

Introduction aux groupes de Lie pour la physique

Frédéric Paulin

Professeur à l'Université Paris-Saclay (Faculté des sciences d'Orsay)

Cours de troisième année de Centrale-Supélec
(Université Paris-Saclay)
Option Mathématiques appliquées, Parcours Mathématiques-Physique
Année 2020-2021

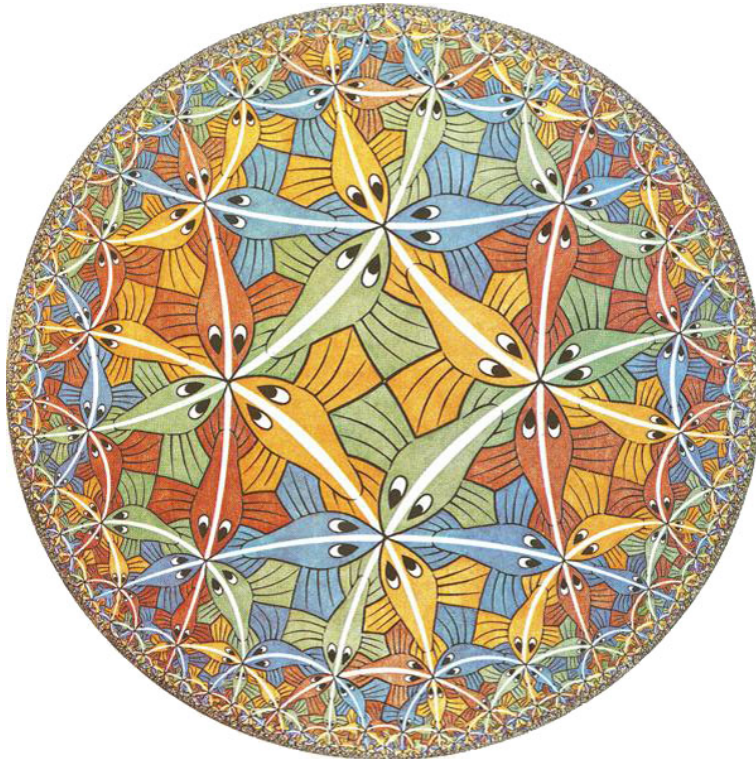


Table des matières

Préambule	4
1 Groupes et algèbres de Lie matriciels	7
1.1 Les groupes de Lie matriciels	7
L'application exponentielle des matrices	10
Groupes de Lie classiques	13
Rappels sur les sous-variétés	15
Décomposition polaire	20
1.2 Les algèbres de Lie matricielles	24
Algèbre de Lie d'un groupe de Lie matriciel	27
Constantes de structure des algèbres de Lie	28
Décomposition des algèbres de Lie	30
1.3 Représentations linéaires complexes de dimension finie d'algèbres de Lie . .	30
Représentation adjointe d'une algèbre de Lie	33
Extension de scalaires	34
Représentation complexe conjuguée d'une représentation d'algèbre de Lie . .	35
Représentation contragrédiente d'une représentation d'algèbre de Lie	36
Produit tensoriel de représentations d'algèbre de Lie	37
Forme de Killing	39
1.4 Représentations linéaires complexes de dimension finie de groupes de Lie . .	40
Représentation restreinte d'une représentation de groupe de Lie	41
Représentation Adjointe d'un groupe de Lie	41
Représentation somme directe de représentations de groupe de Lie	42
Représentation complexe conjuguée d'une représentation de groupe de Lie .	43
Représentation contragrédiente d'une représentation de groupe	43
Produit tensoriel de représentations de groupe de Lie	45
Relations entre représentations de groupes de Lie et d'algèbres de Lie	45
1.5 Indications pour la résolution des exercices	49
2 Les groupes SU(2) et SO(3)	51
Motivations physiques	51
2.1 L'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3)$	53
2.2 Le revêtement universel de SO(3) par SU(2)	54
2.3 Représentations linéaires de SU(2) et SO(3)	56
Représentations irréductibles de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$	57
Représentations irréductibles du groupe de Lie SU(2)	61
Représentations du groupe de Lie SO(3)	64
2.4 Décomposition de Clebsch-Gordan	65
Application physique	68
3 Les groupes de Lorentz et de Poincaré	71
3.1 L'espace-temps de la relativité restreinte	71
3.2 Le groupe de Lorentz restreint $SO_0(1, 3)$	75
3.3 Le groupe de Poincaré $O(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^{1,3}$	84
3.4 L'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(1, 3)$	86
3.5 Le revêtement universel de $SO_0(1, 3)$ par $SL_2(\mathbb{C})$	89

3.6	Représentations du groupe de Lorentz	97
	Représentations irréductibles de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$	102
	Représentations irréductibles du groupe de Lie $SL_2(\mathbb{C})$	103
	Représentations du groupe de Lie $SO_0(1, 3)$	109
3.7	Indications pour la résolution des exercices	110
4	Le groupe $SU(3)$	112
4.1	L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$	112
4.2	Représentations irréductibles du groupe de Lie $SU(3)$	115
	Interprétation en physique des particules	116
	La représentation fondamentale de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$	117
	La représentation contragrédiente de la représentation fondamentale de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$	118
	La représentation adjointe de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$	118
	Annexes	120
	A Rappel de vocabulaire sur les groupes	120
	B Rappel de vocabulaire de calcul différentiel	121
	Index	123
	Références	126

Préambule.

« La nature aime la symétrie. » L'intérêt principal de cet aphorisme est d'être interprété (voire réfuté, en particulier par les notions d'achiralité et de brisure de symétrie). Nous le comprendrons au sens que les plus beaux¹ objets géométriques sont souvent ceux qui admettent de nombreuses symétries. Les espaces de phase de dimension finie en physique classique ou relativiste sont munis de structures géométriques par les équations de la physique qui y prennent place. Le but de ce cours est d'introduire les groupes de transformations de ces espaces préservant ces structures, qui portent le nom de *groupes de Lie*, même si Sophus Lie² a surtout considéré leur avatar local, voir [Lie1, Lie2]. Du point de vue mathématique, nous revenons ainsi à la conception moderne de la géométrie : Felix Klein², dans son programme d'Erlangen (1872) préparé pour sa nomination en tant que professeur à l'université d'Erlangen en 1872 à l'âge de 23 ans, définit (voir les références [Kle, Zub1]) la géométrie comme l'étude des espaces munis d'actions de groupes préservant des structures, et des invariants de ces transformations, considérant ainsi groupes et géométries comme deux pluriels synonymes.

La notion de symétrie et de groupes de symétrie joue un rôle crucial dans de nombreux domaines de la physique, comme la cristallographie, la physique des particules³, la cosmologie et la relativité restreinte, voir par exemple [Zub2, Gou, Del, Sch, Gil]. Dans ce cours, nous ne nous intéresserons pas aux groupes finis ou discrets de symétries, comme (voir les dessins ci-dessous)

- le groupe fini des symétries de la molécule C_{60} de fullérene (le groupe de l'icosaèdre d'ordre 120, extension par le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ d'ordre 2 du groupe \mathcal{A}_5 des permutations alternées d'un alphabet à 5 lettres) ou
- le groupe du pavage en nid d'abeille du graphène (extension du produit direct \mathbb{Z}^2 de deux copies du groupe infini cyclique \mathbb{Z} par le groupe diédral D_3 d'ordre 6, qui est engendré par les symétries par rapport à deux droites vectorielles d'angle $\frac{\pi}{3}$).

1. Lire par exemple Montesquieu² (Charles-Louis de Secondat, baron de La Brède et de Montesquieu), *Essai sur le goût* (1757).



Montesquieu

2. (1689-1755)



Lie

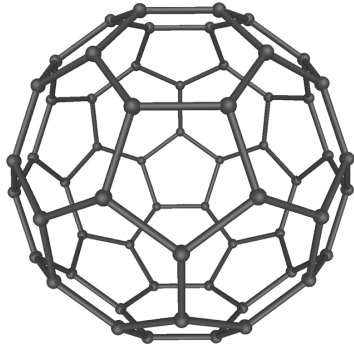
(1842-1899)



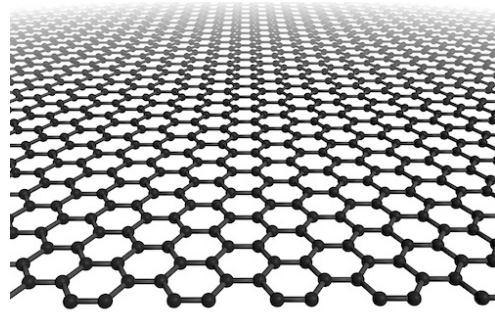
Klein

(1849-1925)

3. Pour usage ultérieur, donnons une description botanique des particules. Les *particules élémentaires*, qui sont les briques de base permettant de fabriquer les particules composées, sont réparties en deux familles, les *fermions* (les particules élémentaires suivant la statistique de Fermi-Dirac, qui sont de spin demi-entier) et les *bosons* (les particules élémentaires suivant la statistique de Bose-Einstein, qui sont de spin entiers). Les fermions sont répartis en deux familles, les 12 *leptons* (qui sont les fermions insensibles à l'interaction forte : l'électron e , le muon μ , le tauon τ , et les trois neutrinos ν_e, ν_μ, ν_τ , chacun venant avec une anti-particule) et les *quarks* (qui sont les fermions sensibles à l'interaction forte : u (haut), d (bas), s (étrange), c (charme), b (beauté), t (vérité), chacun venant avec trois couleurs et chaque quark coloré ayant une anti-particule). Parmi les particules composées, on appelle *baryons* celles composées de trois quarks (comme les *nucléons* : le proton duu et le neutron ddu).



fullérene



graphène

Nous nous intéresserons par contre aux groupes « continus », qui permettront de faire jouer un rôle important aux transformations infinitésimales (ou, en termes plus mathématiques, aux algèbres de Lie associées aux groupes de Lie). Nous resterons dans le cadre des groupes de symétrie de dimension finie, laissant donc de côté les importants groupes de jauge de dimension infinie de la relativité générale et des théories de jauge. Nous ne ferons pas un exposé dogmatique et abstrait des groupes et algèbres de Lie (voir pour cela [Bou1, Bou2, Bou3, Bou4, God, OV, Ser, CSM, Kna, Pau2], pour ne citer que ceux-ci). Dans l'esprit du livre [MT] et surtout de [KS] que nous suivrons de près, nous nous restreindrons à l'étude des groupes de Lie classiques qui apparaissent fréquemment en physique, dont

- les groupes spéciaux orthogonaux $SO(n)$ (préservant le produit scalaire d'un espace vectoriel réel euclidien de dimension finie n , voir le chapitre 1.1) et surtout en petite dimension $SO(2), SO(3)$, même si le groupe $SO(10)$ apparaît dans l'un des modèles de théorie grandement unifiée (GUT) et le groupe $SO(32)$ apparaît en théorie des supercordes et en théorie des cordes hétérotique O ,
- les groupes spéciaux unitaires $SU(n)$ (préservant le produit scalaire d'un espace vectoriel complexe hermitien de dimension finie n , voir le chapitre 1.1) et surtout en petite dimension $SU(2), SU(3)$ (voire $SU(5)$, sur lequel repose le modèle le plus simple (dit de Georgi-Glashow) de théorie grandement unifiée (GUT)⁴),
- le groupe de Lorentz $SO(3,1)$ (préservant une forme quadratique de signature $(3,1)$ d'un espace vectoriel réel de dimension 4) et son avatar affine le groupe de Poincaré, voir le chapitre 3. Le groupe de Lorentz, particulièrement important en relativité restreinte, apparaît comme le groupe naturel de symétries (vectorielles) de l'espace-temps $\mathbb{R}^{3,1}$, ainsi que celui de l'opérateur différentiel appelé *d'alembertien* $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ pour l'équation des ondes du quadri-potentiel électromagnétique, ou pour l'équation de Klein-Gordon relativiste du mouvement sans interaction d'un pion⁵ ou du fameux boson de Higgs.

4. mais ce modèle ne semble pas suffisamment complet, des modèles d'unification des interactions fortes, faibles et électromagnétiques reposant sur $SU(6)$ ou $SU(8)$ ont été proposés

5. Un *pion* est une particule de la famille des *mésons*, qui sont les particules composées d'un quark et d'un anti-quark. Les pions sont au nombre de trois, π^+ composé d'un quark u (haut) et d'un anti-quark \bar{d} (anti-bas), π^- composé d'un quark d (bas) et d'un anti-quark \bar{u} (anti-haut), et π^0 , superposition des paires $u\bar{u}$ et $d\bar{d}$. Ils sont en particulier responsables de la cohésion des noyaux atomiques (par échange de pions entre neutrons et protons)

Un groupe donné pouvant être groupe de symétries de plusieurs espaces de quantités physiquement significatives, nous étudierons, en suivant Klein, les groupes de Lie comme groupes de transformations d'espaces : du point de vue mathématique, nous étudierons les représentations (linéaires de dimension finie) de ces groupes. Par exemple, les propriétés d'invariance par le groupe de rotations $SO(3)$ d'objets physiques (comme les particules élémentaires) fournissent des représentations de ce groupe, et le *spin* est un nombre permettant de décrire de quelle représentation il s'agit.

En physique des particules (voir par exemple [Gri, CG]), les symétries permettent non seulement d'expliquer a posteriori les comportements des particules, mais elles permettent aussi de construire a priori des modèles comportementaux. Ainsi, le modèle standard de la physique des particules a été presque entièrement construit grâce aux concepts de symétrie et d'invariance. Le groupe de jauge de ce modèle standard est le groupe

$$U(1) \times SU(2) \times SU(3) .$$

Nous concluons ce préambule en donnant quelques explications physiques de ce groupe.

Le groupe de jauge de la chromodynamique quantique (QCD), décrivant la théorie de l'interaction forte (permettant entre autre d'expliquer la cohésion des noyaux atomiques), est le facteur $SU(3)$ de ce groupe. La représentation fondamentale de $SU(3)$ (de dimension 3) décrit les trois couleurs des quarks (traditionnellement rouge, bleu, vert). La représentation fondamentale conjuguée de $SU(3)$ (aussi de dimension 3) décrit les trois couleurs des anti-quarks (traditionnellement anti-rouge=cyan, anti-bleu = jaune, anti-vert=magenta). La représentation adjointe de $SU(3)$ (de dimension 8) décrit les huit couleurs des gluons⁶.

Le groupe $U(1)_\gamma \times SU(2)$ est le groupe de jauge de l'interaction électrofaible. La mise au point de cette théorie, combinant l'interaction faible (responsable de la désintégration radioactive et de la fusion nucléaire, par l'intermédiaire des bosons W et Z) et la force électromagnétique (en particulier responsable de la cohésion des particules chargées pour composer des atomes, par l'intermédiaire du boson γ (plus connu sous le nom de photon !)), valut le prix Nobel de physique en 1979 à Sheldon Glashow, Abdus Salam et Steven Weinberg. La brisure de symétrie dans certaines conditions d'environnement entre le groupe de symétrie électrofaible $U(1)_\gamma \times SU(2)$ et le groupe de symétrie électromagnétique $U(1)_{em}$ (plongé dans le précédent, mais n'étant pas le facteur $U(1)_\gamma$ du précédent) a permis d'envisager l'existence d'un boson de Higgs avant sa détection expérimentale.

De manière indépendante à cette symétrie $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ (c'est-à-dire qu'il ne s'agit pas du facteur du milieu de ce produit), l'hamiltonien de l'interaction forte est invariant par le groupe de Lie $SU(2)$, et cette symétrie, appelée *isospin*, explique les comportements analogues de certaines particules soumises à l'interaction forte. Les nucléons (proton et neutron) sont associés à la représentation de dimension 2 (doublet) de $SU(2)$ et les pions à la représentation de dimension 3 (triplet) de $SU(2)$.

6. Un *gluon* est une particule élémentaire de la famille des bosons, responsable de l'interaction forte liant les quarks (par exemple les trois quarks des nucléons). Ils viennent avec une charge de couleur (rouge r , bleu b , vert v) et une anti-charge de couleur (cyan \bar{r} , jaune \bar{b} , magenta \bar{v}), satisfaisant la relation $r\bar{r} + b\bar{b} + v\bar{v} = 0$.

1 Groupes et algèbres de Lie matriciels

Nous renvoyons aux appendices [A](#) et [B](#) pour des rappels de vocabulaires concernant les groupes et le calcul différentiel.

Dans toutes ces notes, nous utiliserons la convention de sommation d'Einstein : lorsque qu'un symbole α (variant dans un ensemble fini A) apparaît dans une expression (représentant un élément d'un groupe abélien, par exemple $(\mathbb{R}, +)$ ou un espace vectoriel) à la fois en indice et en exposant, alors cette expression est en fait une somme pour les α dans A :

$$E_{\dots\alpha\dots}^{\dots\alpha\dots} = \sum_{\alpha \in A} E_{\dots\alpha\dots}^{\dots\alpha\dots} .$$

Il est important de prendre garde à ne pas confondre un exposant notationnel sommatoire avec une puissance, et de bien préciser si le contexte ne permet pas de lever toute ambiguïté.

Une référence de base pour ce chapitre est le livre [\[MT\]](#).

1.1 Les groupes de Lie matriciels

Notons \mathbb{K} le corps des nombres réels \mathbb{R} ou le corps des nombres complexes \mathbb{C} , muni de sa valeur absolue usuelle $|\cdot|$.

Notons V un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension finie N , muni d'une norme quelconque $\|\cdot\|$ (elles sont toutes équivalentes). Nous noterons $\text{End}(V)$ l'espace vectoriel sur \mathbb{K} des *endomorphismes* de V , c'est-à-dire des applications linéaires de V dans V . Le choix d'une base vectorielle (e_1, \dots, e_N) de V permet d'identifier \mathbb{K}^N à V par la bijection (linéaire donc continue, ainsi que son inverse)

$$(\lambda^1, \dots, \lambda^N) \mapsto \lambda^i e_i .$$

Mais il est important de noter que cet isomorphisme dépend du choix de la base. Nous effectuerons souvent des choix particuliers (qui peuvent être guidés par des considérations physiques) de bases (plus jolies que d'autres!) dans les espaces vectoriels que nous rencontrerons, qui seront alors les bases implicitement choisies pour ces identifications et pour les matrices d'applications linéaires. Par exemple, dans \mathbb{K}^N , nous considérerons la *base canonique*

$$(e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_N = (0, 0, \dots, 1)) .$$

Exemples. (1) Le corps \mathbb{C} des nombres complexes est un espace vectoriel réel de dimension 2, et il s'identifie avec \mathbb{R}^2 par le choix de la *base canonique* $(1, i)$, par la bijection linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{C} définie par

$$(x, y) \mapsto z = x + iy .$$

Mais d'autres choix de base vectorielle réelle peuvent être utiles, comme $(1, e^{i\frac{\pi}{3}})$.

(2) Pour tous les $i, j \in \{1, \dots, N\}$, nous appelons *matrice élémentaire* E_i^j la matrice $N \times N$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient en i -ème ligne et j -ème colonne, qui est égal à 1. L'espace vectoriel réel $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ des matrices $N \times N$ à coefficients réels s'identifie avec \mathbb{R}^{N^2} par le choix de la base (dite *base canonique*) $(E_i^j)_{1 \leq i, j \leq N}$, et alors

$$(a_j^i)_{1 \leq i, j \leq N} = a_j^i E_i^j$$

pour tout élément $(a_j^i)_{1 \leq i, j \leq N}$ de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. Notons ${}^t x$ la matrice transposée d'une matrice réelle x (donc ${}^t(a_j^i)_{1 \leq i, j \leq N} = (a_i^j)_{1 \leq j, i \leq N}$), et remarquons que l'application $x \mapsto {}^t x$ est linéaire sur \mathbb{R} , donc est un endomorphisme de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

(3) Plus généralement, si (e_1, \dots, e_N) est une (jolie!) base de V , si E_i^j est l'unique application linéaire de V dans V qui envoie e_j sur e_i et e_k sur 0 si $k \neq j$, alors $(E_i^j)_{1 \leq i, j \leq N}$ est une (jolie!) base de $\text{End}(V)$, appelée la *base de $\text{End}(V)$ associée à la base (e_1, \dots, e_N) de V* .

(4) En combinant les exemples (1) et (2), nous obtenons que l'espace vectoriel complexe $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ des matrices $N \times N$ à coefficients complexes est un espace vectoriel réel de dimension $2N^2$, qui s'identifie avec \mathbb{R}^{2N^2} , par la base formée des matrices E_α^β et iE_α^β pour $1 \leq \alpha, \beta \leq N$. Notons ${}^t x$ la matrice transposée d'une matrice complexe x (donc ${}^t(a_j^i)_{1 \leq i, j \leq N} = (a_i^j)_{1 \leq j, i \leq N}$). Notons \bar{x} la matrice conjuguée d'une matrice complexe x (donc $(\bar{a}_j^i)_{1 \leq i, j \leq N} = (\overline{a_i^j})_{1 \leq j, i \leq N}$) et $x^* = {}^t \bar{x}$ sa *matrice adjointe*. Une matrice $x \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ est dite *hermitienne*⁷ (ou aussi *auto-adjointe*) si $x = x^*$. Remarquons que l'application $x \mapsto {}^t x$ est linéaire sur \mathbb{C} et que les applications $x \mapsto \bar{x}$ et $x \mapsto x^*$ sont linéaires sur \mathbb{R} .

Notons $\text{GL}_N(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles $N \times N$ à coefficients dans \mathbb{K} , et I_N son élément neutre. Puisque

$$\text{GL}_N(\mathbb{K}) = \{X \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}) : \det X \neq 0\}$$

et par la continuité du déterminant (qui est un polynôme en les coefficients de la matrice), $\text{GL}_N(\mathbb{R})$ est un ouvert de \mathbb{R}^{N^2} et $\text{GL}_N(\mathbb{C})$ est un ouvert de \mathbb{R}^{2N^2} . Ces ouverts sont denses, car si m est le minimum des valeurs absolues des valeurs propres non nulles de $X \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, alors pour tout $\lambda \in]0, m[$, la matrice $X - \lambda I_N$ est inversible (car de déterminant non nul : les racines du polynôme $\det(X - \lambda I_N)$ en l'indéterminée λ sont les valeurs propres de X) et converge vers X quand λ tend vers 0 . Notons que $\text{GL}_N(\mathbb{R})$ est contenu dans $\text{GL}_N(\mathbb{C})$. Munis de leur structure de groupe et de leur topologie induite, $\text{GL}_N(\mathbb{R})$ et $\text{GL}_N(\mathbb{C})$ sont appelés respectivement le *groupe linéaire réel* de dimension N et le *groupe linéaire complexe* de dimension N .

Notons $\text{GL}(V)$ le groupe des bijections linéaires de V dans V .⁸ Le choix d'une base vectorielle (e_1, \dots, e_N) de V permet d'identifier $\text{GL}_N(\mathbb{K})$ et $\text{GL}(V)$, par la bijection

$$(a_j^i)_{1 \leq i, j \leq N} \mapsto \{\lambda^j e_j \mapsto a_j^i \lambda^j e_i\}.$$

Mais il est important de noter que cet isomorphisme dépend du choix de la base. Son inverse est l'application qui à une bijection linéaire f de V dans V associe la matrice de f dans la base (e_1, \dots, e_N) de V . La colonne des coordonnées de $f(x)$ (dans cette base) est alors le produit de la matrice de f par la colonne des coordonnées de x (dans cette base) :

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^N \\ \vdots & & \vdots \\ a_N^1 & \dots & a_N^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 \lambda^1 \\ \vdots \\ a_N^1 \lambda^1 \end{pmatrix}.$$

7. Certains physiciens disent *hermitique*.

8. Il est appelé le *groupe linéaire* de V .

Pour tout $x \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$, notons $\mathrm{Ad} x : \mathcal{M}_N(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ l'application linéaire définie par

$$\mathrm{Ad} x : X \mapsto x X x^{-1} .$$

Notons que $\mathrm{Ad} x$ est inversible, d'inverse $\mathrm{Ad}(x^{-1})$, et que $\mathrm{Ad}(xy) = (\mathrm{Ad} x) \circ (\mathrm{Ad} y)$. Donc l'application $\mathrm{Ad} : \mathrm{GL}_N(\mathbb{K}) \rightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{M}_N(\mathbb{K}))$ définie par

$$\mathrm{Ad} : x \mapsto \mathrm{Ad} x$$

est un morphisme de groupes, appelé la *représentation Adjointe* de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$.

Pour tout $X \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, l'application $\mathrm{ad} X : \mathcal{M}_N(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ définie par

$$\mathrm{ad} X : Y \mapsto XY - YX$$

est linéaire, donc un endomorphisme de $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$. L'application $\mathrm{ad} : \mathcal{M}_N(\mathbb{K}) \rightarrow \mathrm{End}(\mathcal{M}_N(\mathbb{K}))$ définie par

$$\mathrm{ad} : X \mapsto \mathrm{ad} X$$

est linéaire, appelée la *représentation adjointe* de $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$.

Proposition 1.1. *La représentation Adjointe $\mathrm{Ad} : \mathrm{GL}_N(\mathbb{K}) \rightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{M}_N(\mathbb{K}))$ est C^∞ et sa différentielle en la matrice identité est*

$$d\mathrm{Ad}_{I_N} = \mathrm{ad} .$$

Démonstration. Notons que $\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$ et $\mathrm{GL}(\mathcal{M}_N(\mathbb{K}))$ sont des ouverts de \mathbb{K}^{N^2} et \mathbb{K}^{N^4} respectivement, donc parler d'application différentiable ou C^∞ de l'un dans l'autre a un sens. L'application $\iota : x \mapsto x^{-1}$ de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$ est C^∞ , car par la formule donnant l'inverse, les coefficients de x^{-1} sont des fractions rationnelles de dénominateur ne s'annulant pas en les coefficients de x . Comme l'application Φ de $\mathcal{M}_N(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ définie par $(x, y) \mapsto xy$ est bilinéaire, donc de différentielle en (I_N, I_N) égale à $(X, Y) \mapsto X + Y$, et puisque $\Phi(x, \iota(x)) = e$ pour tout $x \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, la différentielle de ι en I_N est

$$d\iota_{I_N} = -\mathrm{id}_{\mathcal{M}_N(\mathbb{K})} .$$

L'application de $\mathcal{M}_N(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{End}(\mathcal{M}_N(\mathbb{K}))$ définie par $(x, y) \mapsto \{Z \mapsto xZy\}$ est bilinéaire. En particulier, sa différentielle en (I_N, I_N) est égale à l'application $(X, Y) \mapsto \{Z \mapsto XZ + ZY\}$. Le calcul de la différentielle $d\mathrm{Ad}_{I_N}$, qui est une application de $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{End}(\mathcal{M}_N(\mathbb{K}))$, s'en déduit, par le théorème de dérivation des fonctions composées :

$$d\mathrm{Ad}_{I_N}(X) = \{Z \mapsto XZ + Zd\iota_{I_N}(X)\} = \{Z \mapsto XZ - ZX\} . \quad \square$$

Nous reviendrons plus longuement sur les applications ad et Ad dans les parties 1.3 et 1.4, en particulier pour expliquer pourquoi elles sont appelées des représentations.

L'application exponentielle des matrices

L'application exponentielle des matrices $\exp : \mathcal{M}_N(\mathbb{K}) \rightarrow \text{GL}_N(\mathbb{K})$, qui sera très utile dans la suite, est définie par

$$X \mapsto \exp X = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} X^n .^9$$

Nous résumons ses propriétés dans le résultat suivant.

Proposition 1.2. (1) Pour tous les $X, Y \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, si $XY = YX$, alors

$$\exp(X + Y) = \exp X \exp Y$$

et en particulier $\exp X$ est inversible, d'inverse $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$.

(2) Pour tous les $\lambda^1, \dots, \lambda^N \in \mathbb{K}$, nous avons

$$\exp \begin{pmatrix} \lambda^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda^1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda^N} \end{pmatrix} .$$

(3) Pour tout $X \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, nous avons

$${}^t(\exp X) = \exp({}^t X)$$

et si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors

$$(\exp X)^* = \exp(X^*)$$

De plus, si $P \in \text{GL}_N(\mathbb{K})$, alors

$$P(\exp X)P^{-1} = \exp(PHP^{-1}) .$$

(4) Pour tout $X \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, en notant $\text{tr } X = a_i^i$ la trace de $X = (a_j^i)_{1 \leq i, j \leq N}$, nous avons

$$\det(\exp X) = e^{\text{tr } X} .$$

(5) L'application \exp est de classe C^∞ (entre deux ouverts de \mathbb{R}^{N^2} si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et de \mathbb{R}^{2N^2} si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). De plus la différentielle de \exp en la matrice nulle 0 de $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ est l'application identité de $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$:

$$d \exp_0 = \text{id}_{\mathcal{M}_N(\mathbb{K})} .$$

Donc \exp est un C^∞ -difféomorphisme d'un voisinage ouvert de 0 dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ dans un voisinage ouvert de la matrice identité I_N dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$.

9. Rappelons que cette série converge normalement dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ (pour n'importe quelle norme sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, elles sont toutes équivalentes). En notant $\|\cdot\|$ la norme usuelle sur \mathbb{K}^N (de sorte que $\|v\|^2 = \sum_{j=1}^N |v^j|^2$ pour tout $v = (v^1, \dots, v^N)$ dans \mathbb{K}^N), soit $\|\cdot\|$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, définie par

$$\|X\| = \sup_{v \in \mathbb{K}^N, \|v\| \leq 1} \|Xv\|$$

pour tout $X \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, en identifiant tout $v \in \mathbb{K}^N$ avec le vecteur colonne de ses coordonnées. La propriété cruciale de sous-multiplicativité ($\|XY\| \leq \|X\| \|Y\|$ pour tous les $X, Y \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$) de la norme d'opérateur montre la convergence normale de la série $\exp X$, avec de plus $\|\exp(X)\| \leq e^{\|X\|}$.

- (6) Appelons sous-groupe à un paramètre de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$ toute application de classe C^∞ de \mathbb{R} dans l'ouvert $\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$ qui est aussi un morphisme de groupes.¹⁰ L'application de l'ensemble $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ dans l'ensemble des sous-groupes à un paramètre de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$, qui à $X \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ associe l'application

$$t \mapsto \exp(tX)$$

est une bijection.¹¹

- (7) Pour tout $X \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, nous avons

$$\mathrm{Ad}(\exp X) = \exp(\mathrm{ad} X) .$$

- (8) Pour tout $X \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, la différentielle $d\exp_X$ de l'application exponentielle en X est inversible si et seulement si X n'admet pas de valeurs propres complexes λ et μ telles que $\lambda - \mu \in 2i\pi\mathbb{Z} - \{0\}$.

Démonstration. Les trois premières propriétés sont élémentaires. La démonstration de la première est la même que dans le cas de l'application exponentielle de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Mais on prendra bien garde que la formule $\exp(X + Y) = \exp X \exp Y$ peut ne pas être correcte sans l'hypothèse que X et Y commutent.

Notons que le déterminant et la trace sont invariants par conjugaison, puisque \det est un morphisme de groupes (nous avons $\det(xy) = \det(x) \det(y)$ pour tous les $x, y \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$) à valeurs dans un groupe abélien, et puisque $\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(yx)$ pour tous les $x, y \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$. L'assertion (4) se montre alors en trigonalisant¹² (sur \mathbb{C}) la matrice X et en utilisant l'assertion (3).

Les deux premières affirmations de l'assertion (5) sont élémentaires par l'expression en tant que série de \exp , et la dernière découle du théorème d'inversion locale (voir le théorème B.1 dans l'appendice B).

Montrons l'assertion (6), qui dit en particulier que les sous-groupes à un paramètre de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$ sont exactement les applications $t \mapsto \exp(tX)$ pour $X \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$.

Par l'assertion (1), il est immédiat que $t \mapsto \exp(tX)$ est un sous-groupe à un paramètre de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$ pour tout $X \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$. Réciproquement, soit φ un sous-groupe à un paramètre de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$. Posons $X = \frac{d}{dt}|_{t=0} \varphi(t)$, qui appartient à $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$. En dérivant par rapport à s en $s = 0$, l'équation $\varphi(t + s) = \varphi(t)\varphi(s)$, nous obtenons $\frac{d\varphi}{dt}(t) = \varphi(t)X$. L'unique solution de cette équation différentielle linéaire du premier ordre telle que $\varphi(0) = \mathrm{id}_{\mathcal{M}_N(\mathbb{K})}$ est $t \mapsto \exp(tX)$.

