Notes

Un site utilisant Blog IMT

Systèmes de racines des algèbres de Lie semi-simples (Jules Martel)

Dans ces notes F désigne toujours un corps de caractéristique 0, que l'on supposera de plus algébriquement clos vers la fin.

Formalisme des algèbres de Lie

Algèbres de Lie

Définition : Une algèbre de Lie sur F est un F -espace vectoriel L muni d'un crochet de Lie $[\cdot, \cdot]$ qui est une application bilinéaire $L \times L \rightarrow L$ qui est antisymétrique et vérifie la relation de Jacobi :

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

pour tous $x, y, z \in L$.

On définit de manière évidente les sous-algèbres de Lie et les morphismes. Une *représentation* d'une algèbre de Lie L est un morphisme $L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ pour un espace vectoriel V (que l'on supposera toujours de dimension fini dans la suite).

Exemples :

- Soit V un espace vectoriel, alors $\mathfrak{gl}(V) = \mathbf{End}(V)$ muni du crochet $[a, b] = ab - ba$ est une algèbre de Lie.
Le sous-espace $\mathfrak{sl}(V) = \{x \in \mathfrak{gl}(V) : \mathrm{tr}(x) = 0\}$ est une sous-algèbre de Lie.

Si $\dim(V) = n$ le choix d'une base de V détermine un isomorphisme $\mathfrak{gl}(V) \cong \mathfrak{gl}_n(F)$ où $\mathfrak{gl}_n(F)$ est l'algèbre de Lie des matrices $n \times n$ munies du crochet évident ; de même $\mathfrak{sl}(V) \cong \mathfrak{sl}_n(F)$ où $\mathfrak{sl}_n(F)$ est la sous-algèbre des matrices de trace nulle.

- D'autres sous-algèbres importantes de $\mathfrak{gl}_n(F)$ sont $\mathfrak{t}_n(F)$, formée des matrices triangulaires supérieures, et $\mathfrak{n}_n(F)$, formée des matrices strictement triangulaires supérieures.

Représentation adjointe, centre, idéaux

Soit A une F -algèbre (pas forcément associative). Une *dérivation* de A est un endomorphisme $\delta \in \text{End}_F(A)$ qui satisfait la règle de Leibniz :

$$\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b$$

pour tous $a, b \in A$. L'ensemble des dérivations est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$.

Si L est une algèbre de Lie et $x \in L$ on note ad_x l'endomorphisme linéaire de L défini par $\text{ad}_x(y) = [x, y]$. L'application $\text{ad} : L \rightarrow \mathfrak{gl}(L)$, $x \mapsto \text{ad}_x$ est un morphisme d'algèbres de Lie. On l'appelle la *représentation adjointe* de L . On vérifie en que $\text{ad}(L) \subset \text{Der}(L)$.

Le *centre* $Z(L)$ de L est par définition :

$$Z(L) = \ker(\text{ad}) = \{x \in L : \forall y \in L, [x, y] = 0\}.$$

On dit que L est *abélienne* si $L = Z(L)$.

En général le centre est un *idéal* de L , c'est-à-dire un sous-espace $I \leq L$ tel que $[x, y] \in I$ pour tous $y \in I$ et $x \in L$ (en particulier c'est une sous-algèbre de Lie). Un autre exemple d'idéal est l'*algèbre dérivée* de L définie par :

$$[L, L] = \{[x, y] : x, y \in L\}.$$

On dit qu'une algèbre de Lie est *simple* si ses seuls idéaux sont elle-même et le sous-espace nul. Par exemple $\mathfrak{sl}(V)$ est simple (la démonstration est la même que celle de la simplicité du groupe $\text{SL}(V)$).

Algèbres résolubles et nilpotentes

La *série dérivée* $L^{(0)}, L^{(1)}, \dots$ de L est définie par récurrence comme suit :

$$L^{(0)} = L, L^{(i+1)} = [L^{(i)}, L^{(i)}].$$

On dit que L est *résoluble* si $L^{(i)} = 0$ pour i assez grand. Par exemple, l'algèbre $\mathfrak{t}_n(F)$ des matrices triangulaires supérieures est résoluble : en effet le i -ème terme de sa série dérivée est contenu dans les (a_{kl}) telles que $l \leq k + i \Rightarrow a_{kl} = 0$ donc on a $L^{(n)} = 0$.

