Algèbres de Lie et Espace des Racines

I. classification des algèbres de lie

Les algèbres de Lie sont classifiées en différentes catégories en fonction de leurs propriétés et de leurs structures. La classification des algèbres de Lie dépend de diverses propriétés, notamment la structure des opérateurs de structure, la présence de sous-algèbres idéaux, la dimension de l'algèbre, la nature des coefficients (réels ou complexes), et l'application spécifique dans différents domaines de mathématiques et de physique

On distingue la classification générale suivante:

1. Algèbres de Lie simples: Les algèbres de Lie simples sont les plus élémentaires. Elles n'ont pas de sous-algèbres idéaux non triviaux. Les exemples incluent l'algèbre de Lie $su(n)$ pour $n \geq 2$ et l'algèbre de Lie de Lorentz $so(3,1)$.

2. Algèbres de Lie semi-simples: Les algèbres de Lie semi-simples sont formées en prenant des produits directs d'algèbres de Lie simples. Elles sont plus générales que les simples, mais ont une structure bien définie. Par exemple, l'algèbre de Lie $su(n)$ est semi-simple.

3. Algèbres de Lie de dimension finie: Ces algèbres de Lie ont une dimension finie en tant qu'espaces vectoriels réels. Elles peuvent être simples, semi-simples ou non semi-simples. Les algèbres de Lie de dimension finie trouvent des applications dans de nombreux domaines de la physique, de la chimie et des mathématiques.

4. Les algèbres de Lie complexes: sont des algèbres de Lie dont les coefficients des opérateurs de structure sont des nombres complexes. Elles sont utilisées en théorie des groupes et en physique théorique.

5. Algèbres de Lie réelles : Les algèbres de Lie réelles sont des algèbres de Lie dont les coefficients des opérateurs de structure sont des nombres réels. Elles trouvent des applications en géométrie différentielle et en physique mathématique.

6. Algèbres de Lie de Lie : Les algèbres de Lie de Lie sont des algèbres de Lie qui sont associées à des groupes de Lie. Elles sont étroitement liées aux transformations continues et aux symétries en physique.

7. Algèbres de Lie graduées: Les algèbres de Lie graduées sont des algèbres de Lie dont l'espace vectoriel est décomposé en une somme directe de sous-espaces. Elles sont couramment utilisées en physique des particules et théorie des champs.

8. Algèbres de Lie affines : Les algèbres de Lie affines sont une généralisation des algèbres de Lie qui apparaissent dans le contexte de la géométrie différentielle et de la théorie des équations aux dérivées partielles.

9. Algèbres de Lie de Kac-Moody : Les algèbres de Lie de Kac-Moody sont une classe spéciale d'algèbres de Lie affines qui jouent un rôle central en physique des particules et en théorie des cordes

10. Algèbres de Lie nilpotentes: Les algèbres de Lie nilpotentes sont des algèbres de Lie où le produit des opérateurs de structure se réduit à zéro après un certain nombre d'itérations. Elles sont utilisées pour décrire des systèmes dynamiques simples

11. Algèbres de Lie solubles: Les algèbres de Lie solubles sont des algèbres de Lie où les opérateurs de structure peuvent être successivement éliminés jusqu'à obtenir l'algèbre de Lie nulle.

Exemples

1. Algèbre de Lie de dimension finie : L'algèbre de Lie $sl(2, \mathbb{R})$ est une algèbre de dimension finie. Elle est utilisée dans la théorie de l'algèbre linéaire et en mécanique quantique pour décrire les opérateurs de moment angulaire

2. Algèbre de Lie complexe : L'algèbre de Lie $su(1,1)$ est une algèbre complexe qui trouve des applications en relativité restreinte.

3. Algèbre de Lie réelle : L'algèbre de Lie $so(3)$ est une algèbre de Lie réelle associée aux rotations tridimensionnelles. Elle est utilisée en mécanique classique et en physique des solides.