Montrons l'assertion (7). L'application $\mathrm{Ad} : \mathrm{GL}_N(\mathbb{K}) \rightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{M}_N(\mathbb{K}))$ est un morphisme de groupes et une application C^∞ . Donc les applications $t \mapsto \mathrm{Ad}(\exp(tX))$ et

10. En fait, tout morphisme de groupes continu de \mathbb{R} dans $\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$ est automatiquement de classe C^∞ , voir par exemple [Paul1, Coro. 5.22].

11. En physique, l'élément $Y = iX \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ est appelé le générateur infinitésimal du sous-groupe à un paramètre $t \mapsto \exp(tX)$, de sorte que ce groupe à un paramètre s'écrit

$$t \mapsto \exp(-itY) .$$

12. Une base d'un espace vectoriel V trigonalise un endomorphisme de V si la matrice de cet endomorphisme dans cette base est triangulaire supérieure.

$t \mapsto \exp(t \operatorname{ad} X)$ sont deux sous-groupes à un paramètre de $\operatorname{GL}(\mathcal{M}_N(\mathbb{K}))$. Leur dérivée en $t = 0$ est respectivement $d \operatorname{Ad}_{I_N} \circ d \exp_0(X)$ et $\operatorname{ad} X$. Nous avons $d \exp_0 = \operatorname{id}_{\mathcal{M}_N(\mathbb{K})}$ par l'assertion (5) et $d \operatorname{Ad}_{I_N} = \operatorname{ad}$ par la proposition 1.1. Donc ces deux sous-groupes à un paramètre ont la même dérivée en $t = 0$. Par l'assertion (6), ils sont donc égaux, ce qui montre le résultat en les évaluant en $t = 1$.

Pour démontrer l'assertion (8), nous commençons par un lemme calculant la différentielle de l'exponentielle en un élément quelconque X de $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$. Pour tout endomorphisme u d'un espace vectoriel réel V de dimension finie, notons $\Theta(u) = \frac{\operatorname{id} - \exp u}{u}$ la valeur de la série (normalement convergente pour n'importe quel choix de norme sur $\operatorname{End}(V)$, par exemple la norme d'opérateur)

$$\frac{\operatorname{id} - \exp u}{u} = - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(n+1)!} u^n .$$

Pour tout $Y \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, notons L_Y l'élément de $\operatorname{End}(\mathcal{M}_N(\mathbb{K}))$ défini par $Z \mapsto YZ$.

Lemma 1.3. *Pour tout $X \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, nous avons*

$$d \exp_X = L_{\exp X} \circ \frac{\operatorname{id} - \exp(-\operatorname{ad} X)}{-\operatorname{ad} X} .$$

Démonstration. Remarquons que l'application $Y \mapsto L_Y$ de $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ dans $\operatorname{End}(\mathcal{M}_N(\mathbb{K}))$ est linéaire et que si Y est inversible, alors L_Y est inversible, d'inverse $L_{Y^{-1}}$.

Soit $X \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$. Puisque $(L_{\exp X})^{-1} = L_{(\exp X)^{-1}} = L_{\exp(-X)}$, il s'agit de montrer que pour tout Y dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, nous avons

$$\exp(-X) d \exp_X(Y) = \Theta(-\operatorname{ad} X)(Y) .$$

Notons $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \operatorname{End}(\mathcal{M}_N(\mathbb{K}))$ l'application C^∞ définie par

$$f_X : s \mapsto \{Y \mapsto s \exp(-sX) d \exp_{sX}(Y)\} .$$

Soient $s, t \in \mathbb{R}$. En dérivant par rapport à X l'équation $\exp((s+t)X) = \exp(sX) \exp(tX)$, nous obtenons par bilinéarité, pour tout Y dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$,

$$(s+t) d \exp_{(s+t)X}(Y) = s d \exp_{sX}(Y) \exp(tX) + t \exp(sX) d \exp_{tX}(Y) .$$

En multipliant à gauche par la matrice $\exp(-(s+t)X)$, nous avons, en utilisant les assertions (1) et (7),

$$\begin{aligned} f_X(s+t) &= \exp(-tX) f_X(s) \exp(tX) + f_X(t) = \operatorname{Ad}(\exp(-tX)) \circ f_X(s) + f_X(t) \\ &= \exp(\operatorname{ad}(-tX)) \circ f_X(s) + f_X(t) = \exp(-t \operatorname{ad} X) \circ f_X(s) + f_X(t) . \end{aligned}$$

En dérivant cette équation par rapport à t en $t = 0$, et comme $f_X'(0) = d \exp_0 = \operatorname{id}$, nous obtenons

$$f_X'(s) = \operatorname{id} - \operatorname{ad} X \circ f_X(s) .$$

Il est facile de vérifier que l'application $s \mapsto s \Theta(-s \operatorname{ad} X)$ est aussi une solution de cette équation différentielle du premier ordre, dont la valeur en $s = 0$ est $0 = f_X(0)$. Par unicité, nous avons donc $f_X(s) = s \Theta(-s \operatorname{ad} X)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. En prenant $s = 1$, le résultat en découle. \square

Revenons maintenant à la démonstration de l'assertion (8). Si (e_1, \dots, e_N) est une base de \mathbb{C}^N trigonalisant X , alors la base $(E_i^j)_{1 \leq i, j \leq N}$ (ordonnée en mettant bout à bout les lignes de cette matrice) de $\text{End}(\mathbb{C}^N)$ associée à (e_1, \dots, e_N) trigonalise $\text{ad } X$. Donc si $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sont les valeurs propres complexes de X , alors les $\lambda_i - \lambda_j$ pour $1 \leq i, j \leq N$ sont les valeurs propres complexes de $\text{ad } X$, et les valeurs propres complexes de $\frac{1 - \exp(-\text{ad } X)}{-\text{ad } X}$ sont 1 si X admet une valeur propre complexe de multiplicité au moins 2 et les $\frac{1 - e^{\lambda_i - \lambda_j}}{\lambda_i - \lambda_j}$ pour les valeurs propres distinctes λ_i et λ_j . En particulier, $\frac{1 - \exp(-\text{ad } X)}{-\text{ad } X}$ est inversible si et seulement si la différence de deux valeurs propres distinctes de X n'est pas un multiple non nul de $2i\pi$. Le résultat découle alors du lemme 1.3. \square

Exercice E.1. ¹³ (1) Notons $\text{Nil}_N = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ le sous-espace vectoriel sur \mathbb{K} de $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ formé des matrices nilpotentes ¹⁴ triangulaires supérieures. Notons aussi $\text{Uni}_N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ le sous-espace affine de $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ formé des matrices unipotentes ¹⁵ triangulaires supérieures. Montrer que $\exp : \text{Nil}_N \rightarrow \text{Uni}_N$ est un C^∞ -difféomorphisme.

(2) Notons $\text{Sym}_N = \{X \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) : {}^t X = X\}$ le sous-espace vectoriel réel de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques, et Sym_N^+ l'ouvert de Sym_N formé des matrices symétriques définies positives. Montrer que $\exp : \text{Sym}_N \rightarrow \text{Sym}_N^+$ est un C^∞ -difféomorphisme.

(3) Notons $\text{Herm}_N = \{X \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C}) : X^* = X\}$ le sous-espace vectoriel réel de $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ formé des matrices hermitiennes, et Herm_N^+ l'ouvert de Herm_N formé des matrices hermitiennes définies positives. Montrer que $\exp : \text{Herm}_N \rightarrow \text{Herm}_N^+$ est un C^∞ -difféomorphisme.

(4) Montrer qu'il existe un et un seul C^∞ -difféomorphisme $x \mapsto \sqrt{x}$ de Sym_N^+ (respectivement Herm_N^+) dans lui-même tel que $(\sqrt{x})^2 = x$ pour tout x dans Sym_N^+ (respectivement Herm_N^+).

Groupes de Lie classiques

Introduisons sans plus tarder les groupes de Lie classiques que nous allons étudier dans ce cours (nous renvoyons à [Pau2, page 14-15], ainsi qu'à [Die2, Hel], pour une liste complète des groupes dits classiques).

Soient n, p, q des éléments de \mathbb{N} non nuls. Notons I_n la matrice identité $n \times n$, et

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}.$$

13. Voir la partie finale de chaque chapitre pour des indications sur la résolution des exercices du chapitre

14. c'est-à-dire dont une puissance est nulle

15. c'est-à-dire dont la différence avec l'identité est nilpotente

Nous définissons alors les objets suivants.

$$\begin{array}{lcl}
\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) & = & \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det x = 1\} \\
\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) & = & \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) : \det x = 1\} \\
\mathrm{O}(n) & = & \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : {}^t x x = I_n\} \\
\mathrm{SO}(n) & = & \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \\
\mathrm{O}(p, q) & = & \{x \in \mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R}) : {}^t x I_{p, q} x = I_{p, q}\} \\
\mathrm{SO}(p, q) & = & \mathrm{O}(p, q) \cap \mathrm{SL}_{p+q}(\mathbb{R}) \\
\mathrm{U}(n) & = & \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) : x^* x = I_n\} \\
\mathrm{SU}(n) & = & \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})
\end{array} \tag{1}$$

Le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est appelé le *groupe spécial linéaire* réel. Le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est appelé le *groupe spécial linéaire* complexe.

Le groupe $\mathrm{O}(n)$ est appelé le *groupe orthogonal* : c'est le groupe des bijections linéaires préservant le produit scalaire de l'espace euclidien standard $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, où

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$. Le groupe $\mathrm{SO}(n)$ est appelé le *groupe spécial orthogonal*, ou aussi le *groupe des rotations*.

Le groupe $\mathrm{U}(n)$ est appelé le *groupe unitaire* : c'est le groupe des bijections linéaires préservant le produit scalaire de l'espace hermitien standard $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, où le produit scalaire hermitien standard¹⁶ est défini par

$$\langle z, w \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{z}_i w_i$$

si $z = (z_1, \dots, z_n)$ et $w = (w_1, \dots, w_n)$. Le groupe $\mathrm{SU}(n)$ est appelé le *groupe spécial unitaire*.

Notons $\mathbb{R}^{p, q}$ l'espace pseudo-euclidien standard de signature (p, q) , c'est-à-dire l'espace vectoriel réel \mathbb{R}^{p+q} muni de la forme quadratique standard¹⁷ de signature (p, q)

$$Q = -(x_1)^2 - \dots - (x_p)^2 + (x_{p+1})^2 + \dots + (x_{p+q})^2 .$$

Alors $\mathrm{O}(p, q)$ est exactement l'ensemble des matrices (dans la base canonique) des bijections linéaires $f : \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \mathbb{R}^{p+q}$ qui préservent la forme quadratique Q , c'est-à-dire qui vérifient

$$Q \circ f = Q .$$

En utilisant le fait que le déterminant $\det : \mathrm{GL}_N(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^\times$ est un morphisme de groupes, et les propriétés¹⁸ de la transposée des matrices

$$\forall x, y \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{K}), \quad {}^t(xy) = {}^t y {}^t x \quad \text{et} \quad {}^t(x^{-1}) = ({}^t x)^{-1} ,$$

16. La convention concernant le côté linéaire et celui anti-linéaire d'un produit hermitien varie suivant les références.

17. La convention concernant la position des signes + et - varie dans les références.

18. On dit que la transposition et l'adjoint sont des *anti-morphismes* de groupes de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$.

il est facile de montrer que les ensembles définis dans le tableau (1) sont des sous-groupes des groupes $GL_N(\mathbb{K})$ qui les contiennent. Ils sont aussi fermés, car intersections de parties définies par l'annulation de fonctions continues (car polynomiales). Ils possèdent aussi des propriétés différentielles, comme nous le verrons ci-dessous.

De plus, les groupes $O(n)$ et $U(n)$ sont bornés dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ respectivement : par exemple¹⁹ si $x = (a_j^i)_{1 \leq i, j \leq n} \in U(n)$, alors pour tous les $i, j \in \{1, \dots, n\}$, nous avons

$$|a_j^i|^2 \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_j^i|^2 = \text{tr}(x^* x) = \text{tr}(I_n) = n .$$

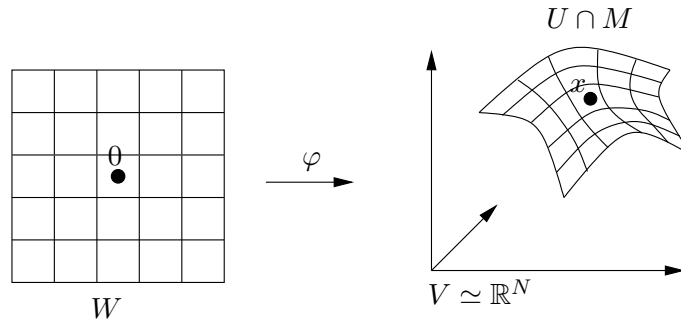
Donc les groupes $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ sont compacts, car fermés et bornés dans des espaces vectoriels réels normés de dimension finie. Notons que

$$O(n) = U(n) \cap GL_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad SO(n) = SU(n) \cap GL_n(\mathbb{R}) .$$

Rappels sur les sous-variétés

Pour $n \leq N$ des entiers strictement positifs, les sous-variétés de dimension n de \mathbb{R}^N sont les parties de \mathbb{R}^N sur lesquelles existent localement des systèmes de n coordonnées permettant d'effectuer du calcul différentiel comme dans les ouverts de \mathbb{R}^n . Nous renvoyons par exemple à [Cha, Chap. 6] pour tout complément.

Plus précisément, soient $N, n \in \mathbb{N} - \{0\}$, avec $n \leq N$, et soit V un espace vectoriel réel normé de dimension N (par exemple \mathbb{R}^N). Une partie M de V est une *sous-variété de V de dimension n* si pour tout x dans M , il existe un voisinage ouvert U de x dans V , un voisinage ouvert W de 0 dans \mathbb{R}^n et une application $\varphi : W \rightarrow V$ de classe C^∞ tels que $\varphi(0) = x$ et que φ soit un homéomorphisme de W sur $U \cap M$ dont la différentielle est injective en tout point de W .



Une telle application $\varphi : W \rightarrow M$ est appelée un *paramétrage local* de M en x .

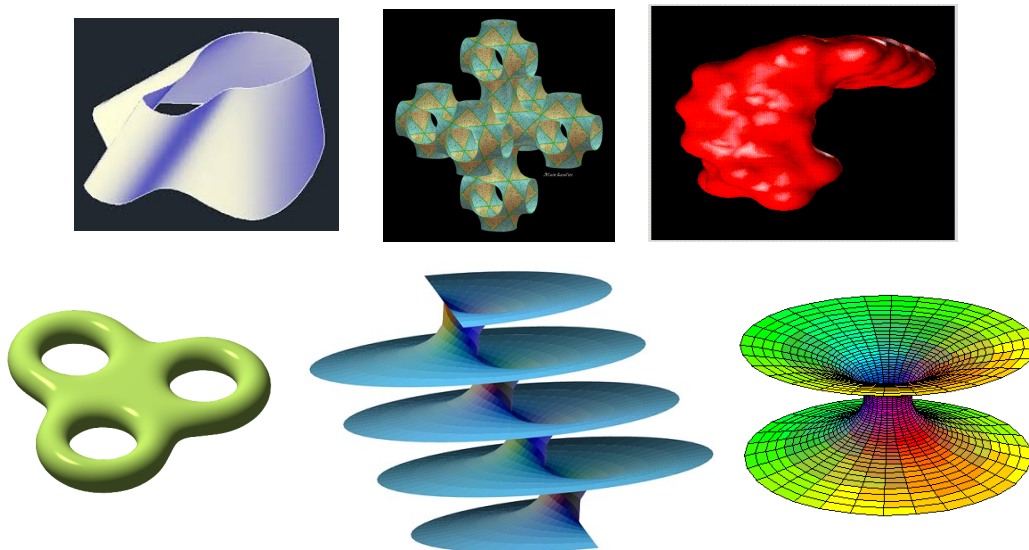
Les applications $(\lambda^1, \dots, \lambda^n) \mapsto \varphi(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ sont des systèmes de coordonnées qui permettent localement de se ramener dans un ouvert de \mathbb{R}^n . En particulier, nous pouvons demander qu'une application entre sous-variétés soit de classe C^k si elle l'est quand on la ramène à des applications entre ouverts d'espaces euclidiens usuels par les systèmes de coordonnées.

Plus précisément, pour tout $k \in (\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty\}$, une application $f : M \rightarrow M'$ entre deux sous-variétés (de $V \simeq \mathbb{R}^N$ et $V' \simeq \mathbb{R}^{N'}$ respectivement) est *de classe C^k* si et

19. Un autre argument est de dire que tout élément de $O(n)$ et $U(n)$ préservant la norme des vecteurs (dans \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n respectivement), ses vecteurs colonnes sont de norme 1, donc les valeurs absolues de ses coefficients sont au plus 1.

seulement si pour tout $x \in M$, il existe des paramétrages locaux $\varphi : W \rightarrow M$ de M en x et $\varphi' : W' \rightarrow M'$ de M' en $f(x)$, tels que $f(\varphi(W)) \subset \varphi'(W')$ et $\varphi'^{-1} \circ f \circ \varphi : W \rightarrow W'$ est de classe C^k . Ceci ne dépend pas des choix des paramétrages locaux. Un C^k -difféomorphisme entre deux sous-variétés est une bijection de classe C^k dont l'inverse est encore de classe C^k .

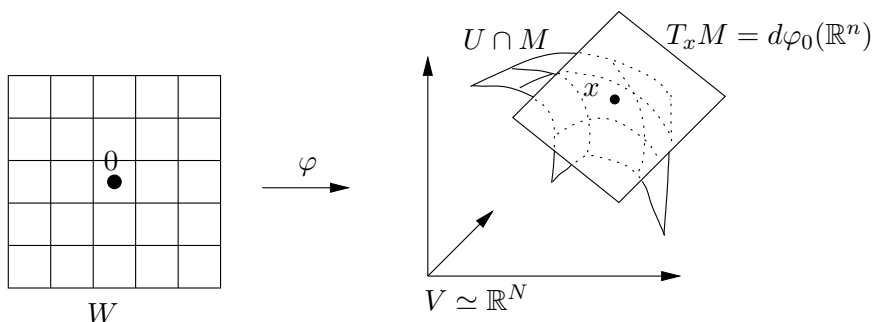
Le dessin ci-dessous représente quelques sous-variétés de dimension 2 (appelées *surfaces*) de \mathbb{R}^3 .



Un vecteur v de V est dit *tangent* à M en x s'il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et une courbe $c : I \rightarrow V$ de classe C^1 tracée sur M (c'est-à-dire à valeurs dans M), telle que

$$c(0) = x \quad \text{et} \quad \dot{c}(0) = v .$$

Notons $T_x M$ l'ensemble des vecteurs tangents à M en x .



Si $\varphi : W \rightarrow M$ est un paramétrage local en $x = \varphi(0)$ et si c est une courbe C^1 dans W telle que $c(0) = 0$ et $\dot{c}(0) = w$, alors $\varphi \circ c$ est une courbe C^1 tracée sur $\varphi(W)$ telle que $\varphi \circ c(0) = x$ et $(\varphi \circ c)'(0) = d\varphi_0(w)$, et réciproquement, l'inverse de φ transforme les courbes C^1 tracées sur (le voisinage $\varphi(W)$ de x dans) M passant par x en courbes C^1 tracées sur W passant par 0. Donc

$$T_x M = \text{Im } d\varphi_0 .$$

En particulier, $T_x M$ est un sous-espace vectoriel de V de dimension n , par l'injectivité des différentielles des paramétrages locaux.

Soient V' un espace vectoriel réel normé de dimension finie et $f : M \rightarrow M'$ une application C^1 de M dans une sous-variété M' de V' . Notons

$$T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} M'$$

l'application qui à $v \in T_x M$, tangent en $t = 0$ à une courbe c tracée sur M , associe le vecteur vitesse en $t = 0$ de la courbe $f \circ c$: celle-ci est en effet de classe C^1 , tracée sur M' et passe à l'instant $t = 0$ par $f(x)$. En prenant des paramétrages locaux, nous pouvons montrer que l'application $T_x f$ ne dépend pas du choix de la courbe c , et qu'elle est linéaire. Elle est appelée *l'application tangente* à f en x .

Par exemple, si f est la restriction à M d'une application C^k notée \tilde{f} , définie sur un voisinage ouvert de M dans V et à valeurs dans un voisinage ouvert de M' dans V' , alors f est C^k et pour tout $x \in M$, l'application tangente $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} M'$ est la restriction, au sous-espace vectoriel $T_x M$ de V , de la différentielle $d\tilde{f}_x : V \rightarrow V'$ de \tilde{f} en x .

Toujours en prenant des paramétrages locaux, on montre aussi que le théorème de dérivation des fonctions composées s'étend : si $f : M \rightarrow M'$ et $g : M' \rightarrow M''$ sont C^k , alors $g \circ f : M \rightarrow M''$ est C^k , et pour tout $x \in M$, nous avons

$$T_x(g \circ f) = T_{f(x)} g \circ T_x f .$$

Exemples. (1) Tout ouvert non vide U de \mathbb{R}^N est une sous-variété de dimension N de \mathbb{R}^N , et pour tout $x \in U$, nous avons

$$T_x U = \mathbb{R}^N .$$

(2) Plus généralement, tout ouvert non vide U d'une sous-variété M de dimension n de $V \simeq \mathbb{R}^N$ est une sous-variété de dimension n de V et $T_x U = T_x M$ pour tout $x \in U$.

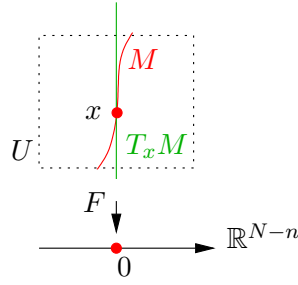
(3) Le *produit* de deux sous-variétés M et M' , de dimension n et n' , de \mathbb{R}^N et $\mathbb{R}^{N'}$ respectivement est une sous-variété de dimension $n + n'$ de $\mathbb{R}^{N+N'}$.²⁰ De plus, pour tous les $x \in M$ et $x' \in M'$, nous avons

$$T_{(x,x')}(M \times M') = T_x M \times T_{x'} M' .$$

(4) Remarquons que la propriété d'être une sous-variété de dimension n de V est invariante par C^∞ -difféomorphismes ambiants : si f est un C^∞ -difféomorphisme d'un voisinage ouvert dans V d'une partie M de V , à valeurs dans un ouvert d'un espace vectoriel réel normé V' de dimension finie, alors M est une sous-variété de dimension n de V si et seulement si $f(M)$ est une sous-variété de dimension n de V' .

Le critère suivant (dont nous renvoyons la démonstration par exemple à [Paul]) par « fonction implicite » est l'un des moyens les plus pratiques pour vérifier qu'une partie de \mathbb{R}^N est une sous-variété.

20. En effet, on vérifie que pour tout $(x, x') \in M \times M'$, si $\varphi : W \rightarrow M$ et $\varphi' : W' \rightarrow M'$ sont des paramétrages locaux de M en x et de M' en x' respectivement, alors l'application de $W \times W'$ (qui est un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n'} = \mathbb{R}^{n+n'}$) dans $M \times M'$ (qui est une partie de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N'} = \mathbb{R}^{N+N'}$) définie par $(y, y') \mapsto (\varphi(y), \varphi'(y'))$ est un paramétrage local de $M \times M'$ en (x, x') .



Proposition 1.4. Une partie M de \mathbb{R}^N est une sous-variété de \mathbb{R}^N de dimension n si et seulement si pour tout x dans M , il existe un voisinage U de x dans \mathbb{R}^N , et une application $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{N-n}$ de classe C^∞ et de différentielle dF_x surjective, tels que $U \cap M = F^{-1}(0)$. De plus,

$$T_x M = \text{Ker } dF_x . \quad \square$$

Le résultat suivant se démontre à l'aide de ce critère, qui permet en plus de calculer les espaces tangents aux éléments neutres et les dimensions des groupes de Lie classiques étudiés dans ces notes.

Proposition 1.5. Les parties $\text{SL}_n(\mathbb{R})$, $\text{SL}_n(\mathbb{C})$, $\text{O}(n)$, $\text{SO}(n)$, $\text{O}(p, q)$, $\text{SO}(p, q)$, $\text{U}(n)$ et $\text{SU}(n)$ de respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$, $\mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{(p+q)^2}$, $\mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{(p+q)^2}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$ sont des sous-variétés, dont les espaces tangents aux éléments neutres et les dimensions sont les suivants.

G	$T_e G$	dimension
$\text{GL}_n(\mathbb{R})$	$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	n^2
$\text{GL}_n(\mathbb{C})$	$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$	$2n^2$
$\text{SL}_n(\mathbb{R})$	$\{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \text{tr } X = 0\}$	$n^2 - 1$
$\text{SL}_n(\mathbb{C})$	$\{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : \text{tr } X = 0\}$	$2n^2 - 2$
$\text{O}(n)$	$\{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : {}^t X = -X\}$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$\text{SO}(n)$	$T_{I_n} \text{O}(n)$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$\text{O}(p, q)$	$\{X \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R}) : {}^t X I_{p,q} + I_{p,q} X = 0\}$	$\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}$
$\text{SO}(p, q)$	$T_{I_{p+q}} \text{O}(p, q)$	$\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}$
$\text{U}(n)$	$\{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : X^* = -X\}$	n^2
$\text{SU}(n)$	$\{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : X^* = -X, \text{tr } X = 0\}$	$n^2 - 1$

Ainsi, l'espace tangent en l'élément neutre de $\text{SO}(n)$ est le sous-espace vectoriel réel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques, et celui de $\text{SU}(n)$ est le sous-espace vectoriel réel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices antihermitiennes de trace nulle.

Démonstration. Pour tout $g \in \text{GL}_N(\mathbb{K})$, l'application de $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ définie par $x \mapsto xg$ est un C^∞ -difféomorphisme. Donc pour montrer que les sous-groupes en question sont des sous-variétés, il suffit de montrer (voir l'exemple (4) ci-dessus) qu'ils sont des sous-variétés au voisinage de leur élément neutre. La démonstration donnera l'expression de l'espace tangent en l'identité.

Les deux premières lignes du tableau ci-dessus sont immédiates, puisque $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

L'application $F = \det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est C^∞ (car polynomiale en les coefficients), et sa différentielle en I_n est l'application $dF_{I_n} = \mathrm{tr}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans \mathbb{K} , qui est clairement surjective. Donc $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = F^{-1}(1)$ est une sous-variété au voisinage de I_n par la proposition 1.4, dont l'espace tangent en I_n est $\mathrm{Ker} \mathrm{tr}$. Toujours par cette proposition, la dimension de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est égale à la différence entre la dimension de l'espace de départ et celle de l'espace d'arrivée, donc $n^2 - 1$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $2n^2 - 2$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Ceci montre les troisième et quatrième lignes du tableau ci-dessus.

Pour $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{O}(p, q)$, $\mathrm{U}(n)$ et $\mathrm{SU}(n)$, nous appliquons la méthode ci-dessus avec F valant respectivement

- l'application $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{Sym}_n$ définie par $x \mapsto {}^t x x$ (dont la différentielle en I_n , qui est $X \mapsto {}^t X + X$, est surjective, puisque tout élément Y de Sym_n s'écrit ${}^t X + X$ avec $X = \frac{1}{2}Y$), de sorte que $F(I_n) = I_n$ et $F^{-1}(I_n) = \mathrm{O}(n)$,

- l'application $F : \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{Sym}_{p+q}$ définie par $x \mapsto {}^t x I_{p,q} x$ (dont la différentielle en I_{p+q} , qui est $X \mapsto {}^t X I_{p,q} + I_{p,q} X$, est surjective, puisque tout élément Y de Sym_{p+q} s'écrit ${}^t X I_{p,q} + I_{p,q} X$ avec $X = \frac{1}{2} I_{p,q} Y$), de sorte que $F(I_{p+q}) = I_{p+q}$ et $F^{-1}(I_{p+q}) = \mathrm{O}(p, q)$,

- l'application $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{Herm}_n$ définie par $x \mapsto x^* x$ (dont la différentielle en I_n , qui est $X \mapsto X^* + X$, est surjective, puisque tout élément Y de Herm_n s'écrit $X^* + X$ avec $X = \frac{1}{2}Y$), de sorte que $F(I_n) = I_n$ et $F^{-1}(I_n) = \mathrm{U}(n)$,

- l'application F de l'ouvert $U = \{x \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : \det x \neq -1\}$ à valeurs dans $\mathrm{Herm}_n \times \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto (x^* x, \mathrm{Im} \det x)$ (dont la différentielle en I_n , qui est $X \mapsto (X^* + X, \mathrm{Im} \mathrm{tr} X)$, est surjective, puisque tout élément Y de Herm_n s'écrit $X^* + X$ avec $X = \frac{1}{2}Y + Z$ où Z est n'importe quelle matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont imaginaires purs), de sorte que $F(I_n) = (I_n, 0)$ et $F^{-1}(I_n, 0) = U \cap \mathrm{SU}(n)$, puisque que le déterminant de tout élément x de $\mathrm{SU}(n)$ est de module 1, donc de partie imaginaire nulle si et seulement si $\det x$ est égal à -1 (exclu si x appartient à U) ou 1.

Si x appartient à $G = \mathrm{O}(n)$ ou à $G = \mathrm{O}(p, q)$, alors $(\det x)^2 = 1$. Donc l'application $\det : G \rightarrow \{-1, 1\}$ est continue et $\{1\}$ est un ouvert du sous-espace topologique $\{-1, 1\}$ de \mathbb{R} . Par conséquent $\mathrm{SO}(n)$ et $\mathrm{SO}(p, q)$ sont ouverts dans $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{O}(p, q)$ respectivement, comme image réciproque d'ouvert par une application continue. Ceci montre la véracité des lignes restantes du tableau ci-dessus. \square

Nous concluons cette partie en donnant la définition des groupes de Lie matriciels, comprenant par la proposition 1.5 les groupes de Lie classiques que nous allons étudier dans ce cours. Voir par exemple [Bou1, Bou2, Bou3, Bou4, God, OV, Ser, CSM, Kna, Pau2] pour la définition abstraite générale d'un groupe de Lie. Il existe certes des groupes de Lie qui ne sont pas des groupes de Lie matriciels, comme le revêtement universel de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (voir loc. cit.). Mais la restriction aux groupes de Lie matriciels ne pose aucun problème pour une introduction aux groupes de Lie pour la physique.

Définition 1.6. *Un groupe de Lie matriciel est un sous-groupe d'un $\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $N \in \mathbb{N} - \{0\}$ qui est une sous-variété de $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$.*

Notons que nous pourrions nous restreindre soit à $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (car $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$) soit à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (car en remplaçant chaque coefficient complexe $a + ib$

par la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, nous obtenons que $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{2N}(\mathbb{R})$, mais il est plus naturel de garder les deux éventualités à cause des exemples à traiter.

Pour tout élément g d'un groupe de Lie matriciel G dans $\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$, les *translations à gauche* $L_g : G \rightarrow G$ et à *droite* $R_g : G \rightarrow G$, définies respectivement par $x \mapsto gx$ et $x \mapsto xg$, sont des C^∞ -difféomorphismes, car d'inverses $L_{g^{-1}}$ et $R_{g^{-1}}$ respectivement, et restriction à G d'une application C^∞ (car polynomiale) de $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$.

Un *morphisme (de groupes de Lie)* entre deux groupes de Lie matriciels est un morphisme de groupes qui est de classe C^∞ . Notons qu'un morphisme de groupes $f : G \rightarrow G'$ entre deux groupes de Lie matriciels est C^∞ si et seulement s'il est C^∞ en l'élément neutre e , car $f \circ L_g = L_{f(g)} \circ f$ pour tout g dans G . Un *isomorphisme (de groupes de Lie)* est un morphisme bijectif, d'inverse un morphisme. Deux groupes de Lie matriciels sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de l'un sur l'autre. Un *automorphisme (de groupes de Lie)* est un isomorphisme d'un groupe de Lie matriciel dans lui-même. Un *sous-groupe de Lie* H d'un groupe de Lie matriciel G dans $\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de G qui est une sous-variété de $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$. C'est en particulier aussi un groupe de Lie matriciel dans $\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$.

Le critère suivant de H. Cartan est hors de portée de ces notes (voir par exemple [Paul1, Th. 5.20]). Il permet de montrer encore plus rapidement que les exemples classiques du tableau (1) sont bien des groupes de Lie matriciels. Mais nous aurons besoin du calcul de leur espace tangent en l'élément neutre donné dans la proposition 1.5.