On a les propriétés de stabilité suivante pour cette notion (les démonstrations sont immédiates d'après les définitions).

Proposition :

1. Si L est résoluble alors toute sous-algèbre ou image de M est résoluble.
2. Si I est un idéal résoluble de L et L/I est aussi résoluble alors L elle-même doit être résoluble.
3. Si I, J sont des idéaux résolubles de L alors $I + J$ aussi.

Il suit de la propriété 3. ci-dessus qu'une algèbre de Lie (de dimension finie) L contient un unique idéal résoluble maximal. Ce dernier est appelé *radical résoluble* de L et noté $\text{Rad}(L)$.

Définition : On dit que L est semisimple si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

- On a $\text{Rad}(L) = 0$;
- Il n'existe pas d'idéal abélien $I \subset L$;

La série centrale $L^0, L^1, \dots$ de L est définie par :

$$L^0 = L, L^{i+1} = [L, L^i].$$

On dit que L est *nilpotente* si $L^i = 0$ pour i assez grand. Par exemple l'algèbre $\mathfrak{n}_n(F)$ est nilpotente par le même argument que celui utilisé pour démontrer que $\mathfrak{t}_n$ est résoluble (noter que $\mathfrak{t}_n(F)$ elle-même n'est pas nilpotente, vu que $[\mathfrak{t}_n, \mathfrak{t}_n^{(i)}] = \mathfrak{t}_n^{(i)}$ pour $i \geq 1$).

La nilpotence est stable par passage aux sous-algèbres et aux images. On a de plus les propriétés importantes suivantes.

Proposition :

1. L est nilpotente si et seulement si $L/Z(L)$ est nilpotente.
2. Si L est nilpotente alors $Z(L) \neq 0$.

Théorèmes fondamentaux

Théorème d'Engel

Si L est une algèbre de Lie nilpotente et $x_0, \dots, x_i \in L$ on a $\text{ad}_{x_i} \cdots \text{ad}_{x_1} \in \text{ad}(L^i)$ et cet élément est donc nul pour i assez grand. En particulier il existe un n tel que $(\text{ad}_x)^n = 0$ pour tout $x \in L$. Autrement dit tous les

éléments d'une algèbre nilpotente sont nilpotents (au sens usuel) dans la représentation adjointe. Le théorème d'Engel est une réciproque de cet énoncé.

Théorème (Engel) : Soit L une algèbre de Lie. Si ad_x est un endomorphisme nilpotent de L pour tout $x \in L$ alors L est nilpotente.

Démonstration

L est nilpotente si et seulement si $\text{ad}(L)$ l'est. On obtient alors cet énoncé par récurrence sur $\dim(L)$, comme conséquence du lemme d'algèbre linéaire suivant : si L est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ telle que tout $x \in L$ est un endomorphisme nilpotent alors il existe un vecteur $v \in V$ non-nul tel que $xv = 0$ pour tout $x \in L$.

Théorème de Lie

Théorème (Lie) : On suppose que F est algébriquement clos. Soit $L \subset \mathfrak{gl}(V)$ une sous-algèbre de Lie résoluble. Il existe un $v \in V$, $v \neq 0$ tel que $xv \in Fv$ pour tout $x \in L$.

Démonstration

On obtient cet énoncé par récurrence sur $\dim(L)$; il est évidemment vrai pour $\dim(L) = 0, 1$. Le point de départ de la récurrence est le lemme suivant.

Lemme 1 : Il existe un idéal $I \subset L$ de codimension 1.

Par l'hypothèse de récurrence il existe un $v \in V \setminus 0$ tel que $xv \in Fv$ pour tout $x \in I$. Soit λ la forme linéaire sur I telle que $xv = \lambda(x)v$ pour $x \in I$. On définit un sous-espace

$$W = \bigcap_{x \in I} \ker(x - \lambda(x))$$

qui est non-nul puisque $v \in W$. On a alors

Lemme 2 : $LW \subset W$

On peut alors conclure de la manière suivante : on écrit $L = Fz + I$ (pour n'importe quel $z \in L \setminus I$) et on obtient le vecteur désiré en prenant n'importe quel vecteur propre de z dans le sous-espace stable W (c'est ici que l'hypothèse sur F est utilisée).

