

2. Précision des systèmes asservis échantillonnés

La précision d'un système est définie par les notions d'erreurs de position et de vitesse entre la grandeur de sortie et la consigne. On distingue la précision statique qui liée au régime permanent et la précision dynamique plutôt liée au régime transitoire.

Nous limiterons notre étude à la précision statique. En plus, nous supposons que les systèmes asservis étudiés sont stables.

2.1. Précision statique

Soit un système échantillonné asservi de fonction de transfert en boucle ouverte $G(z)$, placé dans une boucle à retour unitaire (Figure 6).

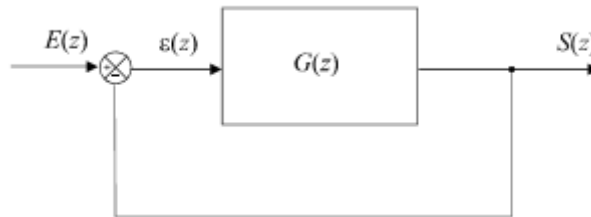


Figure 6 : Schéma d'un asservissement échantillonné à retour unitaire

2.1.1. Echelon de position

On définit l'erreur de position ε_p :

$$\varepsilon_p = \lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon_k \text{ pour une entrée en échelon unité}$$

D'après le théorème de la valeur finale, on a :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\left(\frac{z-1}{z} \right) \varepsilon(z) \right]$$

Avec :

$$\varepsilon(z) = E(z) - S(z) = E(z) - G(z)\varepsilon(z) \Rightarrow \varepsilon(z) = \frac{E(z)}{1 + G(z)}$$

Donc :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\left(\frac{z-1}{z} \right) \frac{E(z)}{1 + G(z)} \right]$$

Comme le signal d'entrée est un échelon unité, on a :

$$E(z) = \frac{z}{z-1} \Rightarrow \varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1 + G(z)} \right]$$

1.1.1. Echelon de vitesse

L'erreur de vitesse ε_v par :

$$\varepsilon_v = \lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon_k \text{ pour une entrée en rampe}$$

On a toujours :

$$\varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\left(\frac{z-1}{z} \right) \frac{E(z)}{1+G(z)} \right]$$

Le signal d'entrée est une rampe, alors on a :

$$E(z) = \frac{T_e z}{(z-1)^2} \Rightarrow \varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e}{(z-1)[1+G(z)]} \right]$$

1.1.2. Echelon d'accélération

$$E(z) = \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$$

$$\varepsilon_a = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)^2 G(z)]$$

2.2. Précision d'un système échantillonné du premier ordre

On considère un système échantillonné de fonction de transfert en boucle ouverte $G(z)$ placé dans une boucle à retour unitaire (Figure 7) avec :

$$G(z) = \frac{b}{1-az^{-1}} = \frac{bz}{z-a} \text{ avec } b > 0 \text{ et } 0 < a \leq 1$$

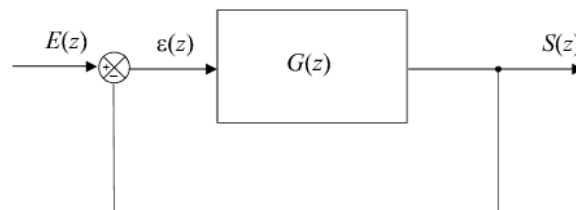


Figure 7 : Schéma d'un système asservi premier ordre placé dans une boucle à retour unitaire

Le système est stable en boucle fermée si l'unique pôle de la fonction de transfert en boucle fermée est inférieur à 1 :

$$\frac{a}{b+1} < 1$$

2.2.1. Erreur de position

L'erreur de position de ce système asservi est donné par :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1+G(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1 + \frac{b}{1-az^{-1}}} \right]$$

Donc :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1 + \frac{bz}{z-a}} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{z-a}{(b+1)z-a} \right] = \frac{1-a}{b+1-a}$$

Selon la condition de stabilité, le dénominateur de cette expression ne peut être nul.