4. Algèbre de Lie de Lie : L'algèbre de Lie $sl(2, \mathbb{C})$ est une algèbre de Lie de Lie. Elle est associée au groupe de Lie $SL(2, \mathbb{C})$ et est utilisée en mécanique quantique pour décrire les opérations de spin.

5. Algèbre de Lie graduée : L'algèbre de Lie $osp(\frac{1}{2})$ est une algèbre graduée qui joue un rôle en physique des particules et en super-algèbre.

6. Algèbre de Lie simple: L'algèbre de Lie $su(2)$ est une algèbre simple. Elle est associée au groupe de Lie $SU(2)$ est utilisée pour décrire les rotations tridimensionnelles. Les opérateurs de structure de $su(2)$ sont les matrices de Pauli.

7. Algèbre de Lie semi- simple: L'algèbre de Lie $su(3)$ est un exemple d'algèbre semi-simple. Elle est utilisée pour décrire les transformations de $SU(3)$ et est importante en physique des particules.

8. Algèbre de Lie affine: L'algèbre de Lie affine $\widehat{sl}(2)$ est utilisée en théorie des cordes et en théorie des champs conformes.

9. Algèbre de Lie de Kac-Moody: L'algèbre de Lie de Kac-Moody E_8 est un exemple d'algèbre de Lie de Kac-Moody. Elle est utilisée en physique des particules et en théorie des cordes.

10. Algèbre de Lie nilpotente: L'algèbre de Lie de Heisenberg est un exemple d'algèbre de Lie nilpotente. Elle est utilisée pour décrire les opérations de création et d'annihilation en mécanique quantique.

11. Algèbre de Lie soluble: L'algèbre de Lie de l'algèbre abélienne $\mathbb{R}$ est un exemple d'algèbre de Lie soluble

si A et B sont des éléments de l'algèbre de Lie $\mathbb{R}$, alors leur crochet de Lie est définie par

$$[A, B] = AB - BA = 0.$$

Dans une algèbre de Lie abélienne, le crochet de Lie de deux éléments est toujours nul, ce qui signifie que les éléments commutent entre eux. Cela rend cette algèbre de Lie très simple et facile à étudier. En d'autres termes, dans une algèbre de Lie abélienne, tous les éléments commutent les uns avec les autres, ce qui est en contraste avec les algèbres de Lie non abéliennes où les éléments ne commutent pas nécessairement.

II. Espace de racines

2.1. Introduction aux espaces de racine

L'espace des racines (ou espace racine) est un concept essentiel en théorie des groupes de Lie et en algèbre de Lie. Cet espace est utilisé pour décrire la structure des groupes de Lie et de leurs algèbres de Lie associées. Il joue un rôle central dans la classification des groupes de Lie la construction de représentations et la compréhension des symétries en physique théorique.

Les espaces de racine sont des ensembles de vecteurs spéciaux dans l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie. Ils sont essentiels pour décrire les symétries des groupes de Lie et les propriétés des représentations.

2.2. Propriétés des sous espaces des racines

Les propriétés des espaces de racine sont essentielles pour la compréhension de la structure des groupes de Lie et de leurs algèbres de Lie associées, ainsi que pour l'application de ces concepts en physique théorique.

Définition des vecteurs racine

Un vecteur racine est un vecteur non nul de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie qui, lorsqu'il est transformé par des éléments du groupe, reste un multiple du même vecteur.

Les vecteurs racine sont associés aux générateurs des sous-algèbres de Cartan, qui sont cruciaux pour classer les groupes de Lie.

Les vecteurs racine sont des vecteurs spéciaux de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie qui satisfont à des relations spécifiques sous les commutateurs de l'algèbre de Lie.

Propriétés de commutation

Les vecteurs racine vérifient des propriétés de commutation spécifiques dans l'algèbre de Lie. En particulier, les commutateurs de vecteurs racine sont généralement proportionnels aux vecteurs racine eux-mêmes.

Longueurs des vecteurs racine

Les vecteurs racine peuvent avoir différentes longueurs. La longueur d'un vecteur racine est liée à sa multiplicité et à ses propriétés de commutation.