Démonstration des lemmes

Le lemme 2 est une conséquence à peu près immédiate de ce que I est un idéal. Le lemme 1 se démontre comme suit : l'algèbre $L^a = L/[L, L]$ est abélienne et non-nulle. On choisit un sous-espace $J \subset L^a$ de codimension 1 ; il suit immédiatement que $J + [L, L]$ est un idéal de codimension 1 dans L .

Conséquences

Le théorème de Lie a les corollaires immédiats suivants :

1. Si L est une sous-algèbre résoluble de $\mathfrak{gl}(V)$ alors il existe un drapeau de V (c'est-à-dire une suite de sous-espaces $0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V$ avec $\dim(V_{i+1}/V_i) = 1$) stabilisé par L ; autrement dit L est une sous-algèbre d'un conjugué de $\mathfrak{t}_n$. (Noter que le théorème d'Engel implique un énoncé similaire pour les sous-algèbres nilpotentes.)
2. L est résoluble si et seulement s'il existe des sous-algèbres $L_0 = 0 \subset \dots \subset L_n = L$ telles que $\dim(L_{i+1}/L_i) = 1$ et L_i est un idéal de L_{i+1} .
3. L est résoluble si et seulement si son algèbre dérivée $[L, L]$ est nilpotente.

Noter que le dernier point est valide même si F n'est pas algébriquement clos.

Critère de Cartan

Il suit de la caractérisation traciale des endomorphismes nilpotents, du théorème d'Engel et du dernier critère de résolubilité ci-dessus que si $L \subset \mathfrak{gl}(V)$ vérifie que $\mathrm{tr}(xy) = 0$ pour tout $x \in [L, L]$ et tout $y \in L$ alors elle est résoluble. On obtient ainsi le critère de résolubilité suivant.

Théorème (Cartan) : Soit L une algèbre de Lie. Si $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y) = 0$ pour tous $x \in [L, L]$ et $y \in L$ alors L est résoluble.

Structure des algèbres de Lie semisimples

Forme de Killing

Définition : La forme de Killing d'une algèbre de Lie L est la forme bilinéaire symétrique $K = K_L$ sur L donnée par :

$$K(x, y) = \text{tr}(\text{ad}_x \text{ad}_y).$$

Les propriétés suivantes sont immédiates :

1. On a $K([x, y], z) = K(x, [y, z])$ (invariance de K).
2. Le noyau $S = \ker(K) = \{x \in L : K(\cdot, x) = 0\}$ est un idéal de L .
3. Si $I \subset L$ est un idéal alors $K_I = K_L|_I$.

Le résultat utile pour la suite sur la forme de Killing est alors le théorème suivant.

Théorème : L est semi-simple si et seulement si K est non-dégénérée.

Démonstration

L'idéal $S = \ker(K)$ est résoluble (ceci suit directement du critère de Cartan) et si L est semisimple on a donc $S \subset \text{Rad}(L) = 0$ donc K est non-dégénérée.

Réciproquement, si $S = 0$ alors L ne contient pas d'idéal abélien non-nul (un tel idéal est contenu dans S). Il suit que L ne contient pas non plus d'idéal résoluble non-nul (le dernier terme de la série dérivée d'un tel idéal serait un idéal abélien non-nul de L), et donc que $\text{Rad}(L) = 0$.

Décomposition en algèbres simples

Dans toute la suite on suppose que L est semisimple.

Théorème : Il existe des idéaux simples $L_1, \dots, L_n$ de L , uniques à permutation près, tels que l'on ait la décomposition

$$L = L_1 \oplus \dots \oplus L_n.$$

Démonstration

Ceci suit d'une récurrence sur la dimension mise en place comme suit : si L n'est pas simple elle contient un idéal $0 \neq I \neq L$, qui doit lui aussi être semisimple (sinon $\text{Rad}(I)$ serait un idéal résoluble de L). Son orthogonal I^* pour K est alors un idéal, et on a $L = I \oplus I^*$ car K et $K|_I = K_I$ sont non-dégénérées. On conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à I et I^* .

Conséquences

Le théorème de décomposition a les corollaires suivants, que l'on peut aussi déduire directement de sa démonstration.