Théorème 1.7 (H. Cartan). *Les groupes de Lie matriciels sont exactement les sous-groupes fermés d'un $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ pour $N \in \mathbb{N} - \{0\}$.*

Un morphisme de groupes entre deux groupes de Lie matriciels est un morphisme de groupes de Lie si et seulement s'il est continu. \square

Décomposition polaire

Soient $n, p, q \in \mathbb{N} - \{0\}$. Le résultat suivant permet de ramener l'étude des propriétés topologiques des groupes classiques non compacts du tableau (1) à ceux compacts.

Théorème 1.8 (Décomposition polaire). *L'application de $\mathrm{Herm}_n^+ \times \mathrm{U}(n)$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ définie par $(x, y) \mapsto xy$ est un C^∞ -difféomorphisme (appelé la décomposition polaire de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$), d'inverse $x \mapsto (\sqrt{xx^*}, \sqrt{xx^*}^{-1}x)$, où $x^* = {}^t\bar{x}$ est la matrice adjointe de x et $\sqrt{}$ est l'application définie dans l'exercice E.1 (4).*

L'application de $\mathrm{Sym}_n^+ \times \mathrm{O}(n)$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ définie par $(x, y) \mapsto xy$ est un C^∞ -difféomorphisme (appelé la décomposition polaire de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$), d'inverse l'application définie par $x \mapsto (\sqrt{x {}^t x}, \sqrt{x {}^t x}^{-1}x)$.

Démonstration. Nous démontrons le premier résultat, le second étant analogue.

Les applications $\phi : (x, y) \mapsto xy$ et $\psi : x \mapsto (\sqrt{xx^*}, \sqrt{xx^*}^{-1}x)$ sont bien définies (en effet xx^* est hermitienne²¹ définie positive²² pour tout $x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$), et de classe C^∞ (car polynomiale en les coefficients pour la première et composée d'applications C^∞ pour la

21. car $(xx^*)^* = (x^*)^*x^* = xx^*$

22. car pour tout $v \in \mathbb{C}^n$ (identifié au vecteur colonne de ses coordonnées), si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit hermitien standard de \mathbb{C}^n , alors $\langle xx^*v, v \rangle = \langle x^*v, x^*v \rangle = \|x^*v\|^2$, qui est positif ou nul, et qui est nul si et seulement si $x^*v = 0$, c'est-à-dire si v est nul car x est inversible

seconde, d'après l'exercice E.1 (4)). Il est immédiat que $\phi \circ \psi$ vaut l'identité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Si $x \in \mathrm{Herm}_n^+$ et $y \in U(n)$, alors

$$\sqrt{(xy)(xy)^*} = \sqrt{x(yy^*)x^*} = \sqrt{x^2} = x .$$

Donc $\psi \circ \phi$ vaut l'identité de $\mathrm{Herm}_n^+ \times U(n)$. \square

Corollaire 1.9. *La décomposition polaire et le groupe des composantes connexes des groupes de Lie classiques du tableau (1) sont donnés par le tableau suivant.*

G	décomposition polaire	$\pi_0 G$
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$	$\mathrm{O}(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$	$\mathrm{U}(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$	1
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$	$\mathrm{SO}(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}-1}$	1
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$	$\mathrm{SU}(n) \times \mathbb{R}^{n^2-1}$	1
$\mathrm{O}(n)$		$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$\mathrm{SO}(n)$		1
$\mathrm{O}(p, q)$	$\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbb{R}^{pq}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$\mathrm{SO}(p, q)$	$S(\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)) \times \mathbb{R}^{pq}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$\mathrm{U}(n)$		1
$\mathrm{SU}(n)$		1

Dans le tableau ci-dessus, nous identifions $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)$ avec le sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R})$ diagonal par blocs

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} : x \in \mathrm{O}(p), y \in \mathrm{O}(q) \right\} ,$$

dont l'intersection avec $\mathrm{SL}_{p+q}(\mathbb{R})$ est notée $S(\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q))$.

Ce corollaire dit que le groupe de Lie matriciel de la colonne de gauche est homéomorphe à l'espace topologique produit indiqué sur la même ligne dans la colonne centrale. Nous définirons ci-dessous la structure de groupe sur l'ensemble $\pi_0 G$ des composantes connexes d'un groupe matriciel G .

Démonstration. Les deux premiers homéomorphismes

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{O}(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{et} \quad \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{U}(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$$

s'obtiennent en composant les homéomorphismes

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{Sym}_n^+ \times \mathrm{O}(n) \quad \text{et} \quad \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{Herm}_n^+ \times \mathrm{U}(n)$$

donnés par le théorème 1.8 et les homéomorphismes

$$\exp^{-1} : \mathrm{Sym}_n^+ \rightarrow \mathrm{Sym}_n \quad \text{et} \quad \exp^{-1} : \mathrm{Herm}_n^+ \rightarrow \mathrm{Herm}_n$$

respectivement donnés par les assertions (2) et (3) de l'exercice E.1, et un calcul de dimension élémentaire.

Nous renvoyons par exemple à [MT, Chap. 3] pour une démonstration que si G vaut $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(p, q)$ ou $\mathrm{SO}(p, q)$ (avec $n = p + q$ dans ces deux derniers cas), alors l'application $(x, y) \mapsto xy$ induit un homéomorphisme

$$(\mathrm{U}(n) \cap G) \times (\mathrm{Herm}_n^+ \cap G) \simeq G$$

(donc $(\mathrm{O}(n) \cap G) \times (\mathrm{Sym}_n^+ \cap G) \simeq G$ lorsque $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$), et que l'application exponentielle induit un homéomorphisme

$$(\mathrm{Herm}_n \cap T_e G) \simeq (\mathrm{Herm}_n^+ \cap G)$$

(donc $(\mathrm{Sym}_n \cap T_e G) \simeq (\mathrm{Sym}_n^+ \cap G)$ lorsque $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$). Un calcul par blocs montre que $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(p+q) \cap \mathrm{O}(p, q)$ si et seulement si $A \in \mathrm{O}(p)$, $B = 0$, $C = 0$ et $D \in \mathrm{O}(q)$.

De même, $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sym}_{p+q} \cap \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : {}^t X I_{p,q} + I_{p,q} X = 0\}$ si et seulement si $A = 0$, $D = 0$ et $C = {}^t B$ (et B est une matrice $p \times q$ quelconque). La colonne centrale du tableau ci-dessus s'en déduit.

Puisqu'une sous-variété est localement connexe par arcs (comme tout ouvert de \mathbb{R}^n), les composantes connexes d'un groupe de Lie matriciel G sont connexes par arc. Donc leur ensemble $\pi_0 G$, muni de la loi de composition qui aux composantes connexes de $x \in G$ et de $y \in G$ associe la composante connexe de xy , est un groupe. Par la décomposition polaire, l'inclusion des groupes $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(p)$, $S(\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(p))$, dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{O}(p, q)$, $\mathrm{SO}(p, q)$ respectivement est un morphisme de groupes qui préserve les composantes connexes. Pour montrer la colonne de droite du tableau ci-dessus, il suffit donc de montrer que $\pi_0 \mathrm{O}(n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\pi_0 \mathrm{SO}(n) = 1$, $\pi_0 \mathrm{U}(n) = 1$, et $\pi_0 \mathrm{SU}(n) = 1$.

Lemma 1.10. *Tout élément de $\mathrm{U}(n)$ est conjugué dans $\mathrm{U}(n)$ à un élément de la forme*

$$D(\theta_1, \dots, \theta_n) = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

où $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$. *Tout élément de $\mathrm{O}(n)$ est conjugué dans $\mathrm{O}(n)$ à un élément de la forme*

$$D'(p, q, \theta_1, \dots, \theta_r) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} \cos \theta_r & -\sin \theta_r \\ \sin \theta_r & \cos \theta_r \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

où $p, q, r \in \mathbb{N}$ vérifient $p + q + 2r = n$ et $\theta_1, \dots, \theta_r \in \mathbb{R}$.

Notons que $D'(p, q, \theta_1, \dots, \theta_r)$ appartient à $\mathrm{SO}(n)$ si et seulement si q est pair. En écrivant $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \pi & -\sin \pi \\ \sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix}$, ceci montre que tout élément de $\mathrm{SO}(n)$ est conjugué

dans $O(n)$ à un élément $D'(p, 0, \theta_1, \dots, \theta_r)$. En particulier, si $n = 3$, ceci montre que tout élément de $SO(3)$ fixe une droite vectorielle et induit sur son plan orthogonal une rotation.

Démonstration. Nous renvoyons par exemple à [MT, §2.6] ou [Pau4, Théo. 2.4 et 3.3]. \square

Ainsi $U(n)$ est connexe (par arcs). En effet, pour tout $x \in U(n)$, il existe par le lemme précédent $P \in U(n)$ et $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = PD(\theta_1, \dots, \theta_n)P^{-1}$. L'application c de $[0, 1]$ dans $U(n)$ définie par $c : t \mapsto PD(t\theta_1, \dots, t\theta_n)P^{-1}$ est alors un chemin continu dans $U(n)$ partant en $t = 0$ de l'élément neutre, et arrivant en x en $t = 1$.

Comme $PD(\theta_1, \dots, \theta_n)P^{-1}$ appartient à $SU(n)$ si et seulement si $\theta_1 + \dots + \theta_n = 0$, et puisqu'alors $t\theta_1 + \dots + t\theta_n = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$, ce chemin c est contenu dans $SU(n)$ si son extrémité $c(1)$ appartient à $SU(n)$. Donc $SU(n)$ est connexe (par arcs).

Comme vu ci-dessus, $D'(p, q, \theta_1, \dots, \theta_r)$ appartient à $SO(n)$ si et seulement si q est pair. En écrivant $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \pi & -\sin \pi \\ \sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix}$, pour tout $x \in SO(n)$, par le lemme ci-dessus, il existe donc $P \in O(n)$ tel que $x = PD'(p, 0, \theta_1, \dots, \theta_r)P^{-1}$. Donc l'application c de $[0, 1]$ dans $SO(n)$ définie par $c : t \mapsto PD'(p, 0, t\theta_1, \dots, t\theta_r)P^{-1}$ est un chemin continu dans $SO(n)$ entre l'élément neutre et x . Donc $SO(n)$ est connexe (par arcs).

Si $x_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$, alors $x_0 \in O(n)$. Comme l'application \det est continue, à valeurs dans $\{\pm 1\}$ sur $O(n)$, et puisque $\det(x_0) = -1$, les composantes connexes de $O(n)$ contenant x_0 et I_n sont distinctes. Donc $\pi_0 O(n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. \square

Un espace topologique X est dit *simplement connexe* s'il est connexe et si toute application continue f du cercle $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ dans X se prolonge continûment²³ en une application continue \tilde{f} du disque fermé $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ dans X .

Par exemple, tout ouvert convexe Ω de \mathbb{R}^N est simplement connexe.²⁴ Le produit de deux espaces topologiques simplement connexes est simplement connexe.²⁵ La propriété « être simplement connexe » est préservée par homéomorphisme. Nous admettrons dans ces notes le résultat suivant, voir par exemple [Pau3].²⁶

Proposition 1.11. *Pour tout $n \geq 2$, la sphère*

$$\mathbb{S}^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

est simplement connexe. \square

Par contre, le cercle \mathbb{S}^1 n'est pas simplement connexe (voir loc. cit.).

Nous admettrons aussi le résultat suivant (voir par exemple [MT, §5.2.1], et la proposition 2.3 si $n = 2$).

23. c'est-à-dire que $\tilde{f} : \mathbb{D} \rightarrow X$ est continue et vérifie $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}^1$

24. En effet, si $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \Omega$ est une application continue, et si $x_0 \in \Omega$, alors l'application \tilde{f} définie par $z \mapsto |z|f(\frac{z}{|z|}) + (1 - |z|)x_0$ si $z \neq 0$ et $\tilde{f}(0) = x_0$ est une application continue de \mathbb{D} dans Ω prolongeant f .

25. En effet, si X_1 et X_2 sont des espaces topologiques simplement connexes et si $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow X_1 \times X_2$ est une application continue, alors $f = (f_1, f_2)$ où $f_i : \mathbb{S}^1 \rightarrow X_i$ est continue pour $i = 1, 2$, donc si $\tilde{f}_i : \mathbb{D} \rightarrow X_i$ est une extension continue de f_i , alors $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ est une extension continue de f .

26. Pour une approche élémentaire, le lecteur pourra démontrer qu'en notant $N = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}^n$, toute application continue $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^n$ peut être déformée continûment en une application continue $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^n - \{N\}$ (c'est-à-dire qu'il existe une application continue $h : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^n$ telle que $h(x, 0) = f(x)$ et $h(x, 1) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}^1$), et utiliser que $\mathbb{S}^n - \{N\}$ est homéomorphe à \mathbb{R}^n (par la projection stéréographique de pôle N , définie par $(x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto (\frac{x_1}{1-x_0}, \dots, \frac{x_n}{1-x_0})$), donc est simplement connexe.

Proposition 1.12. *Pour tout $n \geq 1$, le groupe de Lie $SU(n)$ est simplement connexe. \square*

En particulier, si $n \geq 1$, alors $SL_n(\mathbb{C})$, qui est, par le tableau ci-dessus, homéomorphe au produit $SU(n) \times \mathbb{R}^{n^2-1}$ de deux espaces simplement connexes, est simplement connexe. Mais $U(1) = \mathbb{S}^1$ n'est pas simplement connexe.

1.2 Les algèbres de Lie matricielles

L'espace tangent en l'élément neutre d'un groupe de Lie matriciel possède une structure supplémentaire, que nous allons maintenant étudier dans cette partie.

Notons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.²⁷ Une *algèbre de Lie* sur \mathbb{K} est un espace vectoriel \mathfrak{g} sur \mathbb{K} muni d'une application bilinéaire de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ dans \mathfrak{g} , notée $(x, y) \mapsto [x, y]$, telle que

- $\forall x, y \in \mathfrak{g}, \quad [y, x] = -[x, y],$
- $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}, \quad [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$

L'application $(x, y) \mapsto [x, y]$ s'appelle le *crochet de Lie* de \mathfrak{g} . La première propriété s'appelle l'*anticommutativité* et la seconde l'*identité de Jacobi* du crochet de Lie.

Les algèbres de Lie de dimension infinie peuvent être intéressantes en physique théorique, comme l'algèbre de Virasoro et les algèbres de Kac-Moody affines (en théorie conforme des champs et systèmes intégrables, et en particulier pour les *modèles WZW* de Weiss-Zumino-Witten), voir par exemple [Fuc, Her, Wal]. Mais dans ces notes, nous ne considérerons que des algèbres de Lie de dimension finie.

Soient \mathfrak{g} et \mathfrak{g}' deux algèbres de Lie sur \mathbb{K} . Un *morphisme (d'algèbres de Lie)* de \mathfrak{g} dans \mathfrak{g}' est une application linéaire $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ qui préserve les crochets de Lie, c'est-à-dire telle que

$$\forall x, y \in \mathfrak{g}, \quad \varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)].$$

Remarquons que cette relation n'est pas linéaire en φ . Une remarque utile est la suivante : par la bilinéarité du crochet de Lie, une application linéaire $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ est un morphisme d'algèbres de Lie si et seulement si $\varphi([e_j, e_k]) = [\varphi(e_j), \varphi(e_k)]$ pour tous les éléments e_j, e_k d'une base fixée de \mathfrak{g} .

Un *isomorphisme (d'algèbres de Lie)* est un morphisme d'algèbres de Lie bijectif, son inverse étant alors un morphisme d'algèbres de Lie. Deux algèbres de Lie sont dites *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de l'une sur l'autre. Un *automorphisme (d'algèbres de Lie)* est un isomorphisme d'une algèbre de Lie dans elle-même. Nous noterons $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ le groupe des automorphismes d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} .

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie sur \mathbb{K} . Une *sous-algèbre de Lie* de \mathfrak{g} est un sous-espace vectoriel \mathfrak{h} de \mathfrak{g} qui est stable par le crochet de \mathfrak{g} (c'est-à-dire tel que si $X, Y \in \mathfrak{h}$, alors $[X, Y] \in \mathfrak{h}$). Nous munirons \mathfrak{h} de la restriction du crochet de Lie de \mathfrak{g} , c'est alors une algèbre de Lie.

Nous donnons ci-dessous une longue liste d'exemples d'algèbres de Lie.

Exemples. (1) Pour tout N dans \mathbb{N} , l'espace vectoriel $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, muni du crochet

$$[X, Y] = XY - YX,$$

²⁷. On peut définir une algèbre de Lie sur n'importe quel corps commutatif, mais nous n'aurons besoin que de \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

est une algèbre de Lie sur \mathbb{K} , que nous noterons

$$\mathfrak{gl}_N(\mathbb{K}).$$

L'anticommutativité est immédiate, et l'identité de Jacobi se vérifie aisément (par l'associativité du produit des matrices).

(2) Pour tout espace vectoriel V sur \mathbb{K} , l'espace vectoriel $\text{End}(V)$ des endomorphismes de V , muni du crochet

$$[x, y] = x \circ y - y \circ x,$$

est une algèbre de Lie sur \mathbb{K} , que nous noterons

$$\mathfrak{gl}(V).$$

Si V est de dimension finie N et si \mathcal{B} est une base de V , alors l'application, qui à un endomorphisme de V associe sa matrice dans la base \mathcal{B} , est un isomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ dans $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{K})$.

(3) Le noyau et l'image d'un morphisme d'algèbres de Lie sont des sous-algèbres de Lie. Toute intersection de sous-algèbres de Lie est une sous-algèbre de Lie.

(4) **Algèbre de Lie somme directe.** Si \mathfrak{g} et \mathfrak{g}' sont deux algèbres de Lie sur \mathbb{K} , alors l'espace vectoriel somme directe de \mathfrak{g} et \mathfrak{g}' , muni du crochet terme-à-terme défini par²⁸

$$[x + x', y + y'] = [x, y] + [x', y'],$$

pour tous les $x, y \in \mathfrak{g}$ et $x', y' \in \mathfrak{g}'$, est une algèbre de Lie sur \mathbb{K} , appelée *algèbre de Lie somme directe*, et notée $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$. Les propriétés d'anticommutativité et l'identité de Jacobi se vérifient terme-à-terme. On définit de la même manière une somme directe d'un nombre fini d'algèbres de Lie.

(5) **Restriction de scalaires.** Tout espace vectoriel complexe E peut aussi être considéré comme un espace vectoriel réel, et on le note alors $E^{\mathbb{R}}$ lorsque nous voulons mettre l'accent sur la structure d'espace vectoriel réel. La dimension (réelle) de $E^{\mathbb{R}}$ est égale à deux fois la dimension (complexe) de E : si (e_1, \dots, e_N) est une base de E , alors $(e_1, \dots, e_N, ie_1, \dots, ie_N)$ est une base de $E^{\mathbb{R}}$. Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie complexe, alors $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ (muni du crochet de Lie de \mathfrak{g}) est une algèbre de Lie réelle, par la forme de la propriété d'anticommutativité et celle de l'identité de Jacobi. Par exemple, $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$ est aussi munie d'une structure d'algèbre de Lie réelle, que nous noterons donc $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ lorsque nous voulons insister sur le caractère réel. Dans ces notes, nous considérerons surtout des algèbres de Lie réelles.

(6) **Algèbres de Lie classiques.** Nous donnons ci-dessous la liste des algèbres de Lie classiques que nous étudierons dans ce cours, où $n, p, q \in \mathbb{N} - \{0\}$, en renvoyant par exemple à [Bou1, Bou2, Bou3, Bou4, God, OV, Ser, CSM, Kna, Pau2] pour la liste complète.

Les propriétés²⁹ de la trace, de la transposée et de l'adjoint des matrices montrent que les sous-espaces vectoriels réels suivants sont des sous-algèbres de Lie réelles (pour le crochet

28. Dans cette formule, bien remarquer que les trois crochets sont respectivement les crochets dans $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$, \mathfrak{g} et \mathfrak{g}' .

29. Pour tous les $X, Y \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, nous avons les égalités $\text{tr} XY = \text{tr} YX$ (qui implique l'égalité $\text{tr}[X, Y] = 0$), ${}^t(XY) = {}^tY {}^tX$ (qui implique que ${}^t[X, Y] + [X, Y] = 0$ si X et Y sont antisymétriques, ainsi que ${}^t[X, Y]I_{p,q} + I_{p,q}[X, Y] = 0$ si $I_{p,q}X$ et $I_{p,q}Y$ sont antisymétriques), et $(XY)^* = Y^*X^*$ (qui implique que $[X, Y]^* + [X, Y] = 0$ si X et Y sont antihermitiennes).

des matrices) de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, $\mathfrak{gl}_{p+q}(\mathbb{R})$, $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ et $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ respectivement, et que le sous-espace vectoriel complexe $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre de Lie complexe de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

$$\begin{array}{ll}
 \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) & = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) : \operatorname{tr} X = 0\} \\
 \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) & = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) : \operatorname{tr} X = 0\} \\
 \mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n) & = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) : {}^t X = -X\} \\
 \mathfrak{o}(p, q) = \mathfrak{so}(p, q) & = \{X \in \mathfrak{gl}_{p+q}(\mathbb{R}) : {}^t X I_{p, q} + I_{p, q} X = 0\} \\
 \mathfrak{u}(n) & = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) : X^* = -X\} \\
 \mathfrak{su}(n) & = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) : X^* = -X, \operatorname{tr} X = 0\}
 \end{array} \tag{3}$$

Ainsi $\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n)$ est l'algèbre de Lie réelle des matrices réelles $n \times n$ antisymétriques, $\mathfrak{u}(n)$ est l'algèbre de Lie réelle des matrices complexes $n \times n$ antihermitiennes, et $\mathfrak{o}(p, q) = \mathfrak{so}(p, q)$ est l'algèbre de Lie réelle des matrices X réelles $(p+q) \times (p+q)$ telles que $I_{p, q} X$ soit antisymétrique.

(7) **Extension de scalaires.** Pour tout espace vectoriel réel E , notons $E^{\mathbb{C}}$ le groupe additif $E \oplus iE$, muni de l'unique multiplication externe de $\mathbb{C} \times (E \oplus iE)$ dans $E \oplus iE$ étendant la multiplication externe $\mathbb{R} \times E \rightarrow E$ et telle que la notation $ix \in iE$ pour tout $x \in E$ coïncide avec la multiplication externe de x par i : l'expression de cette multiplication externe est donnée par

$$(z = x + iy, w = u + iv) \mapsto zw = (xu - yv) + i(yu + xv),$$

où $x, y \in \mathbb{R}$ et $u, v \in E$. Il est facile de vérifier que $E^{\mathbb{C}}$ est un espace vectoriel complexe, appelé l'espace vectoriel *complexifié* de E . La dimension (complexe) de $E^{\mathbb{C}}$ est égale à la dimension (réelle) de E , puisque si (e_1, \dots, e_N) est une base (réelle) de E , alors (e_1, \dots, e_N) est aussi une base (complexe) de $E^{\mathbb{C}}$. Si F est un autre espace vectoriel réel, toute application \mathbb{R} -linéaire $f : E \rightarrow F$ s'étend de manière unique en une application \mathbb{C} -linéaire encore notée f de $E^{\mathbb{C}}$ dans $F^{\mathbb{C}}$ en posant, pour tout $x + iy \in E \oplus iE = E^{\mathbb{C}}$

$$f(x + iy) = f(x) + if(y) \in F \oplus iF = F^{\mathbb{C}}.$$

Notons que $(E \times F)^{\mathbb{C}}$ s'identifie canoniquement à $E^{\mathbb{C}} \times F^{\mathbb{C}}$.

Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie réelle, nous munirons l'espace vectoriel complexe $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ de l'unique crochet de Lie étendant celui de \mathfrak{g} : pour tous les $X, X', Y, Y' \in \mathfrak{g}$,

$$[X + iY, X' + iY'] = ([X, X'] - [Y, Y']) + i([Y, X'] + [X, Y']). \tag{4}$$

Cette algèbre de Lie complexe est appelée l'*algèbre de Lie complexifiée* de \mathfrak{g} . Pour toute algèbre de Lie réelle \mathfrak{h} , notons que $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{h})^{\mathbb{C}}$ s'identifie canoniquement à $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \times \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$.

Par exemple

$$\mathfrak{gl}_N(\mathbb{R})^{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}_N(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{sl}_N(\mathbb{R})^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}_N(\mathbb{C}).$$

Nous appellerons *forme réelle* d'une algèbre de Lie complexe \mathfrak{g} toute algèbre de Lie réelle \mathfrak{a} telle que $\mathfrak{a}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}$. Par exemple, $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{R})$ est une forme réelle de $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$, et $\mathfrak{sl}_N(\mathbb{R})$ est une forme réelle de $\mathfrak{sl}_N(\mathbb{C})$, mais il y en a d'autres si $N \geq 2$, nous y reviendrons ultérieurement. En particulier, nous montrerons dans la partie 2.1 que $\mathfrak{su}(n)$ est une forme réelle de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Par conséquent, $\mathfrak{su}(n) \oplus \mathfrak{su}(m)$ est une forme réelle de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_m(\mathbb{C})$, pour tous les $n, m \in \mathbb{N}$.

Algèbre de Lie d'un groupe de Lie matriciel

Remarquons en regardant le tableau (2) qu'en tant qu'espaces vectoriels, les algèbres de Lie du tableau (3) sont exactement les espaces tangents en l'élément neutre des groupes de Lie classiques du tableau (1). Ceci est un fait général.

Proposition 1.13. *Soit G un groupe de Lie matriciel dans $GL_N(\mathbb{K})$.*

(1) *L'application exponentielle des matrices envoie $T_e G$ dans G , et induit un C^∞ -difféomorphisme d'un voisinage ouvert de 0 dans $T_e G$ à valeurs dans un voisinage ouvert de e dans G .*

(2) *L'espace vectoriel $T_e G$, muni de l'application $(X, Y) \mapsto [X, Y] = XY - YX$, est une sous-algèbre de Lie réelle de $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{K})$.*

(3) *Si G' est un groupe de Lie matriciel dans $GL_{N'}(\mathbb{K})$ et si $f : G \rightarrow G'$ est un morphisme de groupes de Lie, alors $T_e f : T_e G \rightarrow T_e G'$ est un morphisme d'algèbres de Lie pour les crochets des matrices, et pour tout $X \in T_e G$, nous avons*

$$f(\exp X) = \exp(T_e f(X)) . \quad (5)$$

L'algèbre de Lie définie par l'assertion (2) de cette proposition est appelée l'*algèbre de Lie du groupe de Lie matriciel G* , et est notée \mathfrak{g} ou $Lie(G)$. Nous noterons encore $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ la restriction de \exp à $T_e G$ (ou \exp_G lorsqu'il est utile de préciser G). Les physiciens appellent les éléments de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G les *générateurs infinitésimaux* du groupe de Lie G .

Démonstration. (1) En utilisant les paramétrages locaux, on voit que toute courbe intégrale d'un champ de vecteurs tangents à une sous-variété aux points de cette sous-variété est entièrement tracée sur cette sous-variété. Pour tous les $X \in T_e G$ et $g \in G$, comme l'application de $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ définie par $x \mapsto gx$ est linéaire et préserve G , le vecteur gX est tangent en g à G . Donc la solution (maximale) de l'équation différentielle $\dot{c}(t) = c(t)X$ de condition initiale $c(0) = e$ est une courbe tracée sur G . Or cette équation différentielle est linéaire du premier ordre, et sa solution (maximale) est $c : t \mapsto \exp(tX)$ (définie sur \mathbb{R}). Ceci montre que $\exp(T_e G)$ est contenu dans G . Nous avons déjà vu que \exp est un C^∞ -difféomorphisme d'un voisinage ouvert de 0 dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ à valeurs dans un voisinage ouvert de la matrice identité I_N dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, ce qui montre la dernière affirmation de (1) par intersection avec la sous-variété différentiable G .

(2) Pour tous les $X, Y \in T_e G$ et $t, u \in \mathbb{R}$, posons $c(t, u) = \exp(tX) \exp(uY) \exp(-tX)$. Par développement de l'exponentielle, nous avons

$$c(t, u) = e + uY + tu(XY - YX) + t^2 a(t, u) + u^2 b(t, u)$$

avec $a(t, u)$ et $b(t, u)$ de classe C^∞ en (t, u) . Par l'assertion (1) et puisque G est un groupe, nous avons $c(t, u) \in G$ et $c(t, 0) = e$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc $\frac{\partial}{\partial u}|_{u=0} c(t, u) \in T_e G$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et puisque $T_e G$ est un sous-espace vectoriel,

$$XY - YX = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} \frac{\partial}{\partial u}|_{u=0} c(t, u) \in T_e G .$$

(3) Pour tout g dans G , notons $\iota_g : G \rightarrow G$ l'application $h \mapsto ghg^{-1}$. Puisque ι_g est la restriction à G d'une application linéaire, elle est de classe C^∞ et son application tangente

en e est égale à la restriction de $\text{Ad } g : \mathcal{M}_N(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ à $T_e G$, que nous noterons encore $\text{Ad } g$:

$$\begin{aligned} T_e \iota_g = \text{Ad } g : T_e G &\rightarrow T_e G \\ v &\mapsto g v g^{-1} \end{aligned}$$

Puisque f est un morphisme de groupes, nous avons $f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g^{-1})$ pour tout $h \in H$, donc $f \circ \iota_g = \iota_{f(g)} \circ f$. En dérivant en e , par le théorème de dérivation des fonctions composées (et puisque $\iota_g(e) = e$ et $f(e) = e$), nous avons

$$T_e f \circ (\text{Ad } g) = (\text{Ad } f(g)) \circ T_e f$$

pour tout g dans G . Puisque $T_e f$ est linéaire, en dérivant en $g = e$, par la proposition 1.1 et le théorème de dérivation des fonctions composées, nous avons pour tout $X \in T_e G$

$$T_e f \circ (\text{ad } X) = (\text{ad} \circ T_e f(X)) \circ T_e f .$$

D'où, pour tous les X et Y dans $T_e G$, nous avons

$$T_e f([X, Y]) = [T_e f(X), T_e f(Y)] ,$$

ce qui montre que $T_e f$ est un morphisme d'algèbres de Lie.

Enfin, pour tout $X \in T_e G$, puisque f est un morphisme de groupes \mathbb{C}^∞ , l'application $t \mapsto f(\exp(tX))$ est un sous-groupe à un paramètre de G' , dont la dérivée en $t = 0$ est, par le théorème de dérivation des fonctions composées et la proposition 1.2 (5), égale à $T_e f(X)$. Par la proposition 1.2 (6), nous avons donc

$$f(\exp(tX)) = \exp(t T_e f(X))$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'où le résultat final de la proposition 1.13 en prenant $t = 1$. \square

Notons que l'exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ n'est pas forcément surjective,³⁰ et n'est pas forcément injective.³¹ Nous admettrons³² le résultat suivant, donné pour la culture, voir aussi le lemme 1.23 qui permet de contourner le défaut éventuel de surjectivité.

Proposition 1.14. *Si G est un groupe de Lie compact connexe, alors l'application exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ est surjective.* \square

Constantes de structure des algèbres de Lie

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie sur \mathbb{K} de dimension finie, et soit (e_1, \dots, e_N) une base (vectorielle) de \mathfrak{g} . Tout élément de \mathfrak{g} s'écrivant comme combinaison linéaire des éléments de cette base, il existe donc des scalaires $(c_{j,k}^\ell)_{1 \leq j,k,\ell \leq N}$ dans \mathbb{K} tels que (toujours en utilisant la convention de sommation d'Einstein)

$$\forall j, k \in \{1, \dots, N\}, \quad [e_j, e_k] = c_{j,k}^\ell e_\ell . \quad (6)$$

30. Si $G = \text{SL}_2(\mathbb{R})$, si $X \in \mathfrak{g} = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \text{tr } X = 0\}$, alors par l'équation de Cayley-Hamilton $X^2 - (\text{tr } X)X + (\det X)I_2 = 0$, nous avons $X^{n+2} = (-\det X)X^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc par récurrence, $\text{tr } X^{2n+1} = 0$ et $\text{tr } X^{2n} = 2(-\det X)^n$, donc $\text{tr}(\exp X) = 2 \cosh(-\det X)^{1/2}$, qui est de module au plus 2 si $\det X > 0$, et qui est supérieure ou égale à -2 sinon, de sorte que la matrice $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$, de trace -3 , n'est pas dans l'image de $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$. Voir plus précisément le lemme 3.13.

31. Si $G = \text{U}(1)$, alors $\exp : i\mathbb{R} \rightarrow \text{U}(1)$ est l'application $i\theta \mapsto e^{i\theta}$, qui n'est pas injective.

