-espace vectoriel G de E, on a

$$f^{-1}(f(G)) = G.$$

c) Pour tout sous-espace vectoriel H de F, on a

$$f\left(f^{-1}(H)\right) = H \cap Imf.$$

d) f est surjective, si et seulement si, pour tout sous-espace vectoriel H de F, on a

$$f\left(f^{-1}(H)\right) = H.$$

Proof. *a*) Soit $x \in E$, alors on a

$$\begin{aligned}
& x \in f^{-1}(f(G)) \Longleftrightarrow f(x) \in f(G) \\
& \Longleftrightarrow \exists a \in G : f(x) = f(a) \\
& \Longleftrightarrow \exists a \in G : f(x-a) = 0 \\
& \Longleftrightarrow \exists a \in G : x - a \in ker(f) \\
& \Longleftrightarrow \exists a \in G, \exists b \in ker(f) : x = a + b \\
& \Longleftrightarrow x \in G + ker(f).
\end{aligned}$$

b) $\Longrightarrow$) Si on suppose que f est injective, alors $ker(f) = \{0\}$, donc, d'après a), pour tout sous-espace vectoriel G de E,

$$f^{-1}(f(G)) = G.$$

$\Longleftarrow$) Si on suppose que pour tout sous-espace vectoriel G de E, on a $f^{-1}(f(G)) = G$, alors en particulier, on a

$$f^{-1}\left(f\left(\{0_E\}\right)\right) = \{0_{E^3}\}.$$

Or $f\left(\{0_E\}\right) = \{f\left(0_E\right)\} = \{0_F\}$, donc

$$ker(f) = f^{-1}\left(\{0_F\}\right) = \{0_E\}.$$

c) $\subset$) Soit $y \in f\left(f^{-1}(H)\right)$. alors il existe $x \in f^{-1}(H)$, tel que $y = f(x)$.Comme $x \in f^{-1}(H)$, alors $f(x) \in H$, donc $y \in H \cap Imf$.

$\supset$) Soit $y \in H \cap \mathrm{Im} f$, alors on a

$$\begin{aligned}
& y \in H \cap Imf \Longrightarrow y \in H \text{ et } y \in Imf \\
& \Longrightarrow y \in H \text{ et } \exists x \in E, : y = f(x) \\
& \Longrightarrow x \in f^{-1}(H) \quad \text{ar } f(x) \in H \\
& \Longrightarrow f(x) \in f\left(f^{-1}(H)\right) \\
& \Longrightarrow y \in f\left(f^{-1}(H)\right).
\end{aligned}$$

d) $\Longrightarrow$) Supposons que f est surjective, alors $Imf = F$, donc pour tout sous-espace H de E, on a

$$f\left(f^{-1}(H)\right) = H \cap F = H.$$

$\Longleftarrow$) Supposons que pour tout sous-espace vectoriel H de F. on a

$$f\left(f^{-1}(H)\right) = H,$$

alors en particulier, on aura $f\left(f^{-1}(F)\right) = F$. Or $f^{-1}(F) = E$, donc $f(E) = F$, par suite, f est surjective. $\square$

Dans le cas où les espaces E et E' sont de dimension finie, les dimensions du noyau et de l'image de f sont liées par la relation donnée dans le théorème suivant, l'un des plus importants en Algèbre Linéaire :

[Théorème du rang] Soient E et E' deux espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \longrightarrow E'$ une application linéaire. On a alors :

$$dimE = rgf + dim(Kerf).$$

Proof. Supposons $dimE = n$, $dim\mathrm{Ker}\ f = r$ et montrons que $dim(Imf) = n - r$. Soit $\{w_1, \ldots, w_r\}$ une base de Ker f, et $\{v_1, \ldots, v_{n-r}\}$ une famille de vecteurs telle que $\{w_1, \ldots, w_r, v_1, \ldots, v_{n-}$ soit une base de E. Soit $\mathcal{B} = \{f(v_1), \ldots, f(v_{n-r})\}$. Montrons que $\mathcal{B}$ est une base de Imf.

- $\mathcal{B}$ engendre Imf. Soit $y = f(x) \in Imf$. Comme $x \in E$, x est de la forme $x = a_1 w_1 + \cdots + a_r w_r + b_1 v_1 + \cdots + b_{n-r} v_{n-r}$. On a donc :

$$\begin{aligned} y &= a_1 f(w_1) + \cdots + a_r f(w_r) + b_1 f(v_1) + \cdots + b_{n-r} f(v_{n-r}), \\ &= b_1 f(v_1) + \cdots + b_{n-r} f(v_{n-r}) \end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathcal{B}$ engendre Imf.