Diagrammes de Dynkin

Les vecteurs racine sont représentés graphiquement dans les diagrammes de Dynkin. Chaque vecteur racine est généralement associé à un nœud dans le diagramme de Dynkin.

Les relations de multiplication entre les vecteurs racine sont indiquées par des lignes reliant les nœuds dans le diagramme de Dynkin.

Racines simples et racines non simples

Les vecteurs racine sont classés en racines simples et racines non simples. Les racines simples sont les vecteurs de base qui forment une base pour les vecteurs racine. Les racines non simples sont des combinaisons linéaires des racines simples.

Orthogonalité

Les vecteurs racine forment généralement un système orthogonal par rapport à un produit scalaire spécifique défini dans l'algèbre de Lie.

Multiplicité des racines

Les vecteurs racine ont généralement des multiplicités différentes. La multiplicité d'une racine indique combien de fois elle apparaît dans l'ensemble des vecteurs racine.

Utilisation en théorie des groupes de Lie

Les espaces de racine sont essentiels pour la classification des groupes de Lie, la construction de représentations de groupe, la compréhension des symétries dans la physique théorique, et bien d'autres domaines de la mathématique et de la physique.

2.3. Classification des algèbres de Lie

La classification des algèbres de Lie est un domaine fondamental de la théorie des groupes de Lie. Elle repose sur plusieurs critères et propriétés des algèbres de Lie, notamment leur structure, leurs commutateurs, leurs propriétés de représentation, et leur relation avec les espaces de racine et les diagrammes de Dynkin. Voici un aperçu de la classification des algèbres de Lie :

1. Classification basée sur la dimension de l'algèbre de Lie :

- Les algèbres de Lie sont souvent classées en fonction de leur dimension. Par exemple, $sl(n)$ représente l'algèbre de Lie des matrices $n \times n$ de trace nulle, et $su(n)$ représente l'algèbre de Lie des matrices unitaires $n \times n$.

2. Classification basée sur les propriétés de commutation :

- Les algèbres de Lie sont souvent classées en fonction de leurs règles de commutation. Par exemple, $sl(n)$ a des commutateurs spécifiques qui définissent son algèbre de Lie.

3. Classification basée sur les propriétés de représentation :

- Les algèbres de Lie peuvent être classées en fonction de leurs propriétés de représentation. Par exemple, une algèbre de Lie peut être "simple" ou "semi-simple," en fonction de la décomposition de ses représentations irréductibles.

4. Classification basée sur les groupes de Lie correspondants :

- Les groupes de Lie sont en correspondance avec les algèbres de Lie. Les algèbres de Lie peuvent être classées en fonction des groupes de Lie qu'elles représentent. Par exemple, $sl(n)$ est associée au groupe de Lie spécial linéaire $SL(n, \mathbb{C})$.

5. Classification basée sur les diagrammes de Dynkin et les espaces de racine :

- Les diagrammes de Dynkin et les espaces de racine sont des outils puissants pour classer les algèbres de Lie. Chaque diagramme de Dynkin est associé à une classe d'algèbres de Lie, et ils sont utilisés pour classer les algèbres de Lie simples et semi-simples.

6. Classification des familles d'algèbres de Lie :

- Les algèbres de Lie peuvent être regroupées en familles en fonction de leurs propriétés et de leurs relations de commutation. Par exemple, les familles A, B, C, D, etc., correspondent à différentes classes d'algèbres de Lie.

2.2. Diagrammes de Dynkin

Les diagrammes de Dynkin sont des outils graphiques qui permettent de représenter les relations entre les vecteurs racine d'un groupe de Lie.

Chaque vecteur racine est représenté par un nœud dans le diagramme de Dynkin, et les relations de multiplication entre eux sont indiquées par des lignes.

Les diagrammes de Dynkin sont un moyen de classer les groupes de Lie simples et semi-simples.

2.3. Classification des groupes de Lie

- En utilisant les diagrammes de Dynkin, il est possible de classer les groupes de Lie en familles de groupes simples et semi-simples.
- Les diagrammes de Dynkin sont également utiles pour déterminer les dimensions des espaces de racine et les degrés de liberté des groupes de Lie.