32. Voir par exemple [Die2, Hel, Pau2].

Ces relations s'appellent les *relations de commutation* de \mathfrak{g} (relatif au choix de base), et les scalaires $(c_{j,k}^\ell)_{1 \leq j,k,\ell \leq N}$ s'appellent les *constantes de structure* de \mathfrak{g} (relatives au choix de base). Ces constantes de structure déterminent l'algèbre de Lie \mathfrak{g} , puisqu'elles permettent de reconstruire tous les crochets de Lie de couples de vecteurs de \mathfrak{g} par bilinéarité.

Les constantes de structure vérifient les relations suivantes (correspondant à la propriété d'anticommutativité et à l'identité de Jacobi du crochet de Lie) : pour tous les $j, k, \ell, i_1, i_2, i_3 \in \{1, \dots, N\}$,

$$c_{j,k}^\ell = -c_{k,j}^\ell \quad (7)$$

et

$$c_{i_1, i_2}^\ell c_{\ell, i_3}^k + c_{i_2, i_3}^\ell c_{\ell, i_1}^k + c_{i_3, i_1}^\ell c_{\ell, i_2}^k = 0. \quad (8)$$

Réciproquement, pour tout espace vectoriel V sur \mathbb{K} muni d'une base (e_1, \dots, e_N) , toute famille $(c_{j,k}^\ell)_{1 \leq j,k,\ell \leq N}$ dans \mathbb{K} vérifiant les propriétés (7) et (8) définit un crochet de Lie sur V , en demandant qu'il vérifie les équations (6) ci-dessus sur les éléments de la base, et qu'il soit bilinéaire.

Deux algèbres de Lie de dimension finie sont isomorphes si et seulement si elles admettent des bases vectorielles ayant même cardinal et mêmes constantes de structure.

Mais on fera bien attention au fait que ces constantes de structure dépendent du choix d'une base (même si l'existence d'une base "canonique" permet de parler de constantes de structure "canoniques").

Exemple. L'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{so}(3)$ est la sous-algèbre de Lie de dimension 3 de $\mathfrak{gl}_3(\mathbb{R})$ formée des matrices réelles antisymétriques 3×3 . Elle admet donc pour base, dite *base canonique* de $\mathfrak{so}(3)$,

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Un calcul élémentaire montre que les relations de commutation sont

$$\forall j, k \in \{1, 2, 3\}, \quad [\eta_j, \eta_k] = \epsilon_{jk}^\ell \eta_\ell \quad (10)$$

où la constante de structure ϵ_{jk}^ℓ vaut 0 si (au moins) deux des entiers j, k, ℓ sont égaux, et vaut sinon la signature³³ de la permutation (jkl) . Notons que si $j \neq k$, alors un seul terme est non nul dans la somme sur ℓ (par la convention d'Einstein) du second membre, celui pour lequel $\ell \in \{1, 2, 3\} - \{j, k\}$.

Les physiciens (voir par exemple [BT, Zub2, Zub1]) préfèrent considérer les "générateurs infinitésimaux"

$$\tilde{J}_1 = i \eta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{J}_2 = i \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{J}_3 = i \eta_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

vérifiant les "relations de commutation"

$$\forall j, k, \ell \in \{1, 2, 3\}, \quad [\tilde{J}_j, \tilde{J}_k] = i \epsilon_{jk}^\ell \tilde{J}_\ell$$

33. La signature des permutations cycliques (123) (231) et (312) vaut +1, celle des transpositions (132) (321) et (213) vaut -1.

(dont les “constantes de structure” $i\epsilon_{jk}^\ell$ ne sont plus réelles!). Un point important pour les physiciens est que les matrices $\tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \tilde{J}_3$ sont hermitiennes, alors que η_1, η_2, η_3 sont anti-hermitiennes. Les physiciens notent parfois ces matrices J_1, J_2, J_3 au lieu de $\tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \tilde{J}_3$, car ils considèrent que ce sont des représentations d’opérateurs aussi notés J_1, J_2, J_3 . Nous reviendrons sur ce point et sur l’intérêt des matrices $\tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \tilde{J}_3$ dans la partie 2.

Exercice E.2. *Montrer que l’espace vectoriel euclidien orienté réel \mathbb{R}^3 , muni du produit vectoriel \wedge , est une algèbre de Lie. Calculer les constantes de structure de la base canonique de \mathbb{R}^3 . En déduire que les algèbres de Lie (\mathbb{R}^3, \wedge) et $\mathfrak{so}(3)$ sont isomorphes.*

Décomposition des algèbres de Lie

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie sur \mathbb{K} .

Un idéal de \mathfrak{g} est un sous-espace vectoriel I de \mathfrak{g} tel que pour tous les $x \in I$ et $y \in \mathfrak{g}$, nous ayons $[x, y] \in I$. Les sous-espaces $\{0\}$ et \mathfrak{g} sont des idéaux de \mathfrak{g} , dits *triviaux*. Un idéal est en particulier une sous-algèbre de Lie, mais la réciproque est en général fautive. Toute intersection et toute somme vectorielle d’idéaux de \mathfrak{g} est un idéal de \mathfrak{g} . Le noyau $\text{Ker } f$ d’un morphisme $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ d’algèbres de Lie est un idéal.³⁴

Deux éléments X, Y de \mathfrak{g} *commutent* si leur crochet de Lie $[X, Y]$ est nul. Une algèbre de Lie est dite *abélienne* si son crochet de Lie est l’application bilinéaire nulle, donc si deux éléments quelconques commutent.

Cette notion n’est pas très intéressante de manière intrinsèque, mais la restriction du crochet de Lie à certains sous-espaces vectoriels intéressants d’algèbres de Lie intéressantes peut être nul, donnant ainsi des exemples de (sous)-algèbres de Lie abéliennes intéressantes. Nous y reviendrons par exemple dans le cas de la sous-algèbre de Lie \mathbb{R}^4 de l’algèbre de Lie $\mathfrak{so}(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^4$ du groupe de Poincaré (voir la partie 3.4), ou de la sous-algèbre de Lie des matrices diagonales de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ (voir la partie 4.1).

Une algèbre de Lie est dite *simple* si elle n’a pas d’idéal non trivial, et si elle est non abélienne. (Cette dernière condition peut être remplacée par « et si sa dimension est au moins 2 ».) Une algèbre de Lie est dite *semi-simple* si elle est somme directe d’idéaux simples.

Il se trouve que les algèbres de Lie classiques que nous étudierons dans ce cours, donnés par le tableau (3) avec $n \geq 2$, $p \geq 1$ et $q \geq 2$, sont simples. Une étude analogue à celle effectuée dans les chapitres 2, 3 et 4, en particulier concernant la classification des représentations linéaires de dimension finie, est en fait possible pour toutes les algèbres de Lie simples, voire semi-simples. Nous renvoyons pour cela par exemple à [Bou4, Kna].

1.3 Représentations linéaires complexes de dimension finie d’algèbres de Lie

Ce qui intéresse les physiciens, c’est moins la structure abstraite des groupes de symétries que les transformations induites sur les grandeurs physiques, un même groupe pouvant être groupe de symétries de plusieurs systèmes physiques. Nous ne nous intéresserons dans ce cours qu’aux situations où ces transformations agissent de manière linéaire sur les quantités physiques en question. Lorsque celles-ci ont un nombre fini de composantes réelles

34. En effet, si $x \in \text{Ker } f$ et $y \in \mathfrak{g}$, alors $f([x, y]) = [f(x), f(y)] = [0, f(y)] = 0$ donc $[x, y] \in \text{Ker } f$.

ou complexes, les transformations agissent par des matrices, ce qui est la raison principale pour laquelle nous nous concentrons sur les groupes matriciels.

Nous allons commencer dans cette partie 1.3 par étudier l'action des générateurs infinitésimaux, et nous passerons aux groupes de transformations eux-mêmes dans la partie 1.4.

Notons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Nous fixons dans cette partie une algèbre de Lie \mathfrak{g} sur \mathbb{K} de dimension finie.

Une *représentation* (d'algèbre de Lie) de \mathfrak{g} est un morphisme $R : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ d'algèbres de Lie sur \mathbb{K} , où V est un espace vectoriel complexe de dimension finie.³⁵ La dimension de V est appelée la *dimension* de la représentation. La représentation est notée (V, R) lorsqu'il est utile de préciser V . Nous dirons aussi que R est une représentation de \mathfrak{g} dans V .

Convention : Lorsque la représentation R est clairement sous-entendue, pour tous les $X \in \mathfrak{g}$ et $v \in V$, les physiciens notent souvent Xv au lieu de $R(X)(v)$. (*)

Deux représentations (V, R) et (V', R') de \mathfrak{g} sont *conjuguées* (on dit aussi *équivalentes*) s'il existe un isomorphisme \mathbb{C} -linéaire $T : V \rightarrow V'$ tel que

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \quad R'(X) = T \circ R(X) \circ T^{-1} .$$

Un tel opérateur T (pas forcément unique) est appelé un *opérateur d'entrelacement* entre R et R' . En particulier, deux représentations conjuguées ont même dimension, mais la réciproque n'est pas forcément vraie.

Le résultat suivant est très pratique (voir le premier exemple ci-dessous) pour construire des représentations d'algèbres de Lie.

Proposition 1.15. Soient (e_1, \dots, e_N) une base de \mathfrak{g} et $(c_{j,k}^\ell)_{1 \leq j,k,\ell \leq N}$ les constantes de structure de \mathfrak{g} (relatives à cette base). Soient V un espace vectoriel complexe de dimension finie et X_1, \dots, X_N des applications linéaires de V dans V telles que

$$\forall j, k \in \{1, \dots, N\}, \quad [X_j, X_k] = c_{j,k}^\ell X_\ell .$$

Alors il existe une et une seule représentation R de \mathfrak{g} dans V telle que $R(e_j) = X_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$.

Démonstration. Puisque (e_1, \dots, e_N) est une base de \mathfrak{g} , il existe une et une seule application linéaire R de \mathfrak{g} dans $\mathfrak{gl}(V)$ telle que $R(e_j) = X_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$. Cette application linéaire est un morphisme d'algèbres de Lie, car par la bilinéarité du crochet de Lie, pour montrer que R est un morphisme, il suffit de montrer que $R([e_j, e_k]) = [R(e_j), R(e_k)]$ pour tous les $j, k \in \{1, \dots, N\}$. Or ces égalités découlent de la construction.³⁶ \square

35. On définit de même une représentation à valeurs dans un espace vectoriel sur \mathbb{K} et pas seulement sur \mathbb{C} , ou dans un espace vectoriel de dimension infinie, mais nous nous restreindrons au cas où V est complexe et de dimension finie dans ces notes.

36. Pour tous les $j, k \in \{1, \dots, N\}$, nous avons

$$R([e_j, e_k]) = R(c_{j,k}^\ell e_\ell) = c_{j,k}^\ell R(e_\ell) = c_{j,k}^\ell X_\ell = [X_j, X_k] = [R(e_j), R(e_k)] .$$

Un sous-espace vectoriel complexe E de V est dit *invariant* (ou *stable*) par une représentation R de \mathfrak{g} dans V (ou par l'algèbre de Lie \mathfrak{g} si la représentation (V, R) est sous-entendue) s'il est stable par $R(\mathfrak{g})$, c'est-à-dire si pour tous les $X \in \mathfrak{g}$ et $v \in E$, l'image $R(X)v$ de v par l'application linéaire $R(X)$ appartient à E . Nous noterons alors $(E, R|_E)$ la représentation d'algèbre de Lie de \mathfrak{g} dans E définie par

$$R|_E : X \mapsto R(X)|_E ,$$

et nous l'appellerons la représentation *restreinte* à E de la représentation R .

Une représentation (V, R) de \mathfrak{g} est dite *irréductible* si les seuls sous-espaces vectoriels complexes de V invariants par R sont les *sous-espaces triviaux* $\{0\}$ et V .

Si $(V_1, R_1), \dots, (V_k, R_k)$ sont des représentations de \mathfrak{g} , la *représentation somme directe* de ces représentations est la représentation notée $R_1 \oplus \dots \oplus R_k$, dans l'espace vectoriel somme directe $V_1 \oplus \dots \oplus V_k$, construite terme à terme, c'est-à-dire vérifiant, pour tous les $X \in \mathfrak{g}$, $v_1 \in V_1, \dots, v_k \in V_k$,

$$R_1 \oplus \dots \oplus R_k(X)(v_1 + \dots + v_k) = R_1(X)v_1 + \dots + R_k(X)v_k .$$

Nous considérerons parfois la *représentation produit direct* notée $R_1 \times \dots \times R_k$, dans l'espace vectoriel produit $V_1 \times \dots \times V_k$, construite terme à terme, c'est-à-dire vérifiant, pour tous les $X \in \mathfrak{g}$, $v_1 \in V_1, \dots, v_k \in V_k$,

$$R_1 \times \dots \times R_k(X)(v_1, \dots, v_k) = (R_1(X)v_1, \dots, R_k(X)v_k) .$$

Elle est canoniquement conjuguée à la représentation somme disjointe $R_1 \oplus \dots \oplus R_k$, par l'isomorphisme canonique $(v_1, \dots, v_k) \mapsto v_1 + \dots + v_k$ entre produit direct $V_1 \times \dots \times V_k$ et somme directe $V_1 \oplus \dots \oplus V_k$.

Une représentation (V, R) de \mathfrak{g} est dite *complètement réductible* si elle est somme directe de représentations irréductibles de \mathfrak{g} .

Les propriétés d'être irréductible ou complètement réductible sont préservées par équivalence de représentations : si (V', R') est une représentation de \mathfrak{g} conjuguée à (V, R) , alors (V', R') est irréductible (respectivement complètement réductible) si et seulement si (V, R) l'est. Nous donnerons ultérieurement des résultats de classification, à conjugaison près, des représentations irréductibles de certaines algèbres de Lie.

Nous donnons maintenant quelques exemples de représentations d'algèbre de Lie. Nous identifions ci-dessous $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathfrak{gl}(\mathbb{K}^n)$ en prenant les matrices des applications linéaires dans la base canonique de \mathbb{K}^n . Nous rappelons que $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ est contenu dans $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

Exemples. (1) Deux exemples de représentations de $\mathfrak{so}(3)$.

Puisque $\mathfrak{so}(3)$ est une sous-algèbre de Lie réelle de $\mathfrak{gl}_3(\mathbb{R})$ qui est contenue dans $\mathfrak{gl}_3(\mathbb{C})$ qui s'identifie à $\mathfrak{gl}(\mathbb{C}^3)$, l'application évidente³⁷ de $\mathfrak{so}(3)$ dans $\mathfrak{gl}(\mathbb{C}^3)$ est une représentation, dite *fondamentale* (voir ci-dessous), de dimension 3.

Considérons les *matrices de Pauli*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

37. qui à $X \in \mathfrak{so}(3)$ associe l'endomorphisme de \mathbb{C}^3 de matrice X dans la base canonique de \mathbb{C}^3

qui sont des éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Un petit calcul montre que les matrices

$$\xi_1 = i\frac{\sigma_1}{2}, \quad \xi_2 = -i\frac{\sigma_2}{2} \quad \text{et} \quad \xi_3 = i\frac{\sigma_3}{2}$$

vérifient les mêmes relations de commutation

$$\forall j, k \in \{1, 2, 3\}, \quad [\xi_j, \xi_k] = \epsilon_{jk}^\ell \xi_\ell \quad (11)$$

que les éléments de la base canonique (η_1, η_2, η_3) de $\mathfrak{so}(3)$ (voir la formule centrée (10)). Par la proposition 1.15, il existe donc une et une seule représentation $R : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^2)$ de $\mathfrak{so}(3)$ telle que $R(\eta_k) = \xi_k$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$. Cette représentation est donc de dimension 2, et en particulier distincte de, et même non conjuguée à, la représentation fondamentale de $\mathfrak{so}(3)$, qui est de dimension 3.

(2) Représentation adjointe d'une algèbre de Lie.

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie sur \mathbb{K} de dimension finie. L'application $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ définie par

$$X \mapsto \{ \text{ad } X : Y \mapsto [X, Y] \}$$

est une représentation d'algèbre de Lie³⁸ de \mathfrak{g} , appelée la *représentation adjointe* de \mathfrak{g} . En effet, pour tous les $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, nous avons

$$\text{ad}[X, Y](Z) = \text{ad } X \circ \text{ad } Y(Z) - \text{ad } Y \circ \text{ad } X(Z) = [\text{ad } X, \text{ad } Y](Z) :$$

la première égalité est une simple réécriture³⁹ de l'identité de Jacobi dans \mathfrak{g} , et la seconde est obtenue par la définition du crochet de Lie de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Par exemple, si \mathfrak{g} est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{K})$ (en particulier, si \mathfrak{g} est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie matriciel G contenu dans $\text{GL}_N(\mathbb{K})$, voir la proposition 1.13), alors

- l'inclusion de \mathfrak{g} dans $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$ (identifié à $\mathfrak{gl}(\mathbb{C}^N)$) est une représentation, souvent appelée en physique la représentation *fondamentale* de \mathfrak{g} ,
- la représentation adjointe ad de \mathfrak{g} est la restriction⁴⁰ au sous-espace vectoriel réel \mathfrak{g} de $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ de la représentation adjointe ad de $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ définie après les exemples initiaux de la partie 1.1.

Le noyau de la représentation adjointe de \mathfrak{g} , qui est un idéal de \mathfrak{g} comme vu ci-dessus, est appelé le *centre* de \mathfrak{g} , car c'est le sous-espace vectoriel de \mathfrak{g} formé des éléments de \mathfrak{g} qui commutent avec tous les éléments de \mathfrak{g} , et il est noté

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{ X \in \mathfrak{g} : \forall Y \in \mathfrak{g}, [X, Y] = 0 \} .$$

En particulier, toute algèbre de Lie \mathfrak{g} sans centre⁴¹ se plonge dans $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ (la représentation adjointe $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ étant alors un *plongement* (d'algèbres de Lie), c'est-à-dire un

38. Dans la définition de représentation d'algèbre de Lie, nous avons demandé que l'espace vectoriel dans lequel agit la représentation soit un espace vectoriel complexe. Ici, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, nous considérerons $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ comme contenu dans $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$, car toute application \mathbb{R} -linéaire de \mathfrak{g} dans \mathfrak{g} s'étend de manière unique en une application \mathbb{C} -linéaire de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. En particulier, ad est considérée lorsque nécessaire comme une application de \mathfrak{g} dans $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$.

39. $[[X, Y], Z] = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]]$

40. au sens que pour tout $X \in \mathfrak{g}$, l'endomorphisme $\text{ad } X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ est la restriction au sous-espace invariant \mathfrak{g} de $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ de l'application $\text{ad } X : \mathcal{M}_N(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ qui a été définie juste avant la proposition 1.1.

41. c'est-à-dire dont le centre est réduit à $\{0\}$

morphisme (d'algèbres de Lie) injectif). Par exemple, puisque toute matrice $N \times N$ qui commute avec toute matrice diagonale et avec toute matrice de permutation est un multiple scalaire de la matrice identité I_N , nous avons

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_N(\mathbb{K})) = \mathbb{K} I_N .$$

(3) Extension de scalaires.

Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie réelle, $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ l'algèbre de Lie complexifiée de \mathfrak{g} , et (V, R) une représentation de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Pour tous les $X, Y \in \mathfrak{g}$, notons $R^{\mathbb{C}}(X + iY)$ l'endomorphisme de l'espace vectoriel complexe V défini par

$$R^{\mathbb{C}}(X + iY) : v \mapsto R(X)v + iR(Y)v . \quad (12)$$

Par la définition⁴² du crochet de Lie de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ et puisque R préserve le crochet de Lie de \mathfrak{g} , un petit calcul⁴³ montre que

$$R^{\mathbb{C}}([X + iY, X' + iY']) = [R^{\mathbb{C}}(X + iY), R^{\mathbb{C}}(X' + iY')]$$

pour tous les $X, Y, X', Y' \in \mathfrak{g}$, c'est-à-dire que l'application $R^{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, définie par $X + iY \mapsto R^{\mathbb{C}}(X + iY)$ pour tous les $X, Y \in \mathfrak{g}$, est une représentation d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ dans V , appelée *complexifiée* de R .

Proposition 1.16. *L'application $R \mapsto R^{\mathbb{C}}$ est une correspondance bijective entre les représentations de \mathfrak{g} et celles de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, ainsi qu'entre les représentations irréductibles de \mathfrak{g} et celles de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, ainsi qu'entre les représentations complètement réductibles de \mathfrak{g} et celles de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Deux représentations de \mathfrak{g} sont conjuguées si et seulement si leurs représentations complexifiées de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ le sont.*

Démonstration. Si R' est une représentation de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, alors la restriction $R'_{|\mathfrak{g}}$ de R' au sous-espace vectoriel réel $\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \oplus \{0\}$ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$ est une représentation de l'algèbre de Lie réelle \mathfrak{g} , et les correspondances $R \mapsto R^{\mathbb{C}}$ et $R' \mapsto R'_{|\mathfrak{g}}$ sont inverses l'une de l'autre⁴⁴. Pour toute représentation (V, R) de l'algèbre de Lie réelle \mathfrak{g} , un sous-espace vectoriel complexe E de V est invariant par R si et seulement s'il est invariant par $R^{\mathbb{C}}$.⁴⁵ Enfin, $T : V \rightarrow V'$ est un opérateur d'entrelacement entre deux représentations (V, R) et (V', R') de \mathfrak{g} si et seulement si T est un opérateur d'entrelacement entre $R^{\mathbb{C}}$ et $R'^{\mathbb{C}}$.⁴⁶ \square

42. Voir la formule centrée (4).

43. Pour tous les $X, Y, X', Y' \in \mathfrak{g}$ et $v \in V$, nous avons

$$\begin{aligned} R^{\mathbb{C}}([X + iY, X' + iY'])v &= R^{\mathbb{C}}([X, X'] - [Y, Y'] + i([Y, X'] + [X, Y']))v \\ &= R([X, X'] - [Y, Y'])v + iR([Y, X'] + [X, Y'])v \\ &= ([R(X), R(X')] - [R(Y), R(Y')])v + i([R(Y), R(X')] + [R(X), R(Y')])v \\ &= [R(X) + iR(Y), R(X') + iR(Y')]v = [R^{\mathbb{C}}(X + iY), R^{\mathbb{C}}(X' + iY')]v . \end{aligned}$$

44. comme on le montre en utilisant simplement la formule centrée (12) définissant la représentation complexifiée $R^{\mathbb{C}}$ de R

45. Voir la note de bas de page précédente.

46. Voir la note de bas de page précédente.

Ainsi, il existe une correspondance bijective entre les classes d'équivalence de représentations irréductibles de \mathfrak{g} et celles de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Par exemple, puisque $\mathfrak{su}(2)$ est une forme réelle de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ comme nous le montrerons dans la partie 2.1, il revient au même de classer à équivalence près les représentations irréductibles de $\mathfrak{su}(2)$ et celles de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, ce que nous ferons dans la partie 2.3.

(4) Représentation complexe conjuguée d'une représentation d'algèbre de Lie

Si (V, R) est une représentation d'une algèbre de Lie réelle \mathfrak{g} et si \mathcal{B} est une base de V sur \mathbb{C} , notons (V, \overline{R}) la *représentation complexe conjuguée* de (V, R) associée à la base \mathcal{B} , définie par $\overline{R} : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{gl}(V)$ et

$$\overline{R}(X) = \overline{R(X)},$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$, où $\overline{R(X)}$ est l'endomorphisme linéaire de V dont la matrice dans la base \mathcal{B} est la matrice complexe conjuguée de la matrice de $R(X)$ dans cette même base. Il est facile de vérifier que \overline{R} est bien un morphisme d'algèbres de Lie réelles. On prendra bien garde que la représentation \overline{R} de \mathfrak{g} dans V ainsi définie dépend du choix de la base \mathcal{B} , et si $V = \mathbb{C}^N$, nous utiliserons sauf mention explicite du contraire la base canonique de \mathbb{C}^N .

Comme le montre la première assertion du résultat élémentaire suivant, cette dépendance disparaît quand on travaille à équivalence de représentations près.

Proposition 1.17. (1) Si \mathcal{B}' est une autre base de V et si \overline{R}' est la représentation complexe conjuguée de R associée à la base \mathcal{B}' , alors les représentations d'algèbre de Lie \overline{R} et \overline{R}' de \mathfrak{g} dans V sont équivalentes. De plus, $\overline{R} = \overline{R}'$ si la matrice de changement de base entre \mathcal{B} et \mathcal{B}' est réelle.

(2) Une représentation d'algèbre de Lie (V, R) est irréductible si et seulement si (V, \overline{R}) l'est.

(3) Si (V, R) et (V', R') sont deux représentations d'algèbre de Lie de \mathfrak{g} équivalentes, alors (V, \overline{R}) et (V', \overline{R}') le sont aussi.

Démonstration. (1) Soit A la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' , et soient w et $w' = Aw$ les vecteurs colonnes des coordonnées de $w \in V$ dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' respectivement. Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, si B et $B' = ABA^{-1}$ sont les matrices de $R(X)$ dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' respectivement, alors les vecteurs colonnes des coordonnées de $\overline{R}(X)w$ et $\overline{R}'(X)w'$ tous deux dans la base \mathcal{B} sont respectivement $\overline{B}w$ et

$$A^{-1}\overline{B}'w' = A^{-1}\overline{A}\overline{B}\overline{A}^{-1}Aw.$$

La matrice de $\overline{R}'(X)$ dans la base \mathcal{B} est donc la conjuguée par $A^{-1}\overline{A}$ de la matrice de $\overline{R}(X)$ dans la base \mathcal{B} . Ainsi, les représentations d'algèbre de Lie \overline{R} et \overline{R}' sont équivalentes, par l'opérateur d'entrelacement de matrice $A^{-1}\overline{A}$ dans la base \mathcal{B} .

La dernière affirmation de (1) en découle.

(2) Soit W un sous-espace vectoriel complexe de V . Par (1), nous pouvons supposer que la base \mathcal{B} est obtenue en prenant une base de W et en la complétant, de sorte qu'un vecteur de colonne des coordonnées C dans \mathcal{B} appartient à W si et seulement si le vecteur de colonne des coordonnées \overline{C} dans \mathcal{B} appartient à W . Donc W est invariant par $\overline{R}(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$ si et seulement s'il est invariant par $R(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

(3) Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, si B et B' sont les matrices de $R(X)$ et $R'(X)$ dans des bases \mathcal{B} de V et \mathcal{B}' de V' , si A est la matrice, dans ces bases \mathcal{B} de V et \mathcal{B}' de V' , d'un

opérateur d'entrelacement entre R et R' , alors \overline{A} est la matrice, dans ces bases \mathcal{B} de V et \mathcal{B}' de V' , d'un opérateur d'entrelacement entre \overline{R} et \overline{R}' : comme $B' = ABA^{-1}$, nous avons $\overline{B}' = \overline{A}\overline{B}\overline{A}^{-1}$. \square

(5) Représentation contragrédiente d'une représentation d'algèbre de Lie

Si E est un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension finie, nous noterons $E^* = \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ l'espace vectoriel dual de E , et nous appellerons *application d'évaluation*⁴⁷ l'application de $E^* \times E$ dans \mathbb{K} qui à une forme linéaire ℓ sur E et à un vecteur $v \in E$ associe le scalaire $\ell(v)$.

Si (V, R) est une représentation d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} , nous appellerons *représentation contragrédiente* (ou aussi représentation duale) de (V, R) la représentation (V^*, R^\sim) définie en posant, pour tous les $X \in \mathfrak{g}$ et $\ell \in V^*$,

$$R^\sim(X)(\ell) = -\ell \circ R(X) . \quad (13)$$

Il est facile de vérifier que $R^\sim : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V^*)$ est un morphisme d'algèbres de Lie.⁴⁸ La représentation contragrédiente de la représentation adjointe d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} s'appelle la *représentation coadjointe* de \mathfrak{g} , et elle est notée $\text{ad}^\sim : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^*)$.

Si (e_1, \dots, e_n) est une base de V , si (e_1^*, \dots, e_n^*) est la base duale de V^* (telle que $e_j^*(e_k) = \delta_{j,k}$ où $\delta_{j,k}$ est le symbole de Kronecker, égal à 1 si $j = k$ et à 0 sinon), en identifiant les applications linéaires avec leur matrice dans ces bases, nous avons, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, l'égalité des matrices dans $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ suivantes

$$R^\sim(X) = -{}^t(R(X)) , \quad (14)$$

c'est-à-dire les relations entre coefficients $R^\sim(X)_k^j = -R(X)_j^k$ pour $1 \leq j, k \leq n$.

Proposition 1.18. (1) Une représentation (V, R) d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} est irréductible si et seulement si sa représentation contragrédiente (V^*, R^\sim) l'est.

(2) Deux représentations d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} sont conjuguées si et seulement si leurs représentations contragrédientes le sont.

Démonstration. (1) Par la formule (13), si un sous-espace vectoriel E de V est invariant par $R(\mathfrak{g})$, alors son *annulateur*

$$E^\perp = \{\ell \in V^* : \forall v \in E, \ell(v) = 0\}$$

47. ou parfois *accouplement de dualité*; les physiciens notent parfois $\langle \ell, v \rangle$ au lieu de $\ell(v)$ l'évaluation de la forme linéaire ℓ sur le vecteur v

48. En effet, pour tous les $X, Y \in \mathfrak{g}$, $\ell \in V^*$, nous avons

$$\begin{aligned} R^\sim([X, Y])(\ell) &= -\ell \circ R([X, Y]) = -\ell \circ R(X) \circ R(Y) + \ell \circ R(Y) \circ R(X) \\ &= R^\sim(Y)(\ell \circ R(X)) - R^\sim(X)(\ell \circ R(Y)) \\ &= R^\sim(Y)(-R^\sim(X)(\ell)) - R^\sim(X)(-R^\sim(Y)(\ell)) = [R^\sim(X), R^\sim(Y)](\ell) . \end{aligned}$$

est invariant par $R^\sim(\mathfrak{g})$. Réciproquement, toujours par la formule (13), et puisque

$$E = \{x \in V : \forall \ell \in E^\perp, \ell(x) = 0\}, \quad 49$$

si E^\perp est invariant par $R^\sim(\mathfrak{g})$, alors E est invariant par $R(\mathfrak{g})$. Nous avons par dualité $E = \{0\}$ si et seulement si $E^\perp = V^*$, et $E^\perp = \{0\}$ si et seulement si $E = V$. Le résultat en découle.

(2) Si $T : V \rightarrow V'$ est un opérateur d'entrelacement entre deux représentations (V, R) et (V', R') , alors son application duale ${}^tT : (V')^* \rightarrow V^*$, définie par $\ell' \mapsto \ell' \circ T$, est un opérateur d'entrelacement entre $((V')^*, (R')^\sim)$ et (V^*, R^\sim) .⁵⁰ \square

(6) Produit tensoriel de représentations d'algèbre de Lie

Soient E et F deux espaces vectoriels sur \mathbb{K} de dimension finie. Notons $E \otimes F$ l'espace vectoriel des applications bilinéaires de $E^* \times F^*$ dans \mathbb{K} , appelé le *produit tensoriel* des espaces vectoriels E et F . Pour tous les $x \in E$ et $y \in F$, notons $x \otimes y$ l'élément de $E \otimes F$ défini par

$$x \otimes y : (\xi, \eta) \mapsto \xi(x) \eta(y),$$

appelé un *tenseur pur* de $E \otimes F$.

Si $u \in \text{End}(E)$ et $v \in \text{End}(F)$, notons $u \boxtimes v \in \text{End}(E \otimes F)$ l'endomorphisme⁵¹ défini par

$$u \boxtimes v : \phi \mapsto \{(\xi, \eta) \mapsto \phi(\xi \circ u, \eta \circ v)\}.$$

en remarquant que la précomposition par u (respectivement v) d'une forme linéaire sur E (respectivement F) est encore une forme linéaire sur E (respectivement F).

Il n'est pas important de retenir la définition précise de $E \otimes F$ (par ailleurs incorrecte en dimension infinie), mais il est important de se souvenir des points suivants.

- Le produit tensoriel $E \otimes F$ contient les éléments particuliers $x \otimes y$ pour $x \in E$ et $y \in F$, qui sont bilinéaires en (x, y) .⁵²
- Si (e_1, \dots, e_N) et (f_1, \dots, f_M) sont des bases de E et F respectivement, alors la suite finie $(e_j \otimes f_k)_{1 \leq j \leq N, 1 \leq k \leq M}$ est une base de $E \otimes F$. En particulier

$$\dim(E \otimes F) = (\dim E)(\dim F) :$$

49. Cette formule se démontre par exemple en remarquant que si (e_1, \dots, e_n) est une base de V telle que (e_1, \dots, e_k) où $k \leq n$ est une base de E , si (e_1^*, \dots, e_n^*) est la base de V^* duale de (e_1, \dots, e_n) (telle que $e_j^*(e_k) = \delta_{j,k}$ où $\delta_{j,k}$ est le symbole de Kronecker, égal à 1 si $j = k$ et à 0 sinon), alors $(e_{k+1}^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^\perp .