- $\mathcal{B}$ est libre. Supposons que $\lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_{n-r} f(v_{n-r}) = 0$; on aura

$$f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n-r} v_{n-r}) = 0,$$

donc :

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n-r} v_{n-r} \in Kerf.$$

Par conséquent, il existe $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{k}$ tels que :

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n-r} v_{n-r} = a_1 w_1 + \cdots + a_r w_r,$$

c'est-à-dire :

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n-r} v_{n-r} - a_1 w_1 - \cdots - a_r w_r = 0.$$

Puisque la famille $\{v_1, \ldots, v_{n-r}, w_1, \ldots, w_r\}$ est libre, les coefficients de cette combinaison linéaire sont tous nuls ; en particulier : $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_{n-r} = 0$, c'est-à-dire $\mathcal{B}$ est libre. $\square$

Pour montrer qu'une application linéaire est bijective, il faut montrer qu'elle est injective et surjective ; cependant, dans le cas de dimension finie, si la dimension de l'espace de départ et celle de l'espace d'arrivée sont les mêmes, il suffit de démontrer l'une des deux propriétés - soit l'injectivité, soit la surjectivité, on donc ce corollaire important.

Corollaire 2.1 *Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$, E, E' étant deux espaces vectoriels de même dimension finie (en particulier, par exemple, si $f \in End\ E$, avec E de dimension finie). Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est injective.*
2. *f est surjective.*
3. *f est bijective.*

Proof. Il suffit, bien entendu de montrer que 1 . est équivalent à 2.Comme on l'a vu, f est injective si et seulement si Ker $f = \{0\}$. Puisque $dimE = rgf + dim(\ker f)$, f est injective si et seulement si $dimE = rgf$, c'est-à-dire $dimE = dim(Imf)$. Or, par hypothèse, $dimE = dimE'$, donc f est injective si et seulement si $dim(Imf) = dimE'$. Puisque $Imf \subset E'$ cela équivaut à $Imf = E'$, c'est-à-dire f surjective. □

Remark 2.4 *Ce résultat est faux en dimension infinie, un contre-exemple : l'application :*

$$D : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$

est surjective et non injective.

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de E. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

$i)$ $E = keru \oplus Imu$.

$ii)$ $Imu = Imu^2$.

$iii)$ $keru = keru^2$.

$iv)$ $keru \cap Imu = \{0\}$.

Proof. $i) \Longrightarrow ii)$ Supposons que $E = keru \oplus Imu$ et montrons que $Imu = Imu^2$. Pour cela, remarquons d'abord que tout $u \in L_K(E)$, on a $Imu^2 \subseteq Imu$. Donc, il suffit de montrer que $Imu \subseteq Imu^2$. Pour cela, soit $y \in Imu$, alors il existe $x \in E$, tel que $y = u(x)$. Puisque $E = keru \oplus Imu$, alors $x = x_1 + u(x_2)$, avec $x_1 \in keru$, donc $y = u^2(x)$, par suite, $y \in Imu^2$.

$ii) \Rightarrow iii)$ Supposons que $Im(u) = Imu^2$ et montrons que $keru = keru^2$. Pour cela, remarquons aussi que tout $u \in L_K(E)$, on a $keru \subseteq keru^2$. Donc, il suffit de montrer que $keru^2 \subseteq keru$. D'après le théorème du rang, on a

$$dim(E) = dim(keru) + dim(Imu) = dim\left(keru^2\right) + dim\left(Imu^2\right).$$

Puisque $Imu = Imu^2$ alors $dim(keru) = dim(keru^2)$, par suite, on aura $keru = keru^2$.

$iii) \Longrightarrow iv)$ Supposons que $keru = keru^2$ et montrons que $keru \cap Imu = \{0\}$. Soit $y \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} & y \in keru \cap Imu \Leftrightarrow u(y) = 0 \text{ et } \exists x \in E : y = u(x) \\ & \Rightarrow u^2(x) = u(y) = 0 \qquad \Rightarrow x \in keru^2 \\ & \Rightarrow x \in keru \qquad \Rightarrow u(x) = 0 \qquad \Rightarrow y = 0 \end{aligned}$$

$iv \Rightarrow i)$ Trivial, car on sait que

$$E = keru \oplus Imu \Leftrightarrow \begin{cases} dim(keru) + dim(Imu) = dim(E) \\ \text{et} \\ keru \cap Imu = \{0\}. \end{cases}$$

□