Cette erreur de position est nulle, si $a = 1$, c.à.d. si la fonction de transfert en boucle ouverte $G(z)$ possède un pôle égale à 1 (On dit le système est parfaitement précis en boucle fermée).

2.2.2. Erreur de vitesse

L'erreur de vitesse du système asservi est donné par :

$$\varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e}{(z-1) \left[1 + \frac{bz}{z-a} \right]} \right]$$

Soit :

$$\varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e (z-a)}{(z-1) [z(1+b) - a]} \right] \rightarrow \infty$$

L'erreur de vitesse d'un système du premier ordre placé dans une boucle d'asservissement est donc infinie, sauf si $a = 1$, auquel cas :

$$\varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e (z-1)}{(z-1) [z(1+b) - 1]} \right] = \frac{T_e}{b}$$

2.3. Généralisation

La présence d'un pôle égal à 1 dans la fonction de transfert en boucle ouverte assure donc une bonne précision statique mais n'assure pas une bonne précision dynamique.

Soit un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(z)$ quelconque de la forme :

$$G(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^n} \cdot A(z)$$

Un tel système possède n pôles égaux à 1. La fonction de transfert en boucle ouverte est constituée, notamment, de n intégrateurs, étant donné que la forme :

$$\frac{1}{1-z^{-1}}$$

correspond $\frac{1}{p}$ (voir la table des équivalences).

L'erreur de position de ce système en boucle fermée est donné par :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1+G(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1 + \frac{A(z)}{(1-z^{-1})^n}} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{(z-1)^n}{(z-1)^n + z^n A(z)} \right]$$

Quelle que soit la valeur de n supérieure ou égale à 1 : $\varepsilon_p = 0$

Donc, la présence d'au moins un intégrateur dans la fonction de transfert en boucle ouverte assure bien la nullité de l'erreur statique.

L'erreur de vitesse du système en boucle fermée est donné par :

$$\varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e}{(z-1) [1+G(z)]} \right] = \frac{T_e}{\lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) + \frac{(z-1)A(z)}{(1-z^{-1})^n} \right]}$$

soit :

$$\varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e (z-1)^n}{(z-1) [(z-1)^n + z^n A(z)]} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e (z-1)^{n-1}}{[(z-1)^n + z^n A(z)]} \right]$$

Si $n = 1$, on a :

$$\varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e}{[(z-1) + z^n A(z)]} \right] = \frac{T_e}{A(1)} \neq 0$$

Si $n \geq 2$, on a :

$$\varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e (z-1)^{n-1}}{[(z-1)^n + z^n A(z)]} \right] = \frac{T_e}{A(1)} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^{n-1} = 0$$

Donc, la présence d'un intégrateur dans la fonction de transfert en boucle ouverte assure une erreur de vitesse finie d'autant plus faible que la période d'échantillonnage est faible. La présence d'au moins deux intégrateurs assure la nullité de l'erreur de vitesse.

3. Analyse temporelle des systèmes linéaires échantillonnés (discrets)

3.1. Réponses temporelles

Considérons un système linéaire échantillonné (discret) :

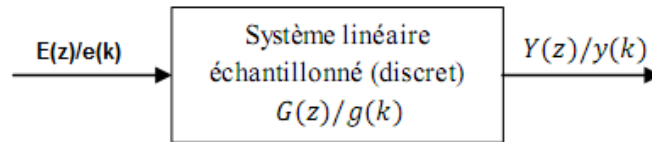


Figure 8 : Schéma fonctionnel d'un système linéaire échantillonné (discret)

La réponse temporelle d'un tel système à une entrée $e(k)$ $k > 0$ est alors donnée par la convolution numérique suivante :

$$y(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} g(k-i)e(i) \quad k \geq 0$$

La réponse d'un système échantillonné $y(k)$ à un signal d'entrée $e(k)$ peut être déterminée de différentes façons :

- Résoudre l'équation aux différences analytiquement ;
- Déterminer $Y(z)=G(z)E(z)$ et calculer la sortie $y(k)$ par transformée en 'z' inverse en supposant que les conditions initiales sont nulles.
- Décomposer $Y(z)/z$ en éléments simples et déterminer la réponse temporelle de chaque élément de $Y(z)$.