50. En effet, pour tous les $X \in \mathfrak{g}$ et $\ell' \in (V')^*$, nous avons

$$(R')^\sim \circ {}^tT(\ell') = (R')^\sim(\ell' \circ T) = -\ell' \circ T \circ R'(X) = -\ell' \circ R(X) \circ T = (R^\sim(X)(\ell')) \circ T = {}^tT \circ R^\sim(X)(\ell').$$

51. On ne confondra pas cet endomorphisme $u \boxtimes v \in \text{End}(E \otimes F)$ avec le tenseur pur $u \otimes v \in \text{End}(E) \otimes \text{End}(F)$.

52. Pour tous les $x, x' \in E, y, y' \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, nous avons

$$(\lambda x + x') \otimes (\mu y + y') = \lambda \mu x \otimes y + \lambda x \otimes y' + \mu x' \otimes y + x' \otimes y'.$$

la dimension d'un produit tensoriel est le produit (et non pas la somme comme dans le cas d'un produit direct) des dimensions.

- Tout élément de $E \otimes F$ n'est pas forcément un tenseur pur $x \otimes y$, mais est une somme (finie) de tenseurs purs.

En particulier, par linéarité, pour montrer que deux applications linéaires de $E \otimes F$ dans un espace vectoriel sur \mathbb{K} sont égales, il suffit de montrer qu'elles donnent les mêmes valeurs aux tenseurs purs. Nous utiliserons plusieurs fois dans la suite de ces notes cette remarque sans la mentionner.

- Si $u \in \text{End}(E)$ et $v \in \text{End}(F)$, alors $u \boxtimes v$ est l'unique endomorphisme de $E \otimes F$ tel que pour tous les $x \in E$ et $y \in F$,

$$u \boxtimes v (x \otimes y) = u(x) \otimes v(y) .$$

Maintenant, si (V, R) et (V', R') sont deux représentations de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} , alors l'application $R \otimes R'$ de \mathfrak{g} dans $\mathfrak{gl}(V \otimes V')$ telle que pour tout $X \in \mathfrak{g}$, l'application $R \otimes R' (X)$ soit l'unique application linéaire de $V \otimes V'$ dans $V \otimes V'$ telle que

$$R \otimes R' (X)(v \otimes v') = (R(X)(v)) \otimes v' + v \otimes (R'(X)(v')) \quad (15)$$

pour tous les $v \in V$ et $v' \in V'$, est une représentation d'algèbre de Lie de \mathfrak{g} , comme un calcul élémentaire le montre,⁵³ appelée la *représentation produit tensoriel* de (V, R) et (V', R') .

Remarque. (1) Si (V, R) et (V', R') sont conjuguées à $(\widetilde{V}, \widetilde{R})$ et $(\widetilde{V}', \widetilde{R}')$ par les opérateurs d'entrelacements $T : V \rightarrow \widetilde{V}$ et $T' : V' \rightarrow \widetilde{V}'$ respectivement, alors $R \otimes R'$ est conjuguée à $\widetilde{R} \otimes \widetilde{R}'$ par l'unique application linéaire $T \boxtimes T'$ telle que $T \boxtimes T'(v \otimes v') = T(v) \otimes T'(v')$ pour tous les $v \in V$ et $v' \in V'$, comme un petit calcul élémentaire le montre.⁵⁴

(2) Le produit tensoriel et l'extension de scalaires des représentations d'algèbres de Lie réelles commutent : si (V, R) et (V', R') sont deux représentations d'une algèbre de Lie réelle \mathfrak{g} , alors

$$(R \otimes R')^{\mathbb{C}} = R^{\mathbb{C}} \otimes R'^{\mathbb{C}} . \quad (16)$$

53. En utilisant la convention de notation (*) du début de la partie 1.3, pour tous les $X, Y \in \mathfrak{g}$, $v \in V$ et $v' \in V'$, nous avons

$$\begin{aligned} & X(Y(v \otimes v')) - Y(X(v \otimes v')) = X(Yv \otimes v' + v \otimes Yv') - Y(Xv \otimes v' + v \otimes Xv') \\ & = (XYv \otimes v' + Yv \otimes Xv' + Xv \otimes Yv' + v \otimes XYv') - (YXv \otimes v' + Xv \otimes Yv' + Yv \otimes Xv' + v \otimes YXv') \\ & = (XYv - YXv) \otimes v' + v \otimes (XYv' - YXv') = ([X, Y]v) \otimes v' + v \otimes ([X, Y]v') = [X, Y](v \otimes v') . \end{aligned}$$

54. L'application $T \boxtimes T'$ est inversible, d'inverse $T^{-1} \boxtimes T'^{-1}$. Pour tous les $X \in \mathfrak{g}$, $v \in V$ et $v' \in V'$, nous avons

$$\begin{aligned} & (R \otimes R')(X) \circ (T \boxtimes T')(v \otimes v') = (R \otimes R')(X)(T(v) \otimes T'(v')) \\ & = (R(X) \circ T(v)) \otimes T'(v') + T(v) \otimes (R'(X) \circ T'(v')) = (T \circ \widetilde{R}(X)(v)) \otimes T'(v') + T(v) \otimes (T' \circ \widetilde{R}'(X)(v')) \\ & = (T \boxtimes T')((\widetilde{R}(X)(v)) \otimes v' + v \otimes (\widetilde{R}'(X)(v'))) = (T \boxtimes T') \circ (\widetilde{R} \otimes \widetilde{R}')(X)(v \otimes v') . \end{aligned}$$

En effet, pour tous les $X, Y \in \mathfrak{g}$, $v \in V$ et $v' \in V'$, nous avons, par les définitions des représentations complexifiées et produits tensoriels,

$$\begin{aligned}
& (R \otimes R')^{\mathbb{C}}(X + iY)(v \otimes v') \\
&= (R \otimes R')(X)(v \otimes v') + i (R \otimes R')(Y)(v \otimes v') \\
&= R(X)(v) \otimes v' + v \otimes R'(X)(v') + i R(Y)(v) \otimes v' + i v \otimes R'(Y)(v') \\
&= (R^{\mathbb{C}}(X + iY)(v)) \otimes v' + v \otimes (R'^{\mathbb{C}}(X + iY)(v')) \\
&= (R^{\mathbb{C}} \otimes R'^{\mathbb{C}})(X + iY)(v \otimes v') .
\end{aligned}$$

(3) Le produit tensoriel et la conjugaison complexe des représentations d'algèbres de Lie réelles commutent : si (V, R) et (V', R') sont deux représentations d'une algèbre de Lie réelle \mathfrak{g} , de représentations complexes conjuguées (V, \overline{R}) et (V', \overline{R}') dans des bases $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leq j \leq m}$ et $\mathcal{B}' = (f_k)_{1 \leq k \leq n}$ respectivement, alors la représentation complexe conjuguée de $R \otimes R'$ dans la base des tenseurs purs $(e_j \otimes f_k)_{1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n}$ vérifie

$$\overline{R \otimes R'} = \overline{R} \otimes \overline{R}' . \quad (17)$$

Forme de Killing

Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie sur \mathbb{K} de dimension finie, la *forme de Killing* de \mathfrak{g} est l'application $B = B_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$B(x, y) = \text{tr}(\text{ad } x \circ \text{ad } y) .$$

Par les propriétés⁵⁵ de la trace des endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie, et par la linéarité de la représentation adjointe, la forme de Killing est bilinéaire et symétrique.⁵⁶ Elle est invariante par tout automorphisme d'algèbres de Lie : si $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie sur \mathbb{K} , alors, pour tous les x et y dans \mathfrak{g} , nous avons

$$B_{\mathfrak{g}'}(f(x), f(y)) = B_{\mathfrak{g}}(x, y) ,$$

car l'égalité $[f(x), f(y)] = f([x, y])$ implique que $\text{ad}(f(x)) = f \circ (\text{ad } x) \circ f^{-1}$, et le résultat découle des propriétés de la trace.

Elle est de plus *ad-alternée* : pour tous les $x, y, z \in \mathfrak{g}$, nous avons

$$B(\text{ad } x(y), z) = -B(y, \text{ad } x(z)) .$$

En effet, en appliquant deux fois l'identité de Jacobi, nous avons

$$\begin{aligned}
B([x, y], z) &= \text{tr}((\text{ad } x \circ \text{ad } y - \text{ad } y \circ \text{ad } x) \circ \text{ad } z) \\
&= \text{tr}(\text{ad } y \circ \text{ad } z \circ \text{ad } x) - \text{tr}(\text{ad } y \circ \text{ad } x \circ \text{ad } z) = B(y, [z, x]) = -B(y, [x, z]) .
\end{aligned}$$

Par exemple, la forme de Killing de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{K})$ est

$$\forall X, Y \in \mathfrak{gl}_N(\mathbb{K}), \quad B(X, Y) = 2N \text{tr}(XY) - 2 \text{tr } X \text{tr } Y . \quad (18)$$

55. Pour tout espace vectoriel V sur \mathbb{K} de dimension finie, l'application $\text{tr} : \text{End}(V) \rightarrow \mathbb{K}$, qui à un endomorphisme x de V associe la trace de la matrice de x dans n'importe quelle base de V , est linéaire et $\text{tr}(x \circ y) = \text{tr}(y \circ x)$ pour tous les $x, y \in \text{End}(V)$.

56. Ceci signifie que pour tous les $x, y \in \mathfrak{g}$, nous avons $B(x, y) = B(y, x)$.

En effet, soit $(E_i^j)_{1 \leq i, j \leq N}$ la base canonique de $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ (voir le début de la partie 1.1). Pour tout $X = (a_{ij}^k)_{1 \leq i, j \leq N} \in \mathfrak{gl}_N(\mathbb{K})$, nous avons

$$\text{ad } X(E_i^j) = a_i^k E_k^j - a_k^j E_i^k .$$

Un calcul peu agréable de trace dans la base $(E_i^j)_{1 \leq i, j \leq N}$ montre alors le résultat.

1.4 Représentations linéaires complexes de dimension finie de groupes de Lie

Nous fixons dans cette partie un groupe de Lie matriciel G , d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Rappelons que pour tout espace vectoriel complexe V de dimension finie, $\text{GL}(V)$ est un groupe de Lie matriciel, d'algèbre de Lie (réelle) $\mathfrak{gl}(V)^\mathbb{R}$.

Une *représentation* (de groupe de Lie) de G est un morphisme de groupes de Lie

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(V) ,$$

où V est un espace vectoriel complexe de dimension finie. La dimension de V est appelée la *dimension* de la représentation ρ . La représentation est notée (V, ρ) lorsqu'il est utile de préciser V . Nous dirons aussi que ρ est une représentation de G dans V .

Convention : Lorsque la représentation ρ est clairement sous-entendue, pour tous les $g \in G$ et $v \in V$, les physiciens notent souvent gv au lieu de $\rho(g)(v)$. (**)

Par exemple, si G est un sous-groupe de Lie matriciel de $\text{GL}_N(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , alors l'application de G dans $\text{GL}(\mathbb{C}^N)$ obtenue en composant l'inclusion de G dans $\text{GL}_N(\mathbb{K})$, l'inclusion de $\text{GL}_N(\mathbb{K})$ dans $\text{GL}_N(\mathbb{C})$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et l'isomorphisme canonique $\text{GL}_N(\mathbb{C}) \simeq \text{GL}(\mathbb{C}^N)$, est une représentation de G , dite *fondamentale*.

Soient (V, ρ) et (V', ρ') deux représentations de G . Une application linéaire $T : V \rightarrow V'$ telle que pour tous les $g \in G$,

$$\rho'(g) \circ T = T \circ \rho(g)$$

est appelée un *opérateur d'entrelacement* de (V, ρ) et (V', ρ') . La condition ci-dessus s'exprime aussi en demandant que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\rho(g)} & V \\ T \downarrow & & \downarrow T \\ V' & \xrightarrow{\rho'(g)} & V' \end{array}$$

soit commutatif pour tout $g \in G$. Les représentations (V, ρ) et (V', ρ') sont dites *équivalentes* (ou aussi *conjuguées*) s'il existe un opérateur d'entrelacement T bijectif (aussi appelé une *conjugaison*) de (V, ρ) et (V', ρ') : pour tout $g \in G$, nous avons

$$\rho'(g) = T \circ \rho(g) \circ T^{-1} .$$

En particulier, les dimensions de V et V' sont alors égales, et les matrices de $\rho'(g)$ et $\rho(g)$ (pour des choix de bases indifférents de V et V') sont alors conjuguées.

La physique quantique, par le fait que les fonctions d'ondes sont en général des éléments d'un espace de Hilbert complexe, fait jouer un rôle prépondérant aux représentations unitaires, que nous définissons maintenant. Si \mathcal{H} est un espace de Hilbert complexe, nous noterons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire hermitien⁵⁷ (ou $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ lorsqu'il est utile de préciser \mathcal{H}), et $U(\mathcal{H})$ le *groupe unitaire* de \mathcal{H} , c'est-à-dire le groupe des bijections linéaires de \mathcal{H} dans \mathcal{H} qui préservent le produit scalaire hermitien de \mathcal{H} (ou, de manière équivalente, qui préservent la norme hilbertienne de \mathcal{H}). Une *représentation unitaire* de G est un morphisme de groupes $\rho : G \rightarrow U(\mathcal{H})$, où \mathcal{H} est un espace de Hilbert complexe, tel que pour tous les $x, y \in \mathcal{H}$, l'application de G dans \mathbb{C} définie par $g \mapsto \langle gx, y \rangle$, appelée un *coefficient matriciel* de ρ , soit continue. Si \mathcal{H} est de dimension finie, alors $U(\mathcal{H})$ est un sous-groupe de Lie matriciel de $GL(\mathcal{H})$, et cette condition de continuité est (en prenant les coefficients matriciels des couples d'éléments dans une base de \mathcal{H}) équivalente à demander que l'application $\rho : G \rightarrow U(\mathcal{H})$ soit continue.⁵⁸ La représentation unitaire est notée (\mathcal{H}, ρ) lorsque qu'il est utile de préciser \mathcal{H} . Nous dirons aussi que ρ est une représentation unitaire de G dans \mathcal{H} . Nous renvoyons à la partie II du livre [BdlHV] pour des informations de bases sur les représentations unitaires.

Lorsque G est un groupe de Lie matriciel compact, toute représentation est unitarisable, au sens suivant. Donc en ce qui concerne les groupes compacts, comme $SO(3)$ ou $SU(2)$, la condition que la représentation soit unitaire n'est pas très restrictive.

Proposition 1.19. *Pour tout groupe de Lie matriciel G , si G est compact,⁵⁹ alors pour toute représentation (V, ρ) de G , il existe un produit scalaire hermitien sur V , de sorte que (V, ρ) soit une représentation unitaire.*

Démonstration. Nous renvoyons par exemple à [KS, Theo. 4.1]. □

Nous donnons maintenant quelques exemples de constructions de représentations de groupes de Lie.

Exemples. (1) Représentation restreinte d'une représentation de groupe de Lie

Soit (V, ρ) une représentation de G . Un sous-espace vectoriel complexe E de V est dit *invariant* (ou *stable*) par la représentation ρ (ou par le groupe de Lie matriciel G si la représentation ρ est sous-entendue) s'il est stable par $\rho(G)$, c'est-à-dire si pour tous les $g \in G$ et $v \in E$, nous avons $\rho(g)v \in E$. Nous noterons alors $(E, \rho|_E)$ la représentation de groupe de Lie de G définie par

$$\rho|_E : g \mapsto \rho(g)|_E,$$

et nous l'appellerons la représentation *restreinte* à E de la représentation ρ .

Une représentation (V, ρ) de G est dite *irréductible* si les seuls sous-espaces vectoriels complexes de V invariants par ρ sont les sous-espaces vectoriels triviaux $\{0\}$ et V . Notons que si (V, ρ) et (V', ρ') sont deux représentations équivalentes du groupe de Lie matriciel G , alors l'une est irréductible si et seulement si l'autre l'est.

(2) Représentation Adjointe d'un groupe de Lie

57. avec la convention linéaire à droite, anti-linéaire à gauche

58. Par la proposition 1.7, ceci équivaut à demander que $\rho : G \rightarrow U(\mathcal{H})$ soit un morphisme de groupes de Lie.

59. L'hypothèse que G est compact est nécessaire. Par exemple, nous laissons en exercice la vérification que $G = GL_2(\mathbb{C})$ ne préserve pas de produit scalaire hermitien dans \mathbb{C}^2 .

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et soit $N \in \mathbb{N} - \{0\}$ tels que G soit contenu dans $\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$, de sorte que \mathfrak{g} est contenue dans $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{K})$. Pour tous les $X \in \mathfrak{g}$ et $g \in G$, le produit matriciel gXg^{-1} appartient à \mathfrak{g} . En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons $\exp(tX) \in G$ par la proposition 1.13 (1). Donc $g \exp(tX)g^{-1} \in G$ puisque G est un groupe. Par conséquent, l'élément gXg^{-1} , qui est égal à $\frac{d}{dt}|_{t=0}(g \exp(tX)g^{-1})$ par la proposition 1.2 (5) et la linéarité des multiplications à droite et à gauche par une matrice, appartient à \mathfrak{g} , car la courbe lisse $t \mapsto g \exp(tX)g^{-1}$ passe par l'élément neutre e de G en $t = 0$ et \mathfrak{g} , en tant qu'espace vectoriel réel, est l'espace tangent à G en e . Pour tout $g \in G$, l'application $X \mapsto gXg^{-1}$ de \mathfrak{g} dans \mathfrak{g} est linéaire et bijective, d'inverse $X \mapsto g^{-1}Xg$.

Nous pouvons donc définir une application $\mathrm{Ad} : G \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ par

$$g \mapsto \{X \mapsto gXg^{-1}\}.$$

Cette application Ad est une représentation⁶⁰ de groupe de Lie de G , appelée la *représentation Adjointe* de G . En effet, Ad est clairement un morphisme de groupes, et c'est une application C^∞ de la sous-variété G à valeurs dans l'ouvert $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, comme restriction à G de l'application de l'ouvert $\mathrm{GL}_N(\mathbb{K})$ à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}_N(\mathbb{K})) \simeq \mathbb{K}^{N^4}$ définie par $g \mapsto ((gE_i^j g^{-1})_k^\ell)_{1 \leq i, j, k, \ell \leq N}$, chaque coefficient de l'image de g étant une fraction rationnelle de dénominateur ne s'annulant pas en les coefficients de g .

(3) Représentation somme directe de représentations de groupe de Lie

Si $(V_1, \rho_1), \dots, (V_k, \rho_k)$ sont des représentations de G , la *représentation somme directe* de ces représentations est la représentation de G notée $\rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_k$, dans l'espace vectoriel somme directe $V_1 \oplus \dots \oplus V_k$, construite terme à terme, c'est-à-dire vérifiant, pour tous les $g \in G$, $v_1 \in V_1, \dots, v_k \in V_k$,

$$\rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_k(g)(v_1 + \dots + v_k) = \rho_1(g)v_1 + \dots + \rho_k(g)v_k.$$

Une représentation (V, ρ) est dite *complètement réductible* si elle est somme directe de représentations irréductibles de G . Notons que si (V, ρ) et (V', ρ') sont deux représentations équivalentes du groupe de Lie matriciel G , alors l'une est complètement réductible si et seulement si l'autre l'est.

Proposition 1.20. *Toute représentation unitaire de dimension finie d'un groupe de Lie matriciel est complètement réductible. En particulier, toute représentation d'un groupe de Lie matriciel compact est complètement réductible.*

Démonstration. Montrons que si (\mathcal{H}, ρ) est une représentation unitaire de G , où \mathcal{H} est de dimension finie, si E est un sous-espace vectoriel complexe de \mathcal{H} invariant par ρ , alors l'orthogonal E^\perp de E dans \mathcal{H} est aussi invariant par ρ et qu'en notant $\rho|_E : G \rightarrow \mathrm{GL}(E)$ et $\rho|_{E^\perp} : G \rightarrow \mathrm{GL}(E^\perp)$ les représentations restreintes de ρ à E et à E^\perp respectivement,

60. Dans la définition de représentation de groupe de Lie, nous avons demandé que l'espace vectoriel dans lequel agit la représentation soit un espace vectoriel complexe. Or \mathfrak{g} est a priori un espace vectoriel réel. Le problème se contourne alors en remplaçant \mathfrak{g} par \mathfrak{g}' où \mathfrak{g}' est une sous-algèbre de Lie complexe de $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$ telle que $(\mathfrak{g}')^{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}$, ou en remplaçant encore \mathfrak{g} par son espace vectoriel complexifié $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. En effet, dans le premier cas, les applications de \mathfrak{g}' dans \mathfrak{g}' de la forme $X \mapsto gXg^{-1}$ sont \mathbb{C} -linéaires, et dans le second cas, toute bijection \mathbb{R} -linéaire de \mathfrak{g} dans elle-même s'étend de manière unique à une bijection \mathbb{C} -linéaire de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ dans elle-même.

alors les représentations ρ et $\rho|_E \oplus \rho|_{E^\perp}$ dans $V = E \oplus E^\perp$ sont égales. Par récurrence sur la dimension, la première assertion de la proposition 1.20 en découle.

Pour tous les $g \in G$, $x \in E$ et $y \in E^\perp$, nous avons, puisque $\rho(g)$ préserve le produit scalaire de \mathcal{H} , et puisque $\rho(g^{-1})x$ appartient encore à E ,

$$\langle \rho(g)y, x \rangle = \langle \rho(g)y, \rho(g)\rho(g)^{-1}x \rangle = \langle y, \rho(g^{-1})x \rangle = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, le vecteur $\rho(g)y$ appartient à E^\perp . Donc E^\perp est invariant par ρ .

Si $v = x + y$ est la décomposition de $v \in \mathcal{H}$ dans la somme directe $\mathcal{H} = E \oplus E^\perp$, alors

$$\rho(g)v = \rho(g)x + \rho(g)y = \rho|_E(g)x + \rho|_{E^\perp}(g)y,$$

ce qui montre l'affirmation cherchée.

La dernière assertion de la proposition 1.20 découle de la première et de la proposition 1.19. \square

(4) Représentation complexe conjuguée d'une représentation de groupe de Lie

Si (V, ρ) est une représentation de G et si \mathcal{B} est une base de V sur \mathbb{C} , notons $(V, \bar{\rho})$ la *représentation complexe conjuguée* de ρ associée à la base \mathcal{B} , définie par $\bar{\rho} : G \rightarrow \text{GL}(V)$ et, pour tout $g \in G$,

$$\bar{\rho}(g) = \overline{\rho(g)}$$

où $\overline{\rho(g)}$ est l'endomorphisme linéaire (qui est bijectif) de V dont la matrice dans la base \mathcal{B} est la matrice complexe conjuguée de la matrice de $\rho(g)$ dans cette même base. Il est facile de vérifier que $\bar{\rho}$ est bien un morphisme de groupes de Lie. On prendra bien garde que la représentation $\bar{\rho}$ de G dans V ainsi définie dépend du choix de la base \mathcal{B} , et si $V = \mathbb{C}^N$, nous utiliserons sauf mention explicite du contraire la base canonique de \mathbb{C}^N .

On montre comme pour les représentations d'algèbre de Lie (voir la proposition 1.17 (1)) que si \mathcal{B}' est une autre base de V et si $\bar{\rho}'$ est la représentation complexe conjuguée de ρ associée à \mathcal{B}' , alors les représentations de groupe de Lie $\bar{\rho}$ et $\bar{\rho}'$ sont équivalentes, et même égales si la matrice de changement de base est réelle.

Remarquons que $\bar{\rho}(g)(\bar{v}) = \overline{\rho(g)(v)}$ pour tous les $g \in G$ et $v \in V$, où \bar{v} est l'élément de V dont les coordonnées dans la base \mathcal{B} sont les conjugués complexes des coordonnées de v dans cette même base. Soit E un sous-espace vectoriel complexe de V , notons $\bar{E} = \{\bar{v} : v \in E\}$, qui est aussi un sous-espace vectoriel complexe de V , de même dimension que E . Alors E est invariant par ρ si et seulement si \bar{E} est invariant par $\bar{\rho}$. Donc $\bar{\rho}$ est irréductible (respectivement complètement réductible) si et seulement si ρ l'est.

Il est élémentaire de vérifier que si ρ et ρ' sont deux représentations de groupe de Lie de G équivalentes, alors $\bar{\rho}$ et $\bar{\rho}'$ sont aussi équivalentes.

(5) Représentation contragrédiente d'une représentation de groupe de Lie

Rappelons (voir la partie 1.3) que l'espace vectoriel dual V^* d'un espace vectoriel complexe V est l'espace vectoriel complexe $\mathcal{L}(V; \mathbb{C})$ des formes linéaires (complexes) sur V .

Si (V, ρ) est une représentation de G , nous appellerons *représentation contragrédiente* de (V, ρ) la représentation (V^*, ρ^\sim) définie en posant, pour tous les $g \in G$ et $\ell \in V^*$,

$$\rho^\sim(g)(\ell) = \ell \circ \rho(g^{-1}). \quad (19)$$

Il est facile de vérifier que $\rho^\sim : G \rightarrow \text{GL}(V^*)$ est un morphisme de groupes de Lie.⁶¹

La représentation contragrédiente de la représentation Adjointe de G s'appelle la *représentation coAdjointe* de G , et elle est notée $\text{Ad}^\sim : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}^*)$.⁶²

Si (e_1, \dots, e_n) est une base de V , si (e_1^*, \dots, e_n^*) est la base duale de V^* (telle que $e_k^*(e_j) = \delta_{j,k}$ où $\delta_{j,k}$ est le symbole de Kronecker, égal à 1 si $j = k$ et à 0 sinon), en identifiant les applications linéaires avec leur matrice dans ces bases, nous avons, pour tout $g \in G$, l'égalité des matrices dans $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ suivantes

$$\rho^\sim(g) = {}^t(\rho(g^{-1})), \quad (20)$$

c'est-à-dire l'égalité des coefficients

$$\begin{aligned} \rho^\sim(g)_{k,j}^j &= (\rho^\sim(g)_{k,\ell}^\ell e_\ell^*)(e_j) = (\rho^\sim(g)(e_k^*))(e_j) = e_k^*(\rho(g^{-1})(e_j)) \\ &= e_k^*(\rho(g^{-1})_{j,\ell}^\ell e_\ell) = \rho(g^{-1})_{j,k}^k \end{aligned}$$

pour $1 \leq j, k \leq n$.⁶³ Nous regroupons dans l'énoncé suivant quelques propriétés des représentations contragrédientes.

Proposition 1.21. (1) Une représentation (V, ρ) d'un groupe de Lie matriciel G est irréductible si et seulement si sa représentation contragrédiente (V^*, ρ^\sim) l'est.

(2) Si (V, ρ) et (V', ρ') sont des représentations d'un groupe de Lie matriciel G , alors (V, ρ) et (V', ρ') sont équivalentes si et seulement si leurs représentations contragrédientes (V^*, ρ^\sim) et (V'^*, ρ'^\sim) le sont.

Démonstration. (1) La démonstration est analogue à celle de la proposition 1.18.

(2) Il suffit de montrer l'implication directe, car $(V^{**}, (\rho^\sim)^\sim) = (V, \rho)$. Si $T : V \rightarrow V'$ est un opérateur d'entrelacement entre ρ et ρ' , alors l'application $T^\sim : V^* \rightarrow V'^*$ définie par $\ell \mapsto \ell \circ T^{-1}$ est un opérateur d'entrelacement entre ρ^\sim et ρ'^\sim . En effet, pour tous les $g \in G$ et $\ell \in V^*$, nous avons

$$\begin{aligned} T^\sim \circ \rho^\sim(g) (\ell) &= T^\sim(\ell \circ \rho(g)^{-1}) = \ell \circ \rho(g)^{-1} \circ T^{-1} = \ell \circ T^{-1} \circ \rho'(g)^{-1} \\ &= \rho'^\sim(g)(\ell \circ T^{-1}) = \rho'^\sim(g) \circ T^\sim (\ell). \quad \square \end{aligned}$$

61. Le fait que nous voulons $\rho^\sim(gh) = \rho^\sim(g) \circ \rho^\sim(h)$ pour tout $g, h \in G$ explique la présence de l'inverse de g dans cette formule. En effet, pour tous les $g, h \in G$ et $\ell \in V^*$, nous avons

$$\rho^\sim(gh)(\ell) = \ell \circ \rho((gh)^{-1}) = \ell \circ \rho(h^{-1}) \circ \rho(g^{-1}) = \rho^\sim(g)(\ell \circ \rho(h^{-1})) = \rho^\sim(g)(\rho^\sim(h)(\ell)).$$

62. Rappelons que \mathfrak{g} est a priori un espace vectoriel réel, alors que dans la définition de représentation de groupe de Lie, nous avons demandé que l'espace vectoriel dans lequel agit la représentation soit un espace vectoriel complexe. Le problème se contourne alors de nouveau en remplaçant \mathfrak{g}^* par son espace vectoriel complexifié $(\mathfrak{g}^*)^\mathbb{C}$. Remarquons que la définition de représentation contragrédiente fait sens lorsque V est un espace vectoriel réel. Il n'y a alors pas de problème de compatibilité en complexifiant, car les espaces vectoriels complexes $(\mathfrak{g}^*)^\mathbb{C}$ et $(\mathfrak{g}^\mathbb{C})^*$ sont canoniquement isomorphes par l'application $\Theta : (\mathfrak{g}^*)^\mathbb{C} \rightarrow (\mathfrak{g}^\mathbb{C})^*$ suivante. Pour tous les $\ell, \ell' \in \mathfrak{g}^*$ et $x, y \in \mathfrak{g}$, considérons

$$\Theta : \ell + i\ell' \mapsto \{(x + iy) \mapsto (\ell(x) - \ell'(y)) + i(\ell(y) + \ell'(x))\}.$$

On vérifie que cette application est bien définie et qu'elle est un isomorphisme linéaire sur \mathbb{C} .

63. On prendra bien garde à ne pas confondre la matrice de la représentation contragrédiente de ρ évaluée en g , qui est $\rho^\sim(g) = {}^t(\rho(g^{-1}))$, et la matrice adjointe de la matrice de la représentation ρ évaluée en g , qui est $(\rho(g))^* = {}^t(\rho(g))$.

(6) Produit tensoriel de représentations de groupe de Lie

La *représentation produit tensoriel* de deux représentations (V, ρ) et (V', ρ') de G est la représentation $(V \otimes V', \rho \otimes \rho')$ de G dans l'espace vectoriel $V \otimes V'$, où pour tout $g \in G$, l'application $(\rho \otimes \rho')(g)$ est l'unique application linéaire de $V \otimes V'$ dans $V \otimes V'$ telle que pour tous les $v \in V$ et $v' \in V'$,

$$(\rho \otimes \rho')(g)(v \otimes v') = (\rho(g)v) \otimes (\rho'(g)v'). \quad (21)$$

Il est élémentaire de vérifier que $(\rho \otimes \rho')(g) \in \text{GL}(V \otimes V')$, car $(\rho \otimes \rho')(g^{-1})$ est l'inverse de $(\rho \otimes \rho')(g)$, et que $\rho \otimes \rho' : G \rightarrow \text{GL}(V \otimes V')$ est un morphisme de groupes de Lie. Remarquons la différence formelle importante entre la définition par l'équation (21) de représentation produit tensoriel de groupe de Lie et celle par l'équation (15) de représentation produit tensoriel d'algèbre de Lie. Ceci s'expliquera par les propriétés des représentations tangentes, qui seront définies ci-dessous (voir la formule (24)).

Notons que si (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) sont deux représentations équivalentes de G , et si (V'_1, ρ'_1) et (V'_2, ρ'_2) sont deux représentations équivalentes de G , alors les représentations

$$(V_1 \otimes V'_1, \rho_1 \otimes \rho'_1) \quad \text{et} \quad (V_2 \otimes V'_2, \rho_2 \otimes \rho'_2)$$

sont aussi équivalentes. En effet, si $T : V_1 \rightarrow V_2$ entrelace ρ_1 et ρ_2 et si $T' : V'_1 \rightarrow V'_2$ entrelace ρ'_1 et ρ'_2 , alors l'unique application linéaire $T \boxtimes T' : (V_1 \otimes V'_1) \rightarrow (V_2 \otimes V'_2)$ telle que $T \boxtimes T'(v_1 \otimes v'_1) = T(v_1) \otimes T'(v'_1)$ pour tous les $v_1 \in V_1$ et $v'_1 \in V'_1$ entrelace $\rho_1 \otimes \rho'_1$ et $\rho_2 \otimes \rho'_2$, comme un petit calcul élémentaire analogue à celui pour les algèbres de Lie le montre.