1. On a $[L, L] = L$.
2. Les idéaux et quotients de L sont aussi semisimples.

Représentation adjointe des algèbres semisimples

La représentation adjointe $\text{ad} : L \rightarrow \text{Der}(L)$ de l'algèbre de Lie semisimple L a les propriétés suivantes :

1. ad est fidèle ;
2. $\text{ad}(L) = \text{Der}(L)$;

La première suit immédiatement du fait que $\ker(\text{ad})$ est un idéal abélien. La seconde se démontre comme suit : si $\delta \in \text{Der}(L)$ et $x \in L$ on a $\text{ad}_{\delta(x)} = [\delta, \text{ad}_x]$ et il suit que $\text{ad}(L)$ est un idéal de $\text{Der}(L)$. Soit J son orthogonal pour la forme de Killing $K_{\text{Der}(L)}$; alors $J \cap \text{ad}(L) = 0$ vu que $K_I = K_{\text{Der}(L)}|_I$ est non-dégénérée, et par inégalité sur les dimensions $\text{Der}(L) = J \oplus \text{ad}(L)$. Il suit aussi que $\text{ad}_{\delta(x)} = [\delta, \text{ad}_x] \in J \cap \text{ad}(L)$ est nul pour tous $x \in L$ et $\delta \in J$. Comme ad est injective il suit que pour tout $\delta \in J$ on a $\delta(x) = 0$ pour tout $x \in L$, c'est-à-dire $\delta = 0$. On conclut que $J = 0$ et donc que $\text{ad}(L) = \text{Der}(L)$.

Décomposition de Jordan

Proposition : Pour tout $x \in L$ il existe une paire $(x_n, x_s) \in L \times L$ telle que ad_{x_n} est nilpotent, ad_{x_s} est semisimple, $[x_n, x_s] = 0$ et $x = x_s + x_n$.

Pour démontrer ceci on admet le fait suivant : si x est une endomorphisme linéaire de L on note x_n sa partie nilpotente et x_s sa partie semisimple (diagonalisable) données par le théorème de réduction de Jordan ; on a alors :

Si $x \in \text{Der}(L)$ alors $x_n, x_s \in \text{Der}(L)$.

Le résultat suit alors immédiatement du fait (démontré ci-dessus) que ad est un isomorphisme $L \rightarrow \text{Der}(L)$.

La décomposition de Jordan est fonctorielle, c'est-à-dire que pour tout morphisme $\rho : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ (dont l'image est forcément contenue dans $\mathfrak{sl}(V)$) et tout $x \in L$ on a $\rho(x)_n = \rho(x_n)$.

Décomposition radicielle

Soit $H \subset L$ une sous-algèbre abélienne dont tous les éléments sont semisimples (c-à-d $x = x_s$ pour tout $x \in H$), et maximale pour ces propriétés. (On peut démontrer sans difficulté que demander que H soit abé-

lienne est superflu.) Une telle sous-algèbre est appelée *sous-algèbre de Cartan* de L .

Il existe une base de L qui diagonalise simultanément tous les éléments de H ; autrement dit il existe un sous-ensemble fini Φ du dual L^* tel que

$$L = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_{\alpha}, \quad L_{\alpha} = \{x \in L : \forall h \in H, \text{ad}_h(x) = \alpha(h)x\}.$$

Cette décomposition est appelée *décomposition radicielle* de L et Φ est appelé un *système de racines* de L . Tout ceci dépend du choix de H mais on peut démontrer que toutes les sous-algèbres de Cartan sont conjuguées l'une à l'autre et il en va de même pour les décompositions radicielles et systèmes de racines.

On a les propriétés importantes suivantes :

1. $[L_{\alpha}, L_{\beta}] \subset L_{\alpha+\beta}$ (qui est nul si $\alpha + \beta \neq 0$, $\notin \Phi$ et H si $\alpha + \beta = 0$).
2. Pour tout $\alpha \in \Phi$ le sous-espace L_{α} est ad -nilpotent.
3. Si $\alpha \neq \beta$ alors L_{α} est Killing-orthogonal à L_{β} .

This entry was posted in Groupe de travail, Immeubles on 19 mars 2019 [<https://perso.math.univ-toulouse.fr/jraimbau/2019/03/19/systemes-de-racines-des-algebres-de-lie-semisimples-jules-martel/>].

[Mentions Légales](#)