3.2. Réponse impulsionnelle

C'est la réponse de sortie d'un système résultante d'une entrée en impulsion de Dirac.

3.3. Réponse indicielle

C'est la réponse de sortie d'un système résultante d'une entrée en échelon unité.

Exemple

La figure 8 représente la réponse indicielle et impulsionnelle du système discret de premier ordre suivant :

$$G(z) = \frac{0.4877}{z-0.9512}$$

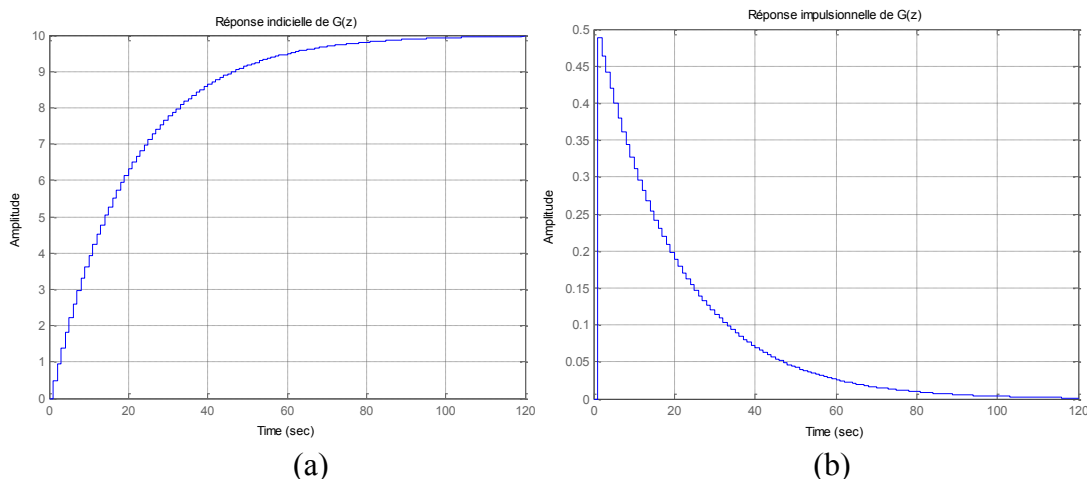


Figure 8 : (a) Réponse indicielle en boucle ouverte, (b) Réponse impulsionnelle de $G(z)$ en boucle ouverte.

3.4. Performances temporelles

Le but de l'analyse des systèmes échantillonnés est la détermination de ses performances statiques et dynamiques tels que la stabilité, la précision en utilisant les critères décrit précédemment. Les performances temporelles désirées sont généralement spécifiées relativement à la réponse indicielle ou impulsionnelle du système bouclé