Relations entre représentations de groupe de Lie et d'algèbre de Lie.

L'outil principal qui va nous permettre de relier les représentations d'un groupe de Lie matriciel aux représentations de son algèbre de Lie est la notion de représentation tangente, que nous introduisons maintenant.

Soit (V, ρ) une représentation de groupe de Lie de G . L'application tangente

$$T_e \rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

est un morphisme d'algèbres de Lie réelles par la proposition 1.13 (3). Donc $T_e \rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ est une représentation de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G dans l'espace vectoriel complexe V , appelée la *représentation tangente* de ρ , et notée $T\rho$.⁶⁴ Par la proposition 1.13 (3), elle vérifie, pour tous les $t \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathfrak{g}$, la relation

$$\exp(t T\rho(X)) = \rho(\exp(tX)),$$

ce qui donne par la proposition 1.2 (5) un moyen pratique de calcul suivant : pour tout $X \in \mathfrak{g}$,

$$T\rho(X) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \rho(\exp(tX)). \quad (22)$$

Exemples (1) La représentation tangente de la représentation complexe conjuguée de ρ est la représentation complexe conjuguée de la représentation tangente de ρ (en travaillant dans la même base \mathcal{B} de V pour la définition de $\bar{\rho}$ et de $\overline{T\rho}$) :

$$\overline{T\rho} = T\bar{\rho}. \quad (23)$$

64. La notation varie dans les références.

(2) Si (V, ρ) et (V', ρ') sont deux représentations de G , alors

$$T(\rho \oplus \rho') = T\rho \oplus T\rho' : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V \oplus V')$$

et

$$T(\rho \otimes \rho') = T\rho \otimes T\rho' : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V \otimes V'). \quad (24)$$

En effet, pour tous les $X \in \mathfrak{g}$, $v \in V$ et $v' \in V'$, nous avons par la bilinéarité du produit tensoriel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|_{t=0} (\rho \otimes \rho')(\exp tX)(v \otimes v') &= \frac{d}{dt}|_{t=0} ((\rho(\exp tX)v) \otimes (\rho'(\exp tX)v')) \\ &= (T\rho(X)v) \otimes v' + v \otimes (T\rho'(X)v') \\ &= (T\rho \otimes T\rho')(X)(v \otimes v'). \end{aligned}$$

La formule (24) découle alors de la formule (22).

(3) Si G' est un groupe de Lie matriciel et si $\phi : G' \rightarrow G$ est un morphisme de groupes de Lie, alors $(V, \rho \circ \phi)$ est une représentation de G' , et

$$T(\rho \circ \phi) = T\rho \circ T_e\phi.$$

En effet, outre qu'il s'agit d'une simple application du théorème de différentiation des fonctions composées, pour tous les X' dans l'algèbre de Lie de G' , par les formules (22) et (5), nous avons

$$T(\rho \circ \phi)(X') = \frac{d}{dt}|_{t=0} (\rho \circ \phi)(\exp(tX')) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \rho(\exp(tT_e\phi(X'))) = T\rho(T_e\phi(X')).$$

(4) La représentation tangente de la représentation contragrédiente (V^*, ρ^\sim) d'une représentation (V, ρ) de G est la représentation contragrédiente de la représentation tangente de (V, ρ) :

$$T(\rho^\sim) = (T\rho)^\sim. \quad (25)$$

En effet, pour tous les $\ell \in V^*$, $v \in V$ et $X \in \mathfrak{g}$, par la définition de la représentation tangente (voir la formule (22)), par la linéarité des évaluations, et par les définitions des représentations contragrédientes (voir les formules (19) et (13)), nous avons,

$$\begin{aligned} T(\rho^\sim)(X)(\ell)(v) &= \left(\frac{d}{dt}|_{t=0} \rho^\sim(\exp(tX))(\ell) \right)(v) = \frac{d}{dt}|_{t=0} (\rho^\sim(\exp(tX))(\ell)(v)) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} \ell(\rho(\exp(-tX))(v)) = \ell \left(\frac{d}{dt}|_{t=0} \rho(\exp(-tX))(v) \right) \\ &= \ell(-T\rho(X)(v)) = (T\rho)^\sim(X)(\ell)(v). \end{aligned}$$

Nous résumons dans la proposition suivante quelques relations entre une représentation d'un groupe de Lie et sa représentation tangente.

Proposition 1.22. *Soit (V, ρ) une représentation d'un groupe de Lie matriciel G d'algèbre de Lie \mathfrak{g} .*

- (1) Soit E un sous-espace vectoriel complexe de V . Si E est invariant par ρ , alors E est invariant par la représentation tangente $T\rho$. Si G est connexe, et si E est invariant par $T\rho$, alors E est invariant par ρ .
- (2) Si la représentation tangente $T\rho$ de \mathfrak{g} est irréductible, alors la représentation ρ de G est irréductible. Si G est connexe, la réciproque est vraie.
- (3) Si G est connexe, la représentation tangente $T\rho$ de \mathfrak{g} est complètement réductible si et seulement si la représentation ρ de G est complètement réductible.
- (4) Soit (V', ρ') une autre représentation de G . Si ρ et ρ' sont équivalentes, alors $T\rho$ et $T\rho'$ sont équivalentes. Si G est connexe, la réciproque est vraie.

Démonstration. (1) Pour tous les $X \in \mathfrak{g}$, $t \in \mathbb{R}$ et $v \in E$, nous avons $\rho(\exp(tX))(v) \in E$ donc en utilisant la formule (22), puisque E est un sous-espace vectoriel (fermé), nous avons

$$T\rho(X)(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \rho(\exp(tX))(v) \in E .$$

Pour montrer la réciproque, nous allons utiliser le lemme suivant.

Lemma 1.23. Soit G un groupe de Lie matriciel connexe. Alors tout voisinage de l'identité de G engendre G . Si \mathfrak{g} est l'algèbre de Lie de G , alors l'image $\exp(\mathfrak{g})$ de l'exponentielle engendre G . Tout élément de G est un produit d'un nombre fini d'éléments de la forme $\exp X$ où $X \in \mathfrak{g}$.

Démonstration. Soit U un voisinage ouvert de e dans G . Soit H le sous-groupe de G engendré⁶⁵ par U . Alors H est ouvert, car pour tout $g \in H$, la partie gU est un voisinage ouvert de g (en effet, la translation à gauche par g est un difféomorphisme de G dans G), et elle est contenue dans H puisque H est un sous-groupe contenant g et U . Puisque tout sous-groupe ouvert est fermé (car ${}^cA = \bigcup_{g \in G-A} gA$ pour tout sous-groupe A de G), le sous-groupe ouvert et fermé H de G est égal à G , par connexité de G .

Les deux dernières affirmations découlent de la première, de la proposition 1.13 (1) et de la définition d'un sous-groupe engendré par une partie d'un groupe (voir l'appendice A). \square

Maintenant, supposons que G soit connexe. Par la proposition 1.13 (3), nous avons

$$\rho(\exp(X)) = \exp(T\rho(X))$$

pour tous les $X \in \mathfrak{g}$. Si $T\rho(\mathfrak{g})$ préserve E , alors $T\rho(X)$ et donc $(T\rho(X))^n$ préserve E pour tous les $n \in \mathbb{N}$ et $X \in \mathfrak{g}$. Comme E est fermé, $\exp(T\rho(X))$ préserve donc E , donc $\rho(\exp(\mathfrak{g}))$ aussi. Puisque tout élément de G est produit d'un nombre fini d'éléments de $\exp(\mathfrak{g})$, nous en déduisons que $\rho(G)$ préserve E .

(2) Ceci découle immédiatement de (1), car si ρ laisse un sous-espace vectoriel de V non trivial invariant, alors $T\rho$ aussi, et si G est connexe, alors la réciproque est vraie.

(3) Rappelons que si E est un sous-espace vectoriel de V invariant par ρ (respectivement $T\rho$), nous notons $(E, \rho|_E)$ (respectivement $(E, T\rho|_E)$) la représentation restreinte à E de ρ (respectivement $T\rho$), définie par $\rho|_E : g \mapsto \rho(g)|_E$ (respectivement $(T\rho)|_E : g \mapsto (T\rho(g))|_E$).

65. Voir les rappels de terminologie de l'appendice A.

Si (V, ρ) est complètement réductible, soit $V = \bigoplus_{i=1}^k V_i$ une décomposition en somme directe de V telle que V_i soit invariant par ρ et $\rho|_{V_i}$ soit irréductible. Alors V_i est invariant par $T\rho$ par l'assertion (1) et $(T\rho)|_{V_i} = T(\rho|_{V_i})$ est irréductible par l'assertion (2) car G est connexe. Donc $T\rho$ est complètement réductible.

Réciproquement, si $T\rho$ est complètement réductible, soit $V = \bigoplus_{i=1}^k V_i$ une décomposition en somme directe de V telle que V_i soit invariant par $T\rho$ et $(T\rho)|_{V_i}$ soit irréductible. Alors V_i est invariant par ρ par l'assertion (1) car G est connexe et $\rho|_{V_i}$ est irréductible par l'assertion (2) car $T(\rho|_{V_i}) = (T\rho)|_{V_i}$.

(4) Si $u : V \rightarrow V'$ est un opérateur d'entrelacement entre ρ et ρ' , alors pour tous les $X \in \mathfrak{g}$ et $t \in \mathbb{R}$, nous avons $u \circ \rho(\exp(tX)) = \rho'(\exp(tX)) \circ u$. Donc en utilisant la formule (22), puisque u est linéaire, nous avons

$$u \circ T\rho(X) - T\rho'(X) \circ u = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(u \circ \rho(\exp(tX)) - \rho'(\exp(tX)) \circ u \right) = 0.$$

Par conséquent, $T\rho$ et $T\rho'$ sont équivalentes si ρ et ρ' le sont.

La réciproque se démontre de manière similaire à la réciproque de l'assertion (1). Soit $u : V \rightarrow V'$ un isomorphisme linéaire tel que

$$T\rho(X) = u^{-1} \circ T\rho'(X) \circ u$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Alors pour tout $X \in \mathfrak{g}$, nous avons par la proposition 1.13 (3),

$$\rho(\exp X) = \exp(T\rho(X)) = u^{-1} \circ \exp(T\rho'(X)) \circ u = u^{-1} \circ \rho'(\exp X) \circ u.$$

Donc par la dernière assertion du lemme 1.23, nous avons, pour tout $g \in G$,

$$\rho(g) = u^{-1} \circ \rho'(g) \circ u.$$

Ceci conclut la démonstration de la proposition 1.22. □

Le résultat suivant découle immédiatement de la proposition 1.22.

Corollaire 1.24. *Soit G un groupe de Lie matriciel connexe, d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . L'application qui à une représentation (V, ρ) de G associe la représentation $(V, T\rho)$ de \mathfrak{g} induit une injection de l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles du groupe de Lie G dans l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . □*

Nous renvoyons par exemple à [Pau2] pour une démonstration du résultat suivant, qui implique que si G est simplement connexe, alors l'injection du corollaire ci-dessus est une bijection.

Proposition 1.25. *Soient G un groupe de Lie matriciel et (V, R) une représentation de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G . Si G est simplement connexe, alors il existe une et une seule représentation ρ du groupe de Lie G sur V telle que $T\rho = R$.*

Si G est simplement connexe, l'application $[\rho] \mapsto [T\rho]$ de l'ensemble \widehat{G} des classes d'équivalence de représentations irréductibles du groupe de Lie G dans l'ensemble $\widehat{\mathfrak{g}}$ des classes d'équivalence de représentations irréductibles de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est une bijection. □

Par exemple, pour tout $n \geq 2$, puisque $SU(n)$ est simplement connexe (voir la proposition 1.12), nous avons une correspondance bijective entre les représentations irréductibles (modulo conjugaison) de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(n)$ et celles du groupe de Lie $SU(n)$.

Le résultat suivant découle facilement de la proposition 1.25.

Corollaire 1.26. *Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie réelle dont l'algèbre de Lie complexifiée $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie complexifiée d'un groupe de Lie matriciel compact simplement connexe, alors toute représentation de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est complètement réductible.*

Démonstration. Soit U un groupe de Lie matriciel compact et simplement connexe, d'algèbre de Lie \mathfrak{u} telle que les algèbres de Lie complexes $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$ soient isomorphes. Puisque U est compact et par la proposition 1.20, toute représentation du groupe de Lie U est complètement réductible. Puisque U est simplement connexe et par les propositions 1.25 et 1.22 (3), toute représentation de l'algèbre de Lie \mathfrak{u} est complètement réductible. Par la proposition 1.16, toute représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$, donc de l'algèbre de Lie isomorphe $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, est complètement réductible. De nouveau par la proposition 1.16, toute représentation de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est complètement réductible. \square

1.5 Indications pour la résolution des exercices

Schéme⁶⁶ E.1 (1) Pour tout $y \in \text{Uni}_N$, nous avons $y - I_N \in \text{Nil}_N$ et Nil_N est stable par combinaisons linéaires et par multiplication des matrices commutantes. Pour tout $x \in \text{Nil}_N$, nous avons $x^n = 0$ pour tout $n \geq N$. Donc $\exp x = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} x^n \in \text{Uni}_N$. Notons $\ln : \text{Uni}_N \rightarrow \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ l'application $y \mapsto \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \frac{(y - I_N)^n}{n} \in \text{Nil}_N$. Alors \ln et \exp sont de classe C^∞ car polynomiales en les coefficients, et les propriétés formelles des séries définissant \ln et \exp font que $\ln \circ \exp = \text{id}_{\text{Nil}_N}$ et $\exp \circ \ln = \text{id}_{\text{Uni}_N}$.

(2) La démonstration de l'assertion (2) est analogue à celle de l'assertion (3), nous la laissons au lecteur.

(3) L'application $\exp : \text{Herm}_N \rightarrow \text{Herm}_N^+$ est bien définie, car $(\exp x)^* = \exp(x^*)$ et si $x \in \text{Herm}_N$, alors x est à valeurs propres réelles et diagonalisable en base orthonormée, donc il existe $P \in U(N)$ et D une matrice diagonale réelle tels que $x = PDP^{-1}$, donc $\exp x = P(\exp D)P^{-1} \in \text{Herm}_N^+$.

L'application $\exp : \text{Herm}_N \rightarrow \text{Herm}_N^+$ est surjective, car si $y \in \text{Herm}_N^+$, alors il existe $P \in U(N)$ et D_+ une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs tels que $y = PD_+P^{-1}$, et si $x = P(\ln D_+)P^{-1}$ où $\ln D_+$ est la matrice diagonale de coefficients diagonaux les logarithmes des coefficients diagonaux de D_+ , alors $y = \exp x$.

L'application $\exp : \text{Herm}_N \rightarrow \text{Herm}_N^+$ est injective, car si $z \in \text{Herm}_N$ alors toute base qui diagonalise $\exp z$ diagonalise z et réciproquement. Donc si $x, x' \in \text{Herm}_N$ vérifient $\exp x = \exp(x')$, alors x, x' sont simultanément diagonalisables en base orthonormée donc $x = PDP^{-1}$ et $x' = PD'P^{-1}$ avec $P \in U(N)$ et D, D' diagonales réelles. Comme $D = \ln \exp D = \ln \exp D' = D'$, nous avons $x = x'$.

L'application $\exp : \text{Herm}_N \rightarrow \text{Herm}_N^+$ est donc une bijection de classe C^∞ entre deux ouverts de l'espace vectoriel réel Herm_N de dimension finie. Les valeurs propres des éléments X de Herm_N sont réelles (et donc la différence de deux d'entre elles ne peut être un multiple entier non nul de $2i\pi$). Donc la différentielle de \exp en tout élément X de Herm_N

66. n.m. (gr. $\sigma\chi\eta\mu\alpha$). Structure d'ensemble d'un processus.

est injective par la proposition 1.2 (8). Par conséquent, $d\exp_X$ est bijective de Herm_N dans Herm_N . Par le théorème d'inversion locale (voir le corollaire B.2 dans l'appendice B), $\exp : \text{Herm}_N \rightarrow \text{Herm}_N^+$ est donc un C^∞ -difféomorphisme.

(4) Il suffit de poser

$$\sqrt{x} = \exp\left(\frac{1}{2}\exp^{-1}(x)\right).$$

Notons que $\sqrt{PxP^{-1}} = P\sqrt{x}P^{-1}$ pour tous les $x \in \text{Herm}_N^+$ et $P \in \text{U}(N)$ (respectivement $x \in \text{Sym}_N^+$ et $P \in \text{O}(N)$), et que

$$\sqrt{\begin{pmatrix} \lambda^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda^N \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda^1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda^N} \end{pmatrix}$$

pour tous les $\lambda^1, \dots, \lambda^N > 0$.

Schéma E.2 Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 . Pour tous les $j, k \in \{1, 2, 3\}$, nous avons $e_j \wedge e_k = 0$ si $j = k$ et $e_j \wedge e_k = -e_k \wedge e_j$. De plus,

$$e_1 \wedge e_2 = e_3, \quad e_2 \wedge e_3 = e_1, \quad e_3 \wedge e_1 = e_2$$

puisque le produit vectoriel de deux vecteurs orthonormés est le vecteur unitaire directement orthogonal (satisfaisant la règle dite "des trois doigts de la main droite"). Donc

$$\forall j, k \in \{1, 2, 3\}, \quad e_j \wedge e_k = \epsilon_{jk}^\ell e_\ell$$

où les ϵ_{jk}^ℓ sont les constantes de structure de la base canonique (η_1, η_2, η_3) de $\mathfrak{so}(3)$. Comme ces constantes vérifient les conditions (7) et (8), l'application $(x, y) \mapsto x \wedge y$, qui est bilinéaire, est bien un crochet de Lie sur \mathbb{R}^3 . D'autre part, puisque les algèbres de Lie (\mathbb{R}^3, \wedge) et $\mathfrak{so}(3)$ admettent des bases vectorielles en bijection ayant mêmes constantes de structure, elles sont isomorphes.

2 Les groupes SU(2) et SO(3)

Motivations physiques

Dans le plan euclidien réel \mathbb{R}^2 identifié avec la droite hermitienne complexe \mathbb{C} , les rotations sont les applications $z \mapsto e^{i\theta}z$, résultat de l'application à z de l'opérateur linéaire (unitaire) de multiplication par $e^{i\theta}$. Ainsi nous voyons apparaître l'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$, plus naturelle que l'application exponentielle stricto sensu du groupe de Lie U(1) (qui est l'application $\exp : i\mathbb{R} \rightarrow U(1)$ définie par $i\theta \mapsto e^{i\theta}$ de l'algèbre de Lie $i\mathbb{R}$ de U(1) à valeurs dans U(1)). Notons que les éléments de \mathbb{R} sont hermitiens dans \mathbb{C} (égaux à leur conjugué), alors que ceux de $i\mathbb{R}$ sont anti-hermitiens (opposés à leur conjugué). Inspirés en particulier par ce cas de la dimension 1, les physiciens préfèrent travailler avec les matrices hermitiennes, plutôt qu'anti-hermitiennes, et considérer en particulier l'application $i\mathfrak{su}(n) \rightarrow \mathrm{SU}(n)$ définie par

$$X \mapsto \exp(-iX)$$

plutôt que l'application exponentielle stricto sensu du groupe de Lie SU(n) (qui est l'application $\mathfrak{su}(n) \rightarrow \mathrm{SU}(n)$ définie par $Y \mapsto \exp(Y)$).

Étudions les rotations de l'espace euclidien réel \mathbb{R}^3 , c'est-à-dire les bijections linéaires préservant la norme des vecteurs de \mathbb{R}^3 et de déterminant 1, dont les matrices dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) forment le groupe SO(3).

Par exemple par la classification à conjugaison près des rotations (voir le lemme 1.10), toute rotation fixe une droite de vecteur directeur unitaire

$$\vec{n} \in \mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

et induit, sur le plan orienté orthogonal à cette droite orientée par \vec{n} , une rotation d'angle $\psi \in [-\pi, \pi]$. Notons $R_{\vec{n}}(\psi)$ cette rotation. En écrivant $x \in \mathbb{R}^3$ comme somme d'un vecteur x' colinéaire à \vec{n} et d'un vecteur x'' orthogonal à \vec{n} , nous avons donc

$$R_{\vec{n}}(\psi) : x \mapsto x' + (\cos \psi) x'' + (\sin \psi) \vec{n} \wedge x'' .$$

En utilisant les relations $\vec{n} \wedge x' = 0$ et, pour tous les $a, b, c \in \mathbb{R}^3$,

$$a \wedge (b \wedge c) = \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c ,$$

nous avons $\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge x) = \langle \vec{n}, x \rangle \vec{n} - x = x' - x = -x''$, et

$$R_{\vec{n}}(\psi) : x \mapsto x + (1 - \cos \psi) \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge x) + (\sin \psi) \vec{n} \wedge x . \quad (26)$$

Notons que l'application $\psi \mapsto R_{\vec{n}}(\psi)$ de \mathbb{R} dans SO(3) est un sous-groupe à un paramètre de SO(3).⁶⁷ Notons que

$$R_{-\vec{n}}(-\psi) = R_{\vec{n}}(\psi)$$

et lever cette surdétermination permettra de comprendre le passage de SO(3) à SU(2).

⁶⁷. Elle est C^∞ par la formule (26) et $R_{\vec{n}}(\psi + \psi') = R_{\vec{n}}(\psi) \circ R_{\vec{n}}(\psi')$ par composition des rotations autour d'un même axe orienté.

Par exemple, les rotations d'angle ψ autour des axes de coordonnées (qui sont naturellement orientés), identifiées à leur matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , sont les éléments de $\text{SO}(3)$ suivants

$$\begin{aligned} R_{e_1}(\psi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \\ R_{e_2}(\psi) &= \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix} \\ R_{e_3}(\psi) &= \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, nous avons $\frac{d}{d\psi}\big|_{\psi=0} R_{e_k}(\psi) = \eta_k$ où (η_1, η_2, η_3) est la base de $\mathfrak{so}(3)$ définie par les formules (9) (ce qui est d'ailleurs une autre indication que cette base de $\mathfrak{so}(3)$ est naturelle). Comme nous l'avons dit, les matrices (η_1, η_2, η_3) étant anti-hermitiennes, les physiciens préfèrent travailler avec les matrices

$$\tilde{J}_1 = i \eta_1, \quad \tilde{J}_2 = i \eta_2, \quad \tilde{J}_3 = i \eta_3$$

de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, qui sont hermitiennes, voir la remarque initiale dans le cas de $\text{SO}(2) \simeq \text{U}(1)$.

Proposition 2.1. *Pour tout vecteur unitaire $\vec{n} = (n^1, n^2, n^3) \in \mathbb{S}^2$ et pour tout $\psi \in \mathbb{R}$, nous avons*⁶⁸

$$R_{\vec{n}}(\psi) = \exp(-i \psi n^k \tilde{J}_k).$$

En particulier, cette proposition montre de manière explicite que l'application exponentielle $\exp : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \text{SO}(3)$ est surjective.

Démonstration. Par la formule (26), $\frac{d}{d\psi}\big|_{\psi=0} R_{\vec{n}}(\psi)$ est l'application linéaire $x \mapsto \vec{n} \wedge x$. Un petit calcul⁶⁹ montre que cette application a pour matrice $n^k \eta_k$. Par la proposition 1.2 (6), puisque $\psi \mapsto R_{\vec{n}}(\psi)$ est un sous-groupe à un paramètre (de $\text{SO}(3)$ donc de $\text{GL}_3(\mathbb{R})$), nous avons donc

$$R_{\vec{n}}(\psi) = \exp(\psi n^k \eta_k) = \exp(-i \psi n^k \tilde{J}_k),$$

en utilisant l'expression des \tilde{J}_k en fonction des η_k . □

Les physiciens utilisent aussi beaucoup les éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ suivants :

$$\tilde{J}_- = \tilde{J}_1 - i\tilde{J}_2, \quad \tilde{J}_+ = \tilde{J}_1 + i\tilde{J}_2, \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{J}}^2 = \tilde{J}_1^2 + \tilde{J}_2^2 + \tilde{J}_3^2 = -\eta_1^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2. \quad (27)$$

Ils vérifient les relations de commutation suivantes :

$$[\tilde{J}_3, \tilde{J}_+] = \tilde{J}_+, \quad [\tilde{J}_3, \tilde{J}_-] = -\tilde{J}_-, \quad [\tilde{J}_+, \tilde{J}_-] = 2\tilde{J}_3$$

68. en utilisant encore la convention de sommation d'Einstein

69. Rappelons que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & y_2 & z_2 & | \\ y_3 & z_3 & | & \\ | & y_1 & z_1 & | \\ y_3 & z_3 & | & \\ | & y_1 & z_1 & | \\ y_2 & z_2 & | & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 z_3 - y_3 z_2 \\ y_1 z_3 - y_3 z_1 \\ y_1 z_2 - y_2 z_1 \end{pmatrix}$ pour $y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}$.

$$[\tilde{\mathbf{J}}^2, \tilde{J}_1] = [\tilde{\mathbf{J}}^2, \tilde{J}_2] = [\tilde{\mathbf{J}}^2, \tilde{J}_3] = [\tilde{\mathbf{J}}^2, \tilde{J}_+] = [\tilde{\mathbf{J}}^2, \tilde{J}_-] = 0.$$

L'élément $\tilde{\mathbf{J}}^2$ s'appelle l'*opérateur de Casimir* de $\text{SO}(3)$. En physique quantique (voir par exemple [Edm]), les opérateurs hermitiens $\hbar\tilde{J}_1, \hbar\tilde{J}_2, \hbar\tilde{J}_3$ sont les composantes du moment angulaire, et $\hbar^2\tilde{\mathbf{J}}^2$ est le carré du moment angulaire.

2.1 L'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3)$

Rappelons que $\mathfrak{su}(2)$ est l'algèbre de Lie réelle des matrices complexes 2×2 anti-hermitiennes de trace nulle, muni du crochet des matrices :

$$\mathfrak{su}(2) = \{X \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}) : X^* = -X, \text{tr} X = 0\}.$$

Il est facile de vérifier que les matrices suivantes forment une base vectorielle réelle de $\mathfrak{su}(2)$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Nous renvoyons à l'exemple (1) de la partie 1.3 pour la relation entre ces matrices et les matrices de Pauli $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Nous avons déjà vu (voir les formules centrées (10) et (11)) que les relations de commutation de ces matrices sont exactement les mêmes que les relations de commutation de la base (η_1, η_2, η_3) de $\mathfrak{so}(3)$. Donc les algèbres de Lie réelles $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{so}(3)$ sont isomorphes, par l'unique application linéaire de $\mathfrak{su}(2)$ dans $\mathfrak{so}(3)$ qui envoie ξ_1, ξ_2, ξ_3 sur η_1, η_2, η_3 respectivement.

Proposition 2.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{su}(n)$ est une forme réelle de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.*

Démonstration. Nous ne donnerons que la démonstration dans le cas $n = 2$ pour introduire des notations qui serviront ultérieurement, mais la démonstration est analogue pour n général.

L'espace vectoriel complexe $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}) : \text{tr} X = 0\}$ est de dimension 3 et admet pour base le triplet (H, X_-, X_+) , où

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Ces éléments satisfont les relations de commutation

$$[X_+, X_-] = H \quad \text{et} \quad [H, X_{\pm}] = \pm 2 X_{\pm}. \quad (29)$$

Puisque $\mathfrak{su}(2)$ est engendré en tant qu'espace vectoriel réel par la base (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , l'espace vectoriel complexe $\mathfrak{su}(2)^{\mathbb{C}}$ a encore pour base sur \mathbb{C} le triplet (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , donc a aussi pour base sur \mathbb{C}

$$(J_1 = i\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = i\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = i\xi_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}), \quad (30)$$

ou encore

$$(J_3 = i\xi_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad J_- = i\xi_1 + \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_+ = i\xi_1 - \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}). \quad (31)$$

Nous avons

$$J_3 = -\frac{1}{2}H, \quad J_- = -X_+, \quad J_+ = -X_- . \quad (32)$$

Donc en tant qu'espaces vectoriels complexes

$$\begin{aligned} \mathfrak{su}(2)^{\mathbb{C}} &= \mathbb{C}\xi_1 + \mathbb{C}\xi_2 + \mathbb{C}\xi_3 = \mathbb{C}J_1 + \mathbb{C}J_2 + \mathbb{C}J_3 = \mathbb{C}J_3 + \mathbb{C}J_- + \mathbb{C}J_+ \\ &= \mathbb{C}H + \mathbb{C}X_- + \mathbb{C}X_+ = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) . \end{aligned}$$

Comme l'extension des scalaires du crochet de Lie des matrices de $\mathfrak{su}(2)$ est le crochet de Lie des matrices de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, l'égalité d'espaces vectoriels $\mathfrak{su}(2)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est aussi une égalité d'algèbres de Lie complexes. \square

Cette démonstration peut être raccourcie, mais nous a permis d'introduire des notations que nous utiliserons par la suite. L'élément

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 &= J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = J_+J_- + J_3(J_3 - \text{id}) = J_-J_+ + J_3(J_3 + \text{id}) \\ &= X_-X_+ + \frac{1}{4}H(H + 2\text{id}) \end{aligned} \quad (33)$$

de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$, que nous pouvons aussi écrire

$$\mathbf{J}^2 = -\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} ,$$

s'appelle l'*opérateur de Casimir* de $\text{SU}(2)$.

Considérons l'isomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{su}(2)$ dans $\mathfrak{so}(3)$, qui envoie la base (ξ_1, ξ_2, ξ_3) de $\mathfrak{su}(2)$ sur la base (η_1, η_2, η_3) de $\mathfrak{so}(3)$. Notons qu'il envoie J_+, J_-, J_3 sur $\widetilde{J}_+ = i\eta_1 - \eta_2, \widetilde{J}_- = i\eta_1 + \eta_2, \widetilde{J}_3$ en passant aux espaces vectoriels complexifiés. En particulier, il envoie l'opérateur de Casimir $\mathbf{J}^2 = -\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2$ de $\text{SU}(2)$ sur l'opérateur de Casimir $\widetilde{\mathbf{J}}^2 = -\eta_1^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2$ de $\text{SO}(3)$, introduit dans les motivations physiques en préliminaire à ce chapitre 2.

2.2 Le revêtement universel de $\text{SO}(3)$ par $\text{SU}(2)$

Cette partie est destinée à étudier les liens entre $\text{SO}(3)$ et $\text{SU}(2)$. Nous commençons par une description explicite de $\text{SU}(2)$. Nous identifions de manière usuelle \mathbb{C}^2 et \mathbb{R}^4 , de sorte que la sphère unité de dimension 3 de l'espace vectoriel euclidien standard \mathbb{R}^4 est

$$\mathbb{S}^3 = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 : |a|^2 + |b|^2 = 1\} .$$

Rappelons que \mathbb{S}^3 et $\text{SU}(2)$ sont des sous-variétés de $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) = \mathbb{R}^8$ respectivement.

Proposition 2.3. *L'application $f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \text{SU}(2)$ définie par $(a, b) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ est un C^∞ -difféomorphisme. En particulier,*

$$\text{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

est simplement connexe.

Démonstration. L'application $f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ définie par $(a, b) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ est clairement injective, et d'image contenue dans $\mathrm{SU}(2) = \{x \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) : x^*x = \mathrm{id}\}$. Réciproquement, pour tout $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$, nous avons $ad - bc = 1$, et (puisque les vecteurs lignes de la matrice x sont orthonormés pour le produit hermitien standard de \mathbb{C}^2)

$$|c|^2 + |d|^2 = 1 \quad \text{et} \quad a\bar{c} + b\bar{d} = 0.$$

Donc $a d \bar{c} + b d \bar{d} = 0$, d'où $(1 + bc)\bar{c} + b(1 - |c|^2) = 0$ et par conséquent $b = -\bar{c}$. L'égalité $a\bar{c} + b\bar{d} = 0$ implique alors que $(a - \bar{d})c = 0$, donc $a = \bar{d}$ si $c \neq 0$. Mais si $c = 0$, alors $|d| = 1$ et $ad = 1$, d'où $a = \frac{1}{d} = \bar{d}$, ce qui montre aussi le résultat. L'application $f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ est donc bijective, de classe C^∞ par restriction aux sous-variétés \mathbb{S}^3 et $\mathrm{SU}(2)$ d'une application C^∞ , et d'inverse $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a, b)$ aussi de classe C^∞ .