2.4. critères de Cartan

Les critères de Cartan, également connus sous le nom de critères de Cartan-Killing, sont un ensemble de conditions mathématiques qui permettent de déterminer si une algèbre de Lie est simple, semi-simple, ou encore réductible

Ils sont largement utilisés en mathématiques et en physique théorique pour comprendre les symétries et les transformations dans diverses théories, y compris en physique des particules et en relativité générale. Ils fournissent un cadre mathématique solide pour l'étude des groupes de Lie et de leurs algèbres de Lie associées.

1. Critère de non-dégénérescence :

L'algèbre de Lie doit être non-dégénérée, c'est-à-dire que le produit scalaire défini par la forme bilinéaire invariante de l'algèbre de Lie est non dégénéré. Cela signifie que si le produit scalaire entre deux éléments est nul, alors ces deux éléments doivent être nuls.

2. Critère de semi-simplicité :

Une algèbre de Lie est semi-simple si et seulement si son radical, qui est le plus grand idéal solvable, est réduit à zéro. En d'autres termes, l'algèbre de Lie n'a pas d'idéaux solvables non triviaux.

3. Critère de simplicité

Une algèbre de Lie est simple si et seulement si elle est semi-simple (selon le critère précédent) et qu'elle n'a pas d'idéaux idéaux non triviaux, à l'exception de l'algèbre de Lie elle-même et de l'algèbre de Lie nulle.

4. Critère de réductibilité

Une algèbre de Lie est réductible si et seulement si elle peut être décomposée en une somme directe d'idéaux non triviaux (autres que l'algèbre de Lie elle-même et l'algèbre de Lie nulle). Une algèbre de Lie est irréductible si elle n'est pas réductible.

2.5. Propriétés de la sous algèbre de Cartan

Les sous-algèbres de Cartan sont des sous-algèbres abéliennes essentielles qui jouent un rôle central dans la classification et l'analyse des groupes de Lie. Leurs éléments de Cartan sont fondamentaux pour la description des symétries et des représentations dans la théorie des groupes de Lie.

Définition:Sous-algèbre de Cartan :

Une sous-algèbre de Cartan est une sous-algèbre d'une algèbre de Lie qui est abélienne, c'est-à-dire que ses éléments commutent entre eux.

Elle est souvent notée comme h .

Éléments de la sous-algèbre de Cartan :

Les éléments de la sous-algèbre de Cartan sont appelés "éléments de Cartan" ou "générateurs de Cartan".

Ils sont diagonaux et correspondent à des générateurs de transformation de phase ou de rotation dans les groupes de Lie. Par exemple, dans $su(3)$, les générateurs de Cartan sont des matrices diagonales.

Algèbre de Cartan :

L'algèbre engendrée par les éléments de Cartan forme l'algèbre de Cartan, notée h .

L'algèbre de Cartan est isomorphe à l'algèbre abélienne, ce qui signifie que ses éléments commutent les uns avec les autres.

Sous-algèbre radicale :

La sous-algèbre de Cartan est complétée par la sous-algèbre radicale, qui est constituée des éléments de l'algèbre de Lie qui commutent avec tous les éléments de la sous-algèbre de Cartan.

L'algèbre de Lie totale est la somme directe de la sous-algèbre de Cartan et de la sous-algèbre radicale.

Propriétés de la sous-algèbre de Cartan :

- Les éléments de la sous-algèbre de Cartan sont les générateurs des transformations de phase et de rotation qui conservent la structure de l'algèbre de Lie.
- Les vecteurs propres des éléments de Cartan forment la base pour la classification des représentations irréductibles de l'algèbre de Lie.
- Les éléments de la sous-algèbre de Cartan sont essentiels pour la construction de représentations de groupe de Lie, notamment les états propres de moments angulaires.

Utilisation en classification des groupes de Lie :

Les sous-algèbres de Cartan jouent un rôle clé dans la classification des groupes de Lie et de leurs représentations. Les éléments de Cartan permettent de classer les générateurs des groupes de Lie.