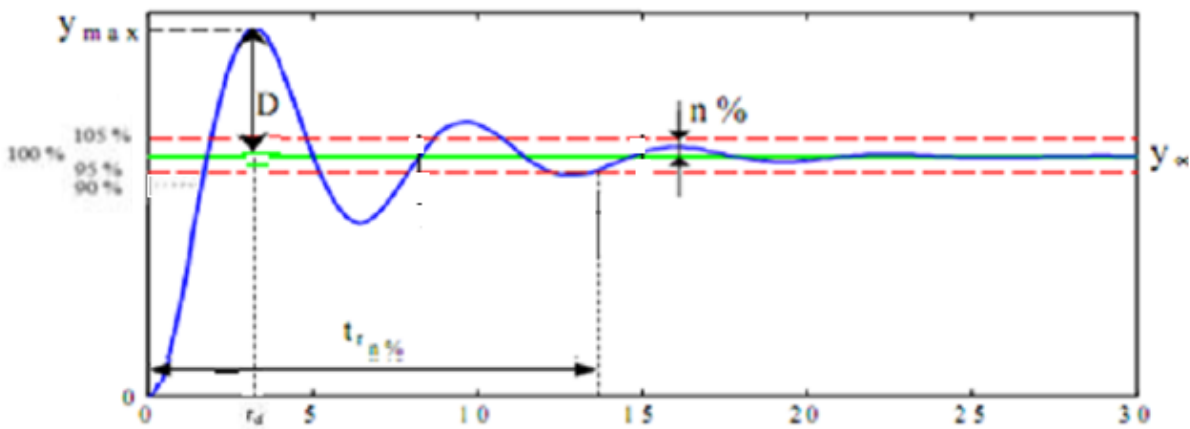


Figure 9 : Performances temporelles associées à une réponse transitoire à un échelon

- Un premier dépassement (pic) D : représente le degré d'amortissement (le degré de stabilité) du système ;
- Le temps de premier pic t_d : représente la rapidité du régime transitoire ;
- Le temps de montée t_m : le temps que met la réponse indicielle pour aller de 10% à 90% de sa valeur finale. Ce temps représente la rapidité du régime transitoire ;
- Le temps de réponse t_r : le temps nécessaire pour que la courbe de sortie atteigne et reste à l'intérieur d'une bande, exprimée en pourcentage (2% ou 5%), relativement à sa valeur finale. Il permet de mesurer la rapidité du système asservi ;
- L'erreur statique e_∞ : L'erreur statique du système est caractérisée par l'erreur en régime permanent en présence d'un échelon. Elle permet de mesurer la précision du système asservi.

En fait, on souhaite généralement obtenir un régime transitoire rapide et bien amorti. Le degré d'amortissement et rapidité du régime transitoire sont liés à la configuration des pôles et des zéros du système dans le plan complexe.

3.5. Gain statique

Le gain statique (K) du système échantillonné, égal à la valeur finale de la sortie sur l'amplitude de l'échelon. Considérons un système linéaire échantillonné de fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U_1(z)}$$

Si on met en entrée de ce système un échelon d'amplitude A :

$$u_1(kT) = Au(kT)$$

La sortie :

$$Y(z) = G(z)U_1(z) = G(z)\frac{Az}{z-1}$$

D'après le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{z-1}{z} Y(z) \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{z-1}{z} G(z) \frac{Az}{z-1} \right] = AG(1)$$

Donc, le gain statique (K) du système échantillonné :

$$K = \frac{AG(1)}{A} = G(1)$$

4. Réponse fréquentielle des systèmes linéaires échantillonnés

Soit un système LTI discret $G(z)$. Pour obtenir la réponse fréquentielle $G(e^{j\omega T})$, on remplace z par $e^{j\omega T}$. Cette réponse est caractérisée par deux paramètres :

- Le gain $|G(e^{j\omega T})|$
- La phase $\varphi = \arg(G(e^{j\omega T}))$

L'étude d'une réponse fréquentielle d'un système discret est similaire au système continu et peut être réalisé par :

- Le diagramme de Bode ;
- Le lieu de Nyquist ;
- Le lieu de Black-Nichols.

4.1. Marges de stabilité

Les critères de stabilité, permettent de déterminer si un système est stable ou non, sans donner de renseignements sur la "distance" à l'instabilité, c.à.d. la robustesse de la stabilité du système vis-à-vis d'une variation.

Marge de gain : elle est définie comme la réserve de gain dont on dispose avant d'arriver à l'instabilité. Prenons l'exemple de la figure suivante :

$$\Delta G = -20 \log |F_{BO}(e^{j\omega_{\pi} T_e})|$$

Avec la pulsation de coupure du déphasage ω_{π} définie par :

$$\arg(F_{BO}(e^{j\omega_{\pi} T_e})) = -\pi$$

Marge de phase

Elle définit la variation maximale admissible de la phase sans détériorer la stabilité du système. La marge de phase est :

$$\Delta \varphi = 180^\circ + \arg(F_{BO}(e^{j\omega_{co} T_e}))$$

Avec la pulsation de coupure du gain ω_{∞} définie par :

$$|F_{BO}(e^{j\omega_{co} T_e})| = 1$$