La dernière affirmation découle de la première et de la proposition 1.11. \square

Toute matrice X de $\mathfrak{su}(2)$, étant anti-hermitienne de trace nulle, s'écrit de manière unique

$$X = \begin{pmatrix} i x_3 & -x_2 + i x_1 \\ x_2 + i x_1 & -i x_3 \end{pmatrix} = 2x_1\xi_1 + 2x_2\xi_2 + 2x_3\xi_3$$

où x_1, x_2, x_3 sont des nombres réels, et (ξ_1, ξ_2, ξ_3) est la base (sur \mathbb{R}) de $\mathfrak{su}(2)$ définie par les formules (28). Munissons l'espace vectoriel réel $\mathfrak{su}(2)$ du produit scalaire euclidien tel que $(2\xi_1, 2\xi_2, 2\xi_3)$ soit une base orthonormée, et nous noterons $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Alors

$$\det X = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \|X\|^2. \quad (34)$$

Considérons la représentation Adjointe de $\mathrm{SU}(2)$

$$\mathrm{Ad} : \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{su}(2))$$

définie par $g \mapsto \{X \mapsto gXg^{-1}\}$. Pour tout $g \in \mathrm{SU}(2)$, l'application linéaire $\mathrm{Ad} g$, étant une conjugaison, préserve le déterminant. Donc par l'équation (34), elle préserve le produit scalaire de $\mathfrak{su}(2)$. En identifiant les éléments de $\mathrm{GL}(\mathfrak{su}(2))$ avec leur matrice dans la base $(2\xi_1, 2\xi_2, 2\xi_3)$, l'image de $\mathrm{SU}(2)$ par la représentation Adjointe est donc contenue dans le groupe orthogonal $\mathrm{O}(3)$. Comme $\mathrm{SU}(2)$ est connexe, son image est en fait contenue dans la composante connexe de l'élément neutre dans $\mathrm{O}(3)$, qui est $\mathrm{SO}(3)$ par le corollaire 1.9. Nous obtenons donc un morphisme de groupes de Lie

$$\phi : \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3),$$

qui à $g \in \mathrm{SU}(2)$ associe la matrice dans la base $(2\xi_1, 2\xi_2, 2\xi_3)$ de l'endomorphisme $\mathrm{Ad} g$.

Proposition 2.4. *Ce morphisme de groupes de Lie $\phi : \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$ est surjectif, de noyau $\{\pm \mathrm{id}\}$ (isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).*

Le sous-groupe $\{\pm \mathrm{id}\}$ de $\mathrm{SU}(2)$ est distingué (par exemple parce que c'est le noyau d'un morphisme de groupes), et nous noterons

$$\mathrm{PSU}(2) = \mathrm{SU}(2)/\{\pm \mathrm{id}\}$$

le groupe quotient de $SU(2)$ par $\{\pm \text{id}\}$, où nous identifions donc deux éléments de $SU(2)$ si et seulement s'ils sont égaux au signe près. Le résultat précédent dit en particulier que l'application ϕ induit un isomorphisme de groupes

$$PSU(2) \simeq SO(3),$$

qui est l'un des *isomorphismes exceptionnels* entre certains groupes de Lie matriciels de petite dimension, voir par exemple [Hel, Pau2].

Démonstration. Nous allons utiliser la base (η_1, η_2, η_3) de $\mathfrak{so}(3)$, qui a été définie par les formules (9). Montrons que pour tous les $\psi \in \mathbb{R}$ et $(n^1, n^2, n^3) \in \mathbb{R}^3$, nous avons (toujours avec les conventions de sommation d'Einstein)

$$\phi(\exp(\psi n^j \xi_j)) = \exp(\psi n^j \eta_j). \quad (35)$$

Par la proposition 2.1, pour tous les $\vec{n} = (n^1, n^2, n^3) \in \mathbb{S}^2$ et $\psi \in \mathbb{R}$, nous avons

$$R_{\vec{n}}(\psi) = \exp(\psi n^k \eta_k).$$

Puisque tout élément de $SO(3)$ s'écrit de la forme $R_{\vec{n}}(\psi)$ comme vu dans la partie préliminaire à ce chapitre 2, la formule (35) montrera la surjectivité de ϕ .

Nous avons par la proposition 1.2 (7) et par la linéarité de ad

$$\text{Ad}(\exp(\psi n^j \xi_j)) = \exp(\text{ad}(\psi n^j \xi_j)) = \exp(\psi n^j \text{ad } \xi_j).$$

Par le calcul des relations de commutation de la base (ξ_1, ξ_2, ξ_3) (voir la formule centrée (11)) et puisque $\text{ad } X(Y) = [X, Y]$, la matrice de $\text{ad } \xi_j$ dans la base (ξ_1, ξ_2, ξ_3) est égale à η_j , et elle est égale à celle dans la base $(2\xi_1, 2\xi_2, 2\xi_3)$. Donc ceci démontre la formule (35), par la définition de ϕ .

Le noyau Ker Ad de Ad , qui est égal au noyau de ϕ puisque ϕ est obtenu en postcomposant Ad par un isomorphisme linéaire, est

$$\{g \in SU(2) : \forall X \in \mathfrak{su}(2), gXg^{-1} = X\}.$$

En prenant $X = \xi_3$, qui est diagonale à valeurs propres distinctes, nous obtenons que tout élément de Ker Ad est diagonal, donc de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}$ avec $|a| = 1$. En prenant $X = \xi_2$, nous obtenons que $a = \bar{a}$ est réel, donc $a = \pm 1$, d'où Ker Ad est contenu dans $\{\pm \text{id}\}$. L'inclusion réciproque étant immédiate, nous avons $\text{Ker Ad} = \{\pm \text{id}\}$. \square

Le morphisme de groupes ϕ est donc un difféomorphisme local (car sa différentielle en l'élément neutre est l'isomorphisme linéaire de $\mathfrak{su}(2)$ dans $\mathfrak{so}(3)$ déjà considéré) entre deux groupes de Lie matriciels compacts, dont les préimages des points ont exactement deux points. De plus $SU(2)$ est simplement connexe. On dit alors que $SU(2)$ est un *revêtement, universel et à deux feuillets*, de $SO(3)$, voir par exemple [Pau2] pour plus d'explications.

2.3 Représentations linéaires de $SU(2)$ et $SO(3)$

Par le corollaire 1.24, pour classer (à conjugaison près) les représentations irréductibles des groupes de Lie $SU(2)$ et $SO(3)$, il suffit de classer (à conjugaison près) les représentations irréductibles de leurs algèbres de Lie $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{so}(3)$. Celles-ci sont isomorphes, comme

vu dans la partie 2.1, et leur algèbre de Lie complexifiée est $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ par la proposition 2.2. Par la proposition 1.16, il suffit donc de classer les représentations irréductibles de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Nous allons mettre en oeuvre ce programme dans cette partie 2.3.

Représentations irréductibles de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Le résultat suivant est un théorème de classification explicite des représentations (linéaires de dimension finie) irréductibles de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ à conjugaison près : il y en a une et une seule en chaque dimension, et l'espace vectoriel complexe sur lequel agit la représentation admet une base canonique dans laquelle il est facile d'exprimer l'action des éléments de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, en commençant par celle des éléments de la base vectorielle (J_3, J_-, J_+) de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Théorème 2.5. *Pour tout demi-entier⁷⁰ positif $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, il existe une, et une seule à conjugaison près, représentation irréductible (V^j, D^j) de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ de dimension $2j + 1$. De plus, l'espace vectoriel V^j admet une base dont les vecteurs sont notés $|j, m\rangle$ pour $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ tout demi-entier entre $-j$ et j tel que $j + m$ soit entier, telle que⁷¹*

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 |j, m\rangle &= j(j+1) |j, m\rangle, \\ J_3 |j, m\rangle &= m |j, m\rangle, \\ J_{\pm} |j, m\rangle &= \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle, \end{aligned}$$

où par convention $|j, j+1\rangle = |j, -j-1\rangle = 0$.

En particulier, $|j, m\rangle$ est un vecteur propre commun aux opérateurs linéaires \mathbf{J}^2 (lié au carré du moment angulaire total) et J_3 (lié à la composante verticale du moment angulaire), de valeurs propres associées respectivement $j(j+1)$ et m . Notons que l'application définie par $j \mapsto 2j+1$ de $\frac{1}{2}\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} - \{0\}$ est une bijection.

Démonstration. Nous allons commencer par montrer que toute représentation irréductible de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ admet une forme très particulière à conjugaison près. Puis nous montrerons que toutes les possibilités obtenues sont réalisées. Enfin, nous déterminerons une base particulière de l'espace de la représentation.

Nous considérons de nouveau la base (H, X_-, X_+) de l'espace vectoriel complexe $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ de dimension 3 définie dans la démonstration de la proposition 2.2, et ses relations de commutation (29).

Étape 1 : Soit (V, R) une représentation irréductible de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ de dimension au moins 1. Pour tous les $v \in V$ et $X \in \mathfrak{g}$, nous noterons pour simplifier (voir la convention de notation (*) du début de la partie 1.3)

$$R(X)(v) = Xv .$$

Soit $w \in V$ un vecteur propre non nul de l'opérateur linéaire $R(H)$, de valeur propre associée λ (qui existe car le corps des scalaires est \mathbb{C} et $V \neq \{0\}$). Par les formules (29), nous avons

$$HX_{\pm}w = X_{\pm}Hw \pm 2X_{\pm}w = (\lambda \pm 2)X_{\pm}w . \quad (36)$$

70. Par demi-entier, nous entendons un élément de $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, et en particulier tout entier est un demi-entier. Les physiciens restreignent parfois la terminologie de demi-entier aux éléments de $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}$.

71. en utilisant la convention de notation (*) du début de la partie 1.3 appliquée à la représentation d'algèbre de Lie (V^j, D^j)

Donc si $w' = X_+w$ est non nul, alors w' est un nouveau vecteur propre non nul de $R(H)$, de valeur propre associée $\lambda' = \lambda + 2$. Comme l'ensemble des valeurs propres de $R(H)$ est fini puisque V est de dimension finie, l'itération de ce processus termine au bout d'un nombre fini d'étapes, et il existe donc $v_0 \in V$ un vecteur propre non nul de $R(H)$, de valeur propre associée λ_0 , tel que

$$X_+v_0 = 0 .$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons par récurrence

$$v_{k+1} = X_-v_k , \quad (37)$$

de sorte que $v_k = (X_-)^k v_0$. Par récurrence et en utilisant la première égalité de la formule (36), nous avons⁷²

$$Hv_k = (\lambda_0 - 2k)v_k . \quad (38)$$

Puisque l'ensemble des valeurs propres de $R(H)$ est fini, il existe un plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_{n+1} = 0$.

Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, nous avons

$$X_+v_k = k(\lambda_0 - k + 1)v_{k-1} . \quad (39)$$

Cette formule est vérifiée pour $k = 1$ car, par la définition de v_1 , par la première relation de commutation des formules (29), puisque $X_+v_0 = 0$ et par la formule (38) au rang $k = 0$, nous avons

$$X_+v_1 = X_+X_-v_0 = X_-X_+v_0 + Hv_0 = X_-0 + (\lambda_0 - 0)v_0 = \lambda_0v_0 .$$

Supposons qu'elle soit vérifiée au rang k , alors puisque $v_{k+1} = X_-v_k$ et $X_-v_{k-1} = v_k$, nous avons

$$\begin{aligned} X_+v_{k+1} &= X_+X_-v_k = X_-X_+v_k + Hv_k = X_-(k(\lambda_0 - k + 1)v_{k-1}) + (\lambda_0 - 2k)v_k \\ &= (k(\lambda_0 - k + 1) + (\lambda_0 - 2k))v_k = (k + 1)(\lambda_0 - k)v_k , \end{aligned}$$

ce qui montre la formule au rang $k + 1$.

En appliquant la formule de récurrence (39) avec $k = n + 1$, comme $v_{n+1} = 0$ et $v_n \neq 0$, nous avons donc

$$\lambda_0 = n .$$

Par la formule (38), les $n + 1$ vecteurs v_0, \dots, v_n sont des vecteurs propres de $R(H)$ dont les valeurs propres $n, n - 2, n - 4, \dots, -n + 2, -n$ sont deux à deux distinctes. En particulier, ces vecteurs v_0, \dots, v_n sont linéairement indépendants, et donc forment une base de l'espace vectoriel complexe $E = \text{Vect}(v_0, \dots, v_n)$ qu'ils engendrent. De plus, E est invariant par l'opérateur linéaire $R(H)$, dont la matrice dans cette base est diagonale égale

⁷². Par la définition de v_0 , nous avons $Hv_0 = \lambda_0v_0$, donc la formule (38) est vraie au rang $k = 0$. Supposons la formule (38) vraie au rang k . Alors

$$Hv_{k+1} = HX_-v_k = X_-Hv_k - 2X_-v_k = X_-((\lambda_0 - 2k)v_k) - 2X_-v_k = (\lambda_0 - 2(k + 1))v_{k+1} ,$$

ce qui établit la formule (38) au rang $k + 1$.

à $\begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n \end{pmatrix}$. Par les formules (37) et (39), les opérateurs linéaires

$R(X_+)$ et $R(X_-)$ préservent aussi E , et dans la base (v_0, \dots, v_n) de E , ils ont respectivement pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(n-1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3(n-2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme H, X_-, X_+ engendrent l'espace vectoriel $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, le sous-espace vectoriel E de V est donc invariant par $R(\mathfrak{g})$. Par l'irréductibilité de R , ce sous-espace vectoriel E est donc égal à V , et V est de dimension $n+1$. De plus, puisque H, X_-, X_+ engendrent \mathfrak{g} et puisque $R(H), R(X_-), R(X_+)$ sont uniquement déterminés par l'entier n , la représentation R est uniquement déterminée par l'entier n .

Étape 2 : Réciproquement, il n'est pas difficile de voir que les trois matrices ci-dessus vérifient les mêmes relations de commutation que H, X_+, X_- . En effet, pour tout élément $k \in \{0, \dots, n\}$, en posant par convention $e_{-1} = 0$ et $e_{n+1} = 0$, nous avons, en notant encore H, X_-, X_+ les endomorphismes de \mathbb{C}^{n+1} dont les matrices sont celles ci-dessus,

$$\begin{aligned} X_+X_-e_k - X_-X_+e_k &= X_+e_{k+1} - k(n-k+1)X_-e_{k-1} \\ &= (k+1)(n-k)e_k - k(n-k+1)e_k = (n-2k)e_k = He_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} HX_-e_k - X_-He_k &= He_{k+1} - (n-2k)X_-e_k \\ &= (n-2k-2)e_{k+1} - (n-2k)e_{k+1} = -2e_{k+1} = -2X_-e_k, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} HX_+e_k - X_+He_k &= k(n-k+1)He_{k-1} - (n-2k)X_+e_k \\ &= k(n-k+1)(n-2k+2)e_{k-1} - (n-2k)k(n-k+1)e_{k-1} \\ &= 2k(n-k+1)e_{k-1} = 2X_+e_k. \end{aligned}$$

Considérons donc l'unique application linéaire Ψ de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ dans $\text{End}(\mathbb{C}^{n+1})$, qui aux éléments H, X_+, X_- associe les endomorphismes de \mathbb{C}^{n+1} de matrices (dans la base canonique (e_0, \dots, e_n)) les trois matrices ci-dessus. Alors Ψ est une représentation d'algèbre de Lie, par la proposition 1.15. Cette représentation est irréductible. En effet, soit E un sous-espace vectoriel non nul de \mathbb{C}^{n+1} invariant par $\Psi(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$. Alors E est invariant par $\Psi(H)$ (qui est diagonale à valeurs propres distinctes), donc est engendré par une partie non vide des vecteurs de la base canonique de \mathbb{C}^{n+1} . Mais comme E est invariant par $\Psi(X_-)$ et $\Psi(X_+)$, il doit contenir tous les vecteurs de la base canonique de \mathbb{C}^{n+1} , donc doit être égal à \mathbb{C}^{n+1} . De plus, l'unique application linéaire de V dans \mathbb{C}^{n+1} qui envoie la base (v_0, \dots, v_n) sur la base (e_0, \dots, e_n) est un isomorphisme linéaire qui entrelace R et Ψ .

Étape 3 : Posons $j = \frac{n}{2} \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ et pour $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ un demi-entier entre $-j$ et j tel que $j + m$ soit entier, notons $|j, m\rangle$ le vecteur

$$|j, m\rangle = (-1)^{j+m} \sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!}} v_{j+m}.$$

Ainsi, l'espace vectoriel complexe V^j de base $(|j, m\rangle)_{m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} : -j \leq m \leq j, j+m \in \mathbb{N}}$, indexée par les demi-entiers entre $-j$ et j de somme avec j entière, est de dimension $2j + 1$. Puisque (voir la formule (32))

$$J_3 = -\frac{1}{2}H, \quad J_- = -X_+, \quad J_+ = -X_-,$$

les deux dernières formules en fin d'énoncé du théorème 2.5 découlent des équations (37), (38) et (39), et l'antépénultième formule découle de la définition de l'opérateur de Casimir \mathbf{J}^2 de $\mathrm{SU}(2)$. \square

Remarque 2.6. Une base $(|j, m\rangle)_{m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} : -j \leq m \leq j, j+m \in \mathbb{N}}$ comme dans le théorème 2.5 est unique modulo multiplication de tous ses éléments par un même nombre complexe non nul.

Cette remarque est importante du point de vue de la physique, car cela (avec des estimations physiques de type masse ou autre sur leur norme) justifie la possibilité de repérer, dans une représentation concrète dans un espace vectoriel de données physiques, modulo un décalage de phase commune, des états particuliers, que les physiciens appellent alors souvent du nom des éléments correspondant de l'algèbre de Lie.

Démonstration. L'élément $|j, m\rangle$ de cette base est un vecteur propre de $D^j(J_3)$ pour la valeur propre m . Les $2j + 1$ valeurs propres associées sont deux à deux distinctes et l'espace V_j est de dimension $2j + 1$. Donc les vecteurs $|j, m\rangle$ sont uniquement déterminés modulo multiplication de chacun d'entre eux par un nombre complexe non nul λ_m . Par les propriétés de transformation des vecteurs $|j, m\rangle$ par $D^j(J_\pm)$, ces nombres complexes λ_m sont en fait égaux quand m parcourt les demi-entiers entre $-j$ et j de somme avec j entière. \square

Le théorème 2.5 permet de classer toutes les représentations (linéaires de dimension finie) de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ à conjugaison près.

Corollaire 2.7. *Toute représentation d'algèbre de Lie (V, R) de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est conjuguée à une représentation somme directe de copies de représentations (V^j, D^j) pour $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$: il existe une suite finie $(j_p)_{1 \leq p \leq k}$ de demi-entiers positifs (ou nuls) tels que R soit isomorphe à*

$$\bigoplus_{1 \leq p \leq k} D^{j_p}.$$

Démonstration. Par la proposition 2.2, l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est l'algèbre de Lie complexifiée de l'algèbre de Lie réelle \mathfrak{su}_2 . De plus, le groupe de Lie $\mathrm{SU}(2)$ est simplement connexe, par la proposition 2.3. Par la proposition 1.20, toute représentation du groupe de Lie compact $\mathrm{SU}(2)$ est complètement réductible. Par les propositions 1.22 et 1.25, toute représentation de l'algèbre de Lie \mathfrak{su}_2 est complètement réductible. Par la

proposition 1.16, toute représentation d’algèbre de Lie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est donc complètement réductible. Le corollaire découle alors du théorème 2.5 de classification des représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. \square

Représentations irréductibles du groupe de Lie $SU(2)$

Pour tout demi-entier positif $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, notons \mathcal{V}^j l’espace vectoriel complexe des polynômes

$$P = \sum_{m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} : -j \leq m \leq j, j+m \in \mathbb{N}} a_m z_1^{j+m} z_2^{j-m}$$

homogènes en deux variables z_1, z_2 , de degré $2j$ et à coefficients a_m complexes. Il admet pour base “canonique” la suite ordonnée

$$z_2^{2j}, z_1 z_2^{2j-1}, z_1^2 z_2^{2j-2}, \dots, z_1^{j+m} z_2^{j-m}, \dots, z_1^{2j-1} z_2, z_1^{2j}$$

indexée par les demi-entiers $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ tels que $-j \leq m \leq j$ et $j+m \in \mathbb{N}$. Sa dimension complexe est $2j+1$. L’action linéaire de $SL_2(\mathbb{C})$ sur \mathbb{C}^2 induit un morphisme de groupes \mathcal{D}^j de $SL_2(\mathbb{C})$ dans $GL(\mathcal{V}^j)$ par

$$g \mapsto \{P \mapsto P \circ g^{-1}\}.$$

Si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $g^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, et pour tous les $z^1, z^2 \in \mathbb{C}$, nous avons

$$P \circ g^{-1}(z^1, z^2) = P(dz^1 - bz^2, -cz^1 + az^2).$$

Donc l’application $\mathcal{D}^j g : P \mapsto P \circ g^{-1}$ envoie bien \mathcal{V}^j dans \mathcal{V}^j , elle est bien linéaire en P , et inversible d’inverse $\mathcal{D}^j(g^{-1})$. De plus, l’application $\mathcal{D}^j : g \mapsto \mathcal{D}^j g$ est C^∞ (car polynomiale en les coefficients) et il est facile de vérifier que \mathcal{D}^j est un morphisme de groupes.⁷³ Donc \mathcal{D}^j est une représentation du groupe de Lie $SL_2(\mathbb{C})$ dans l’espace vectoriel complexe \mathcal{V}^j .

Remarque 2.8. En utilisant la base $\mathcal{B}_j = (z_1^{j+m} z_2^{j-m})_{m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} : -j \leq m \leq j, j+m \in \mathbb{N}}$ ci-dessus de \mathcal{V}^j pour calculer la représentation complexe conjuguée de $(\mathcal{V}^j, \mathcal{D}^j)$, nous avons

$$\forall g \in SL_2(\mathbb{C}), \quad \overline{\mathcal{D}^j(g)} = \mathcal{D}^j(\bar{g}).$$

Démonstration. Pour tout $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ tel que $-j \leq m \leq j$ et $j+m \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^j g (z_1^{j+m} z_2^{j-m}) &= (dz_1 - bz_2)^{j+m} (-cz_1 + az_2)^{j-m} \\ &= \sum_{m' \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} : -j \leq m' \leq j, j+m' \in \mathbb{N}} P_{m,m'}(a, b, c, d) z_1^{j+m'} z_2^{j-m'} \end{aligned}$$

où $P_{m,m'}(a, b, c, d)$ est un polynôme en a, b, c, d à coefficients dans \mathbb{Z} . Donc la matrice conjuguée $\overline{\mathcal{D}^j(g)}$ de la matrice de $\mathcal{D}^j(g)$ dans la base \mathcal{B}_j est

$$\left(\overline{P_{m,m'}(a, b, c, d)} \right)_{m, m' \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} : -j \leq m, m' \leq j, j+m, j+m' \in \mathbb{N}} = P_{m,m'}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$$

⁷³. Ceci est la raison pour prendre l’inverse de g dans l’expression $\mathcal{D}^j g : P \mapsto P \circ g^{-1}$: pour tous les $g, h \in SL_2(\mathbb{C})$, nous avons $P \circ (gh)^{-1} = (P \circ h^{-1}) \circ g^{-1}$, donc $\mathcal{D}^j(gh) = (\mathcal{D}^j g) \circ (\mathcal{D}^j h)$.

Le résultat découle alors de la définition de la représentation conjuguée $\overline{\mathcal{D}^j}$ dans la base \mathcal{B}_j (voir l'exemple (4) de la partie 1.4). \square

Nous noterons encore $\mathcal{D}^j : \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{V}^j)$ la restriction à $\mathrm{SU}(2)$ de l'application $\mathcal{D}^j : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{V}^j)$, c'est une représentation du groupe de Lie $\mathrm{SU}(2)$.

Cette représentation $(\mathcal{V}^j, \mathcal{D}^j)$ de $\mathrm{SU}(2)$ est appelée par les physiciens la *représentation de spin j* de $\mathrm{SU}(2)$, et sa dimension $2j + 1$ est parfois appelée la *multiplicité de spin*.

Le résultat suivant est un théorème de classification (à conjugaison près) des représentations irréductibles du groupe de Lie $\mathrm{SU}(2)$.

Théorème 2.9. *Pour tout $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, la représentation \mathcal{D}^j de spin j de $\mathrm{SU}(2)$ est irréductible, de représentation tangente $T\mathcal{D}^j$ conjuguée à la restriction à $\mathfrak{su}(2)$ de D^j .*

Toute représentation irréductible de $\mathrm{SU}(2)$ est conjuguée à une et une seule des représentations \mathcal{D}^j de spin j de $\mathrm{SU}(2)$ pour $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ un demi-entier positif.

En particulier, à conjugaison près, il y a une et une seule représentation irréductible de $\mathrm{SU}(2)$ en chaque dimension.

Démonstration. Fixons $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$. Calculons la représentation tangente de la représentation $\mathcal{D}^j : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{V}^j)$. Pour tous les $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, $P \in \mathcal{V}^j$ et $z^1, z^2 \in \mathbb{C}$, nous avons respectivement par la formule (22), par la définition de \mathcal{D}^j , par la dérivation des fonctions composées et par la proposition 1.2 (5),

$$\begin{aligned} T\mathcal{D}^j(-X)P(z^1, z^2) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathcal{D}^j(\exp(-tX))P(z^1, z^2) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} P \circ \exp(tX)(z^1, z^2) \\ &= dP_{(z^1, z^2)} \circ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tX)(z^1, z^2) = dP_{(z^1, z^2)} \circ X(z^1, z^2) \\ &= (az^1 + bz^2) \frac{\partial P}{\partial z_1} + (cz^1 + dz^2) \frac{\partial P}{\partial z_2}. \end{aligned}$$

En utilisant pour $-X$ respectivement (voir la formule (31))

$$J_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

nous avons

$$\begin{aligned} T\mathcal{D}^j(J_3)P(z^1, z^2) &= \frac{1}{2} \left(z^1 \frac{\partial P}{\partial z_1} - z^2 \frac{\partial P}{\partial z_2} \right), \\ T\mathcal{D}^j(J_-)P(z^1, z^2) &= z^2 \frac{\partial P}{\partial z_1}, \quad T\mathcal{D}^j(J_+)P(z^1, z^2) = z^1 \frac{\partial P}{\partial z_2}. \end{aligned}$$

Pour tout $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ tel que $-j \leq m \leq j$ et $j + m \in \mathbb{N}$, notons

$$f_{j,m} = \frac{1}{\sqrt{(j-m)!(j+m)!}} z_1^{j+m} z_2^{j-m}, \quad (40)$$

de sorte que $(f_{j,m})_{m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} : -j \leq m \leq j, j+m \in \mathbb{N}}$ est une base de \mathcal{V}^j . Par ce qui précède, et en posant par convention $f_{j,-j-1} = 0$ et $f_{j,j+1} = 0$, nous avons

$$\begin{aligned} T\mathcal{D}^j(J_3)f_{j,m} &= mf_{j,m} \\ T\mathcal{D}^j(J_-)f_{j,m} &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)} f_{j,m-1} \\ T\mathcal{D}^j(J_+)f_{j,m} &= \sqrt{(j-m)(j+m+1)} f_{j,m+1} \end{aligned}$$

Par le théorème 2.5, les représentations $T\mathcal{D}^j$ et D^j de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sont donc conjuguées (par l'unique isomorphisme linéaire de \mathcal{V}^j dans V^j qui envoie $f_{j,m}$ sur $|j,m\rangle$ pour tout $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ tel que $-j \leq m \leq j$ et $j+m \in \mathbb{N}$).

Par la proposition 2.2, l'algèbre de Lie complexifiée de $\mathfrak{su}(2)$ est $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Puisque l'inverse de la bijection $R \mapsto R^{\mathbb{C}}$ de complexification des représentations est la restriction (voir la démonstration de la proposition 1.16), la représentation complexifiée de la restriction à $\mathfrak{su}(2)$ de $T\mathcal{D}^j$ est la représentation $T\mathcal{D}^j$ de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Or par le théorème 2.5, la représentation D^j de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est irréductible, donc la représentation $T\mathcal{D}^j$ qui lui est conjuguée est aussi irréductible. Par la proposition 1.16, la restriction à $\mathfrak{su}(2)$ de $T\mathcal{D}^j$ est donc une représentation irréductible de $\mathfrak{su}(2)$. Par la proposition 1.22 (2), la représentation \mathcal{D}^j de $SU(2)$ est donc irréductible. Ceci montre la première affirmation du théorème 2.9.

Notons $\widehat{SU(2)}$, $\widehat{\mathfrak{su}(2)}$ et $\widehat{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})}$ respectivement l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles du groupe de Lie matriciel $SU(2)$ et des algèbres de Lie $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Par la proposition 1.25 et la proposition 1.16, puisque $SU(2)$ est simplement connexe par la proposition 2.3, nous avons les isomorphismes suivants :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{SU(2)} & \simeq & \widehat{\mathfrak{su}(2)} \\ [\rho] & \mapsto & [T\rho] \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \widehat{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})} & \simeq & \widehat{\mathfrak{su}(2)} \\ [R] & \mapsto & [R|_{\mathfrak{su}(2)}] \end{array} .$$

La dernière affirmation du théorème 2.9 découle alors du théorème 2.5 de classification, à conjugaison près, des représentations irréductibles de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. \square

Exemples : (1) *La représentation fondamentale de $SU(2)$ est la représentation de spin $j = \frac{1}{2}$.*

En effet, rappelons que la représentation fondamentale de $SU(2)$ est l'action linéaire de $SU(2)$ sur \mathbb{C}^2 , qu'elle est irréductible car ne préservant aucune droite vectorielle de \mathbb{C}^2 , et qu'elle est de dimension $2 = 2 \times \frac{1}{2} + 1$. Elle est donc conjuguée à la représentation de spin $j = \frac{1}{2}$.

(2) *La représentation Adjointe de $SU(2)$ est la représentation de spin $j = 1$.*

En effet, la représentation Adjointe de $SU(2)$ est l'action de $SU(2)$ sur son algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ définie par

$$g \in SU(2) \mapsto \{X \in \mathfrak{su}(2) \mapsto gXg^{-1}\} .$$

Elle est irréductible car ne préservant aucune droite vectorielle de $\mathfrak{su}(2)$: en effet, son image $\text{Ad}(SU(2))$ agit sur $\mathfrak{su}(2)$, muni de la base $(2\xi_1, 2\xi_2, 2\xi_3)$, comme $SO(3)$ (voir la partie 2.2), et le groupe $SO(3)$ ne laisse invariante aucune droite vectorielle de \mathbb{R}^3 . Elle est de dimension $3 = 2 \times 1 + 1$. Elle est donc conjuguée à la représentation de spin $j = 1$.

Le corollaire suivant donne un théorème de structure, à conjugaison près, pour toutes les représentations (linéaires, de dimension finie) du groupe de Lie $SU(2)$.

Corollaire 2.10. *Toute représentation (linéaire, de dimension finie) du groupe de Lie $SU(2)$ est conjuguée à une représentation somme directe de copies de représentations $(\mathcal{V}^j, \mathcal{D}^j)$ pour $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$.*

Ainsi, si (V, ρ) est une représentation de $SU(2)$, il existe une suite finie $(j_p)_{1 \leq p \leq k}$ de demi-entiers positifs (ou nuls) tels que

$$\rho \sim \bigoplus_{1 \leq p \leq k} \mathcal{D}^{j_p} ,$$

où \sim désigne l'équivalence des représentations de groupes de Lie. Les physiciens utilisent aussi la notation

$$\rho = \bigoplus_{j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}} m_j \mathcal{D}^j$$

où $m_j = \text{Card}\{p \in \{1, \dots, k\} : j_p = j\}$ est un entier positif (ou nul), nul sauf pour un nombre fini de demi-entiers j , appelé la *multiplicité dans ρ* de la représentation irréductible \mathcal{D}^j .

Démonstration. Ceci découle de la proposition 1.20 qui implique que toute représentation du groupe de Lie $\text{SU}(2)$ est complètement réductible, et du théorème 2.9 de classification des représentations irréductibles de $\text{SU}(2)$. \square

Représentations irréductibles du groupe de Lie $\text{SO}(3)$

La classification (à conjugaison près) des représentations irréductibles du groupe de Lie $\text{SO}(3)$ se déduit très facilement de celle pour $\text{SU}(2)$.

Notons $\phi : \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$ le morphisme de groupes de Lie surjectif de noyau $\{\pm \text{id}\}$ construit dans la partie 2.2. Si $\sigma : \text{SO}(3) \rightarrow \text{GL}(V)$ est une représentation du groupe de Lie $\text{SO}(3)$, alors $\sigma \circ \phi : \text{SU}(2) \rightarrow \text{GL}(V)$ est une représentation du groupe de Lie $\text{SU}(2)$. Réciproquement, si $\rho : \text{SU}(2) \rightarrow \text{GL}(V)$ est une représentation du groupe de Lie $\text{SU}(2)$, alors ρ définit une représentation $\underline{\rho} : \text{SO}(3) \rightarrow \text{GL}(V)$ du groupe de Lie $\text{SO}(3)$ telle que $\rho = \underline{\rho} \circ \phi$ si et seulement si

$$\rho(-\text{id}) = \rho(\text{id}) .$$

Cette condition est vérifiée par la représentation $(\mathcal{V}^j, \mathcal{D}^j)$ de $\text{SU}(2)$ si et seulement si le demi-entier j est un entier. En effet, un polynôme homogène en deux variables z_1, z_2 est invariant par $(z_1, z_2) \mapsto (-z_1, -z_2)$ si et seulement s'il est de degré pair, et \mathcal{V}^j est l'espace des polynômes homogènes en ces deux variables de degré $2j$. Puisque la condition d'irréductibilité et la conjugaison se lisent sur les représentations tangentes des algèbres de Lie,⁷⁴ et puisque les algèbres de Lie $\mathfrak{so}(3)$ et $\mathfrak{su}(2)$ sont isomorphes,⁷⁵ nous avons donc le résultat suivant.

Corollaire 2.11. *Toute représentation irréductible de $\text{SO}(3)$ est conjuguée à une et une seule des représentations $(\mathcal{V}^j, \mathcal{D}^j)$ pour $j \in \mathbb{N}$ un entier positif (ou nul).* \square

En particulier, à conjugaison près, il y a une et une seule représentation irréductible de $\text{SO}(3)$ en chaque dimension impaire (et aucune en dimension paire).

Le corollaire suivant, qui se démontre comme le corollaire 2.10, donne un théorème de structure, à conjugaison près, pour toutes les représentations (linéaires, de dimension finie) du groupe de Lie $\text{SO}(3)$.

Corollaire 2.12. *Toute représentation du groupe de Lie $\text{SO}(3)$ est conjuguée à une représentation somme directe de copies de représentations $(\mathcal{V}^j, \mathcal{D}^j)$ pour $j \in \mathbb{N}$.* \square

Ainsi, avec les conventions d'écriture précédentes, si (V, ρ) est une représentation de $\text{SO}(3)$, il existe une suite finie $(j_p)_{1 \leq p \leq k}$ dans \mathbb{N} telle que

$$\rho \sim \bigoplus_{1 \leq p \leq k} \mathcal{D}^{j_p} = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} m_j \mathcal{D}^j$$

74. Voir la proposition 1.22, sachant que $\text{SO}(3)$ et $\text{SU}(2)$ sont connexes.

75. Voir la partie 2.1.

où $m_j = \text{Card}\{p \in \{1, \dots, k\} : j_p = j\} \in \mathbb{N}$ est nul sauf pour un nombre fini d'entiers j , appelé la *multiplicité dans ρ* de la représentation irréductible $\underline{\mathcal{D}}^j$.

2.4 Décomposition de Clebsch-Gordan

Le produit tensoriel $\rho \otimes \rho'$ de deux représentations irréductibles ρ et ρ' d'un groupe de Lie matriciel G n'est pas forcément irréductible. Si la représentation $\rho \otimes \rho'$ est complètement réductible (par exemple si G est compact par la proposition 1.20), alors sa décomposition en somme directe de représentations irréductibles est appelée la *décomposition de Clebsch-Gordan* de ce produit tensoriel.

Le résultat suivant donne la décomposition de Clebsch-Gordan des produits tensoriels de deux représentations irréductibles de $\text{SU}(2)$.

Théorème 2.13. *Pour tous les $j_1, j_2 \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, nous avons*

$$\mathcal{D}^{j_1} \otimes \mathcal{D}^{j_2} \simeq \bigoplus_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \mathcal{D}^J = \mathcal{D}^{|j_1-j_2|} \oplus \mathcal{D}^{|j_1-j_2|+1} \oplus \dots \oplus \mathcal{D}^{j_1+j_2-1} \oplus \mathcal{D}^{j_1+j_2} .$$

En particulier, si $j_1 \neq 0$ et $j_2 \neq 0$, alors la représentation $\mathcal{D}^{j_1} \otimes \mathcal{D}^{j_2}$ de $\text{SU}(2)$ n'est pas irréductible.

Les physiciens notent la base $(|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle)_{m_1, m_2}$ de l'espace vectoriel complexe $\mathcal{V}^{j_1} \otimes \mathcal{V}^{j_2}$, où les indices m_1 et m_2 vérifient $m_1 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $-j_1 \leq m_1 \leq j_1$, $j_1 + m_1 \in \mathbb{N}$ et de même $m_2 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $-j_2 \leq m_2 \leq j_2$, $j_2 + m_2 \in \mathbb{N}$, formée des tenseurs purs des éléments des bases canoniques de \mathcal{V}^{j_1} et \mathcal{V}^{j_2} , qu'ils appellent les *états couplés*, de la manière suivante :

$$|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle .$$

Dans la décomposition de Clebsch-Gordan donnée par le théorème ci-dessus, ces vecteurs s'expriment donc comme combinaisons linéaires (à coefficients a priori complexes) des vecteurs des bases canoniques

$$(|J, M\rangle)_{M \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, -J \leq M \leq J, J+M \in \mathbb{N}}$$

des \mathcal{V}^J pour $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$, que les physiciens appellent les *états découplés*. Ils notent aussi $|J, M\rangle = |(j_1, j_2)J, M\rangle$ pour préciser de quel produit tensoriel il s'agit. Nous avons donc une écriture comme combinaison linéaire

$$|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{M=-J}^J \langle (j_1, j_2)J, M | j_1, m_1; j_2, m_2 \rangle |(j_1, j_2)J, M\rangle ,$$

où les indices variables J et M de ces deux sommes sont des éléments de $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, tels que $j_1 + j_2 + J \in \mathbb{N}$ et $J + M \in \mathbb{N}$, variant de 1 en 1 entre les deux bornes indiquées et où les coefficients $\langle (j_1, j_2)J, M | j_1, m_1; j_2, m_2 \rangle \in \mathbb{C}$ sont appelés les *coefficients de Clebsch-Gordan*. On considère aussi les *symboles 3-j* définis par

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1-j_2-m_3}}{\sqrt{2j_3+1}} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | (j_1, j_2)j_3, -m_3 \rangle ,$$

où les coefficients $\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | (j_1, j_2) j_3, -m_3 \rangle$ sont les coefficients de la matrice de passage de la base des états découplés à la base des états couplés :

$$|(j_1, j_2) J, M\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | (j_1, j_2) j_3, -m_3 \rangle |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle ,$$

avec la même convention de sommation que ci-dessus (les indices m_1, m_2 sont des éléments de $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, tels que $j_1 + m_1 \in \mathbb{N}$ et $j_2 + m_2 \in \mathbb{N}$, variant de 1 en 1 entre les deux bornes indiquées).

Démonstration du théorème 2.13. Nous profitons de cette démonstration pour introduire un outil important pour étudier les représentations de groupes, la notion de caractère.

Si V est un espace vectoriel complexe de dimension finie, et si $A \in \text{GL}(V)$, nous noterons $\text{tr } A$, et appellerons *trace* de A , la trace de la matrice de A dans n'importe quelle base de V , ce qui ne dépend pas de cette base, puisque $\text{tr}(PXP^{-1}) = \text{tr } X$ pour tous les $X, P \in \text{GL}_N(\mathbb{C})$.

Si G est un groupe de Lie matriciel et si (V, ρ) est une représentation de G , nous appellerons *caractère* de (V, ρ) l'application $\chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall g \in G, \quad \chi_\rho(g) = \text{tr}(\rho(g)) .$$

Remarquons que χ_ρ est une application de classe C^∞ , par composition de telles applications. Notons que par la propriété ci-dessus de la trace, la valeur de $\chi_\rho(g)$ ne dépend que de la classe de conjugaison de g dans G : pour tous les $g, h \in G$, nous avons

$$\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g) .$$

En particulier, si $G = \text{SU}(2)$, comme tout élément de $\text{SU}(2)$ est diagonalisable, ayant deux valeurs propres de module 1 inverses l'une de l'autre, le caractère χ_ρ est déterminé par la valeur de $\chi_\rho\left(\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}\right)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (modulo $2\pi\mathbb{Z}$). Par la même propriété d'invariance par conjugaison de la trace, si (V, ρ) et (V', ρ') sont deux représentations conjuguées de G , alors

$$\chi_\rho = \chi_{\rho'} .$$

Nous regroupons dans l'énoncé suivant les propriétés élémentaires des caractères.

Proposition 2.14. *Soient $(V, \rho), (V', \rho')$ deux représentations d'un groupe de Lie matriciel G .*

- (1) *La dimension de la représentation ρ est égale à $\chi_\rho(e)$.*
- (2) *Le caractère de la représentation somme directe (respectivement produit tensoriel) de ρ et ρ' est la somme (respectivement produit) des caractères de ρ et ρ' :*

$$\chi_{\rho \oplus \rho'} = \chi_\rho + \chi_{\rho'} \quad \text{et} \quad \chi_{\rho \otimes \rho'} = \chi_\rho \chi_{\rho'} .$$

- (3) *Si G est compact, deux représentations de G sont conjuguées si et seulement si elles ont même caractère.*

Démonstration. (1) Puisque $\rho(e)$ est l'identité de V , ceci découle du fait que la trace de la matrice identité dans $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ est égale à N .

(2) La première affirmation découle du fait que la trace d'une matrice diagonale par blocs est la somme des traces de ses blocs.

Montrons la seconde affirmation. Si $(e_i)_{1 \leq i \leq M}$ et $(f_k)_{1 \leq k \leq N}$ sont des bases de V et V' , alors $(e_i \otimes f_k)_{1 \leq i \leq M, 1 \leq k \leq N}$ est une base de $V \otimes V'$. Fixons $g \in G$. Soient $(a_i^j)_{1 \leq i, j \leq M}$ et $(b_\ell^k)_{1 \leq k, \ell \leq N}$ les matrices de $\rho(g)$ et $\rho'(g)$ dans les bases $(e_i)_{1 \leq i \leq M}$ et $(f_k)_{1 \leq k \leq N}$. Alors le coefficient de $e_j \otimes f_\ell$ dans

$$\rho \otimes \rho'(g)(e_i \otimes f_k) = (\rho(g)(e_i)) \otimes (\rho'(g)(f_k)) = (a_i^j e_j) \otimes (b_k^\ell f_\ell) = a_i^j b_k^\ell e_j \otimes f_\ell .$$

est $a_i^j b_k^\ell$. Donc en calculant la trace de $\rho \otimes \rho'$ dans la base $(e_i \otimes f_k)_{1 \leq i \leq M, 1 \leq k \leq N}$, nous avons

$$\chi_{\rho \otimes \rho'}(g) = a_i^i b_k^k = \chi_\rho(g) \chi_{\rho'}(g) .$$

(3) Nous admettrons cette affirmation, voir par exemple [Kna, §4.2]. L'idée est que la multiplicité $m_{\rho'}(\rho)$ d'une représentation irréductible donnée ρ , dans la décomposition d'une représentation ρ' de G en somme directe $\rho' = \bigoplus_{\rho} m_{\rho'}(\rho) \rho$, où ρ parcourt un ensemble de représentants des classes d'équivalences de représentations irréductibles de G , s'exprime par une formule explicite uniquement en fonction des caractères de ρ et de ρ' (voir [KS, page 58]). Comme ces multiplicités déterminent ρ' à conjugaison près, le résultat en découle. \square

Calculons le caractère de la représentation irréductible $(\mathcal{V}^j, \mathcal{D}^j)$ de $\mathrm{SU}(2)$ pour $j \in \frac{1}{2} \mathbb{N}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, posons

$$\chi_j(t) = \chi_{\mathcal{D}^j} \left(\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \right) ,$$

de sorte que pour tout $g \in \mathrm{SU}(2)$, nous avons $\chi_{\mathcal{D}^j}(g) = \chi_j(\arcsin \frac{\mathrm{tr} g}{2})$. Dans la base $(z_1^{j+m} z_2^{j-m})_{m \in \frac{1}{2} \mathbb{Z} : -j \leq m \leq j, j+m \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{V}_j , la matrice $\mathcal{D}^j \left(\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \right)$ est diagonale, de coefficients diagonaux $(e^{2imt})_{m \in \frac{1}{2} \mathbb{Z} : -j \leq m \leq j, j+m \in \mathbb{N}}$. Donc (dans les sommes ci-dessous, les indices sont des demi-entiers variant de 1 en 1 entre les deux bornes indiquées)

$$\chi_j(t) = \sum_{m=-j}^j e^{2imt} .$$

Montrons que pour tous les $j_1, j_2 \in \frac{1}{2} \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\chi_{j_1}(t) \chi_{j_2}(t) = \sum_{J=|j_2-j_1|}^{j_1+j_2} \chi_J(t) . \quad (41)$$

Ceci démontre que pour tout $g \in \mathrm{SU}(2)$, nous avons

$$\chi_{\mathcal{D}^{j_1}}(g) \chi_{\mathcal{D}^{j_2}}(g) = \sum_{J=|j_2-j_1|}^{j_1+j_2} \chi_{\mathcal{D}^J}(g) .$$

Par la proposition 2.14 (2), ceci montre que les représentations $\mathcal{D}_{j_1} \otimes \mathcal{D}_{j_2}$ et $\bigoplus_{J=|j_2-j_1|}^{j_1+j_2} \mathcal{D}_J$ du groupe de Lie compact $SU(2)$ ont les mêmes caractères. Par la proposition 2.14 (3), ces deux représentations sont donc conjuguées, ce qui démontre le théorème 2.13.

Pour démontrer la formule (41), nous pouvons par symétrie supposer que $j_2 \leq j_1$. Posons $z = e^{2it}$, et supposons que $z \neq 1$. Alors un argument élémentaire de série géométrique montre que

$$\chi_j(t) = \frac{z^{j+1} - z^{-j}}{z - 1}.$$

Donc, en posant $m = j_2 - k$ dans la première somme de la deuxième ligne et $m = k - j_2$ dans la seconde somme de la deuxième ligne pour obtenir la troisième égalité, et en utilisant le fait que $j_1 + j_2 - k \geq 0$ si $j_2 \leq j_1$ et $k \leq 2j_2$ pour obtenir la dernière égalité, nous avons

$$\begin{aligned} \chi_{j_1}(t)\chi_{j_2}(t) &= \frac{z^{j_1+1} - z^{-j_1}}{z - 1} \sum_{m=-j_2}^{j_2} z^m \\ &= \frac{1}{z - 1} \left(\sum_{m=-j_2}^{j_2} z^{j_1+m+1} - \sum_{m=-j_2}^{j_2} z^{m-j_1} \right) \\ &= \frac{1}{z - 1} \left(\sum_{k=0}^{2j_2} z^{j_1+j_2-k+1} - \sum_{k=0}^{2j_2} z^{-j_1-j_2+k} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{2j_2} \frac{z^{j_1+j_2-k+1} - z^{-j_1-j_2+k}}{z - 1} = \sum_{k=0}^{2j_2} \chi_{j_1+j_2-k}(t). \end{aligned}$$

Ceci démontre la formule (41) si $t \notin \pi\mathbb{Z}$. Par continuité, cette formule (41) est vraie pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui démontre le résultat. \square

Application physique

Comme évoqué en préambule, le groupe $SU(2)$ apparaît aussi en physique des particules par une symétrie appelée la *symétrie d'isospin*,⁷⁶ à ne pas confondre avec la notion de spin de ces particules. Comme initialement remarqué par Heisenberg, certaines particules soumises aux interactions fortes présentent des propriétés semblables tout en ayant des charges électriques différentes. C'est le cas par exemple

- du doublet de nucléons (le proton p de masse environ $938,27 \text{ MeV}/c^2$ et de charge $+|e| = 1,602176565 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, et le neutron n de masse environ $939,56 \text{ MeV}/c^2$ et de charge nulle),
- du triplet de pions (le pion π^0 de masse environ $134,97 \text{ MeV}/c^2$ et de charge nulle, et les pions π^\pm de masse environ $139,57 \text{ MeV}/c^2$ et de charge $\pm|e|$), et
- du quadruplet de baryons Delta, tous de masse environ $1232 \text{ MeV}/c^2$, et de charges $2|e|$, $|e|$, 0 , $-|e|$ pour Δ^{++} , Δ^+ , Δ^0 , Δ^- .

Les physiciens expliquent cela par le fait que l'hamiltonien de l'interaction forte admet une symétrie par le groupe $SU(2)$, brisée par l'interaction électromagnétique, et que les particules sujettes à l'interaction forte peuvent être décrites par les vecteurs de base $|jm\rangle$ des divers espaces de représentations irréductibles de spin j de $SU(2)$. Ils introduisent

76. La terminologie dérive de la terminologie "isotopic spin" (spin isotopique) introduite par E. Wigner en 1936, voir [Wig].

deux nombres quantiques, l'*isospin total* I si la représentation est $(\mathcal{Y}^I, \mathcal{D}^J)$ et l'*isospin projection* I_3 (aussi noté I_z) si la particule correspond au vecteur de base $|II_3\rangle$, c'est-à-dire si la fonction d'onde de la particule est un vecteur propre de valeur propre I_3 pour l'opérateur J_3 .

Voici un tableau d'isospins :

famille	particule	I	I_3
nucléon	proton $p = uud$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
nucléon	neutron $n = udd$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
pion	$\pi^- = d\bar{u}$	1	-1
pion	π^0	1	0
pion	$\pi^+ = u\bar{d}$	1	1
baryon Delta	$\Delta^- = ddd$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$
baryon Delta	$\Delta^0 = udd$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
baryon Delta	$\Delta^+ = uud$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
baryon Delta	$\Delta^{++} = uuu$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$

L'isospin projection I_3 est relié aux nombres de quarks composant les particules par la formule suivante :

$$I_3 = \frac{1}{2}((n_u - n_{\bar{u}}) - (n_d - n_{\bar{d}}))$$

où n_u , n_d , $n_{\bar{u}}$ et $n_{\bar{d}}$ sont respectivement le nombre de quarks haut, quarks bas, antiquarks haut et antiquarks bas composant la particule.

Les physiciens notent parfois directement par le spin j la représentation \mathcal{D}^j de spin j de $SU(2)$. Ainsi les décompositions de Clebsch-Gordan des produits tensoriels de représentation de petits spins de $SU(2)$ sont les suivantes :

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \otimes 1 = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2}.$$

On dit que la représentation $\frac{1}{2} \otimes 1$ *contient* les représentations de spin $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$. La matrice de passage de la base des états couplés

$$(|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1, -1\rangle, |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1, 0\rangle, |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1, 1\rangle, |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, -1\rangle, |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 0\rangle, |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1\rangle)$$

de l'espace vectoriel de la représentation $\frac{1}{2} \otimes 1$ à la base des états découplés

$$(|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, |\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle, |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle, |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle)$$

de l'espace vectoriel de la représentation $\frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2}$, fournie par les coefficients de Clebsch-Gordan, est (voir par exemple [Zub1, page 18])

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les processus de transformation virtuels d'un nucléon en un nucléon plus un pion et réciproquement se comprennent par le fait que la représentation $\frac{1}{2} \otimes 1$ contient la représentation de spin $\frac{1}{2}$. Ainsi les phénomènes de cohésion des noyaux par échange de pions entre nucléons, dont est responsable l'interaction forte, se comprennent par des passages continuels entre états couplés et états découplés.

3 Les groupes de Lorentz et de Poincaré

Dans ce chapitre (pour lequel nous renvoyons aux références [Nab, Del, Gou]), nous noterons

$$(e_0 = (1, 0, 0, 0), \quad e_1 = (0, 1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 0, 1))$$

la base canonique de \mathbb{R}^4 et (toujours avec la convention de sommation d'Einstein)

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = x^\mu e_\mu$$

un élément générique de \mathbb{R}^4 , appelé par les physiciens un *quadrivecteur*⁷⁷ (ou parfois *4-vecteur*). Les indices en lettres grecques μ et ν varient entre 0 et 3. Les physiciens appellent x^0 la *coordonnée de temps* et x^1, x^2, x^3 les *coordonnées d'espace*. C'est en effet pour pouvoir manipuler des grandeurs ayant même dimensionnalité qu'ils posent

$$x^0 = c t$$

où t est le temps (en secondes) et $c \approx 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$ la vitesse de la lumière dans le vide, et sorte que les quatre quantités x^0, x^1, x^2, x^3 sont mesurées en mètres.

3.1 L'espace-temps de la relativité restreinte

Nous appellerons *espace-temps de Minkowski*,⁷⁸ et noterons $\mathbb{R}^{1,3}$, l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 ou son espace affine associé, muni de la forme bilinéaire $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dont la matrice $(g_{\mu,\nu})_{0 \leq \mu, \nu \leq 3}$ dans la base canonique est la *matrice de Minkowski*⁷⁹

$$I_{1,3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_3 \end{pmatrix},$$

la seconde écriture étant une matrice par blocs 1-3 dans la décomposition $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, avec I_3 la matrice 3×3 identité. Ainsi g est symétrique (c'est-à-dire que sa matrice est symétrique), non dégénérée (c'est-à-dire que sa matrice est inversible), de signature (1, 3) ou $(-, +, +, +)$ (c'est-à-dire que les valeurs propres de sa matrice (qui sont réelles non nulles car cette matrice est diagonalisable sur \mathbb{R} et inversible) sont, à permutation près, de signes $-, +, +, +$). Cette forme bilinéaire est appelée la *forme lorentzienne standard*⁸⁰ sur \mathbb{R}^4 , ou le *tenseur métrique* de l'espace-temps de Minkowski. Pour tous les $x, y \in \mathbb{R}^{1,3}$, nous noterons⁸¹

$$x \cdot y = g(x, y)$$

(parfois appelé un *scalaire de Lorentz*). Ainsi

$$x \cdot y = -x^0 y^0 + x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3$$

77. terminologie sans doute introduite par Sommerfeld [Som]

78. Il est appelé espace pseudo-euclidien standard de signature (1, 3) dans la partie 1.1.

79. En fait, Minkowski considérait la matrice opposée, voir [Min], et il introduisit comme postulat que la quantité $c dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$ devait rester positive lors du mouvement dans l'espace-temps : la vitesse d'un objet ne peut dépasser la vitesse de la lumière.

80. D'autres références choisissent la signature $(+, -, -, -)$, mais ce choix n'a pas grande importance.

81. Attention à ne pas confondre cette notation avec celle du produit scalaire euclidien usuel de \mathbb{R}^4 .

et en particulier $e_\mu \cdot e_\nu = g_{\mu,\nu}$.

La forme quadratique $x \mapsto g(x, x)$ associée à g est

$$x \cdot x = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 .$$

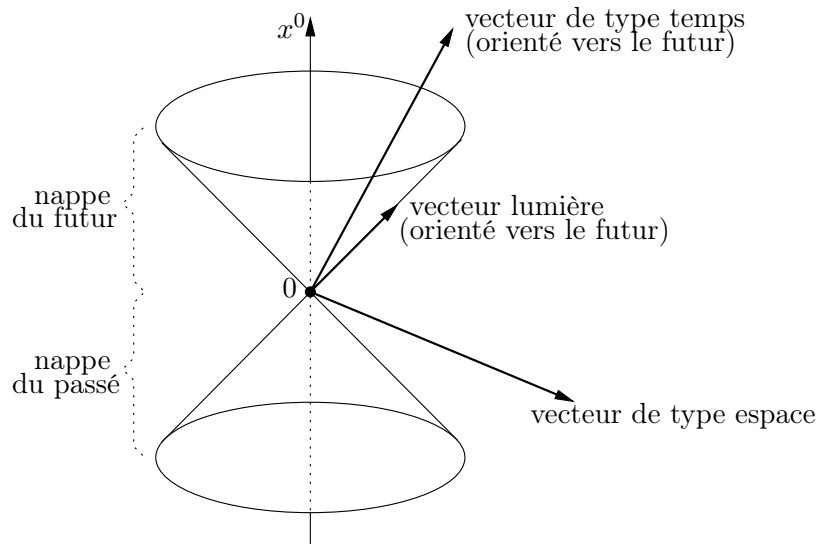
Avec une terminologie introduite a priori par Minkowski (voir par exemple [Min]), un vecteur $x \in \mathbb{R}^{1,3}$ est dit

- (1) *de type temps* si $x \cdot x < 0$,
- (2) *de type espace* si $x \cdot x > 0$, et nous noterons alors

$$\|x\|_{1,3} = \sqrt{x \cdot x} ,$$

- (3) *de type lumière* (ou tout simplement *lumière*⁸²) si $x \cdot x = 0$.

Un vecteur x de $\mathbb{R}^{1,3}$ de type lumière non nul ou de type temps est dit *orienté vers le futur* si sa coordonnée de temps x^0 est strictement positive, et *orienté vers le passé* sinon. Remarquons que les vecteurs orthogonaux à eux-mêmes dans l'espace-temps de Minkowski (qui n'est pas un espace euclidien!) sont exactement les vecteurs lumières.



Le *cône de lumière*⁸³ (vectoriel) de $\mathbb{R}^{1,3}$ est l'ensemble des vecteurs de type lumière. Privé du vecteur nul, il est réunion de la *nappe du passé*

$$\{x \in \mathbb{R}^{1,3} : x \cdot x = 0, x^0 < 0\}$$

et de la *nappe du futur*

$$\{x \in \mathbb{R}^{1,3} : x \cdot x = 0, x^0 > 0\} .$$

L'espace $\mathbb{R}^{1,3}$ privé du cône de lumière possède exactement trois composantes connexes, celle des vecteurs de type espace, celle des vecteurs de type temps orientés vers le futur (à l'intérieur de la nappe du futur) et celle des vecteurs de type temps orientés vers le passé (à l'intérieur de la nappe du passé).

82. Les mathématiciens disent aussi *isotropes*.

83. Les mathématiciens disent aussi *cône isotrope*.

Exercice E.3. (1) Montrer que tout multiple strictement positif d'un vecteur de type temps orienté vers le futur et toute somme de vecteurs de type temps orientés vers le futur est encore un vecteur de type temps orienté vers le futur. Montrer que tout multiple strictement positif d'un vecteur de type lumière orienté vers le futur est encore un vecteur de type lumière orienté vers le futur.

(2) Montrer que deux vecteurs non colinéaires x et y de type lumière (respectivement deux vecteurs x et y de type temps) sont dans la même nappe (respectivement à l'intérieur de la même nappe) si et seulement si $x \cdot y < 0$.

Un vecteur de $\mathbb{R}^{1,3}$ est dit *unitaire* si $|x \cdot x| = 1$. L'ensemble des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^{1,3}$ est la réunion de l'*hyperboloïde à une nappe*

$$\{x \in \mathbb{R}^{1,3} : x \cdot x = 1\}$$

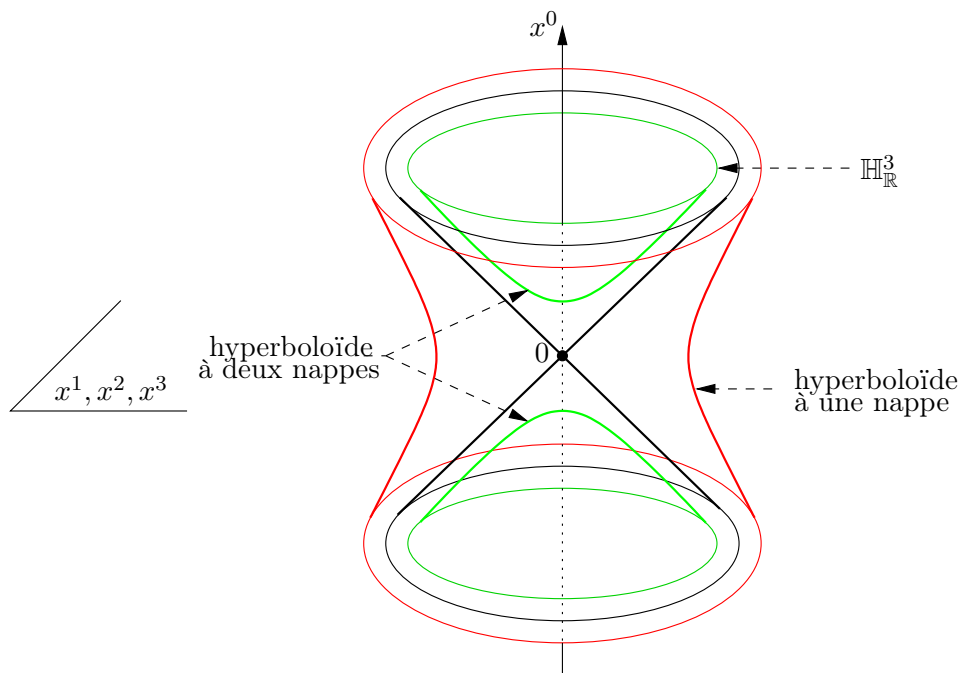
(formé des vecteurs unitaires de type espace), et de l'*hyperboloïde à deux nappes*

$$\{x \in \mathbb{R}^{1,3} : x \cdot x = -1\}$$

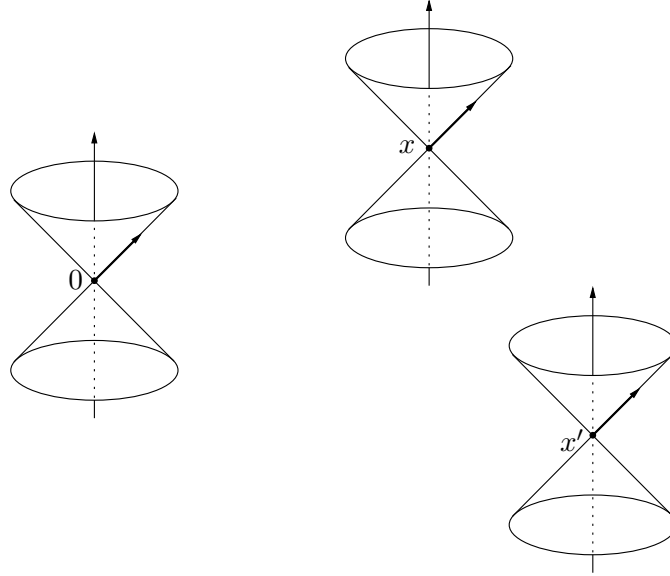
(formé des vecteurs unitaires de type temps). Ces hyperboloïdes sont des sous-variétés de dimension 3 de \mathbb{R}^4 , en utilisant le critère des fonctions implicites (proposition 1.4). L'hyperboloïde à deux nappes possède deux composantes connexes. Celle constituée des vecteurs unitaires de type temps orientés vers le futur est appelée l'*espace hyperbolique* réel de dimension 3, et notée

$$\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3 = \{x \in \mathbb{R}^{1,3} : x \cdot x = -1, x^0 > 0\}.$$

Les traits gras du dessin ci-dessous représentent l'intersection des hyperboloïdes et du cône de lumière avec n'importe quel hyperplan vectoriel de \mathbb{R}^4 contenant l'axe des coordonnées de temps x^0 .



Le *cône de lumière* (affine) d'un point x de $\mathbb{R}^{1,3}$ est l'ensemble des points y de $\mathbb{R}^{1,3}$ tels que le vecteur $\vec{xy} = y - x$ appartienne au cône de lumière vectoriel de $\mathbb{R}^{1,3}$.



Deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^{1,3}$ sont dit *orthogonaux* si $x \cdot y = 0$. Le lecteur prendra bien garde à ne pas confondre les notions d'orthogonalité dans l'espace euclidien \mathbb{R}^4 et celle dans l'espace-temps de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$. L'*orthogonal* d'un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^{1,3}$ est le sous-espace vectoriel

$$E^{\perp 1,3} = \{x \in \mathbb{R}^{1,3} : \forall y \in E, x \cdot y = 0\}$$

formé des vecteurs de $\mathbb{R}^{1,3}$ orthogonaux à tous les vecteurs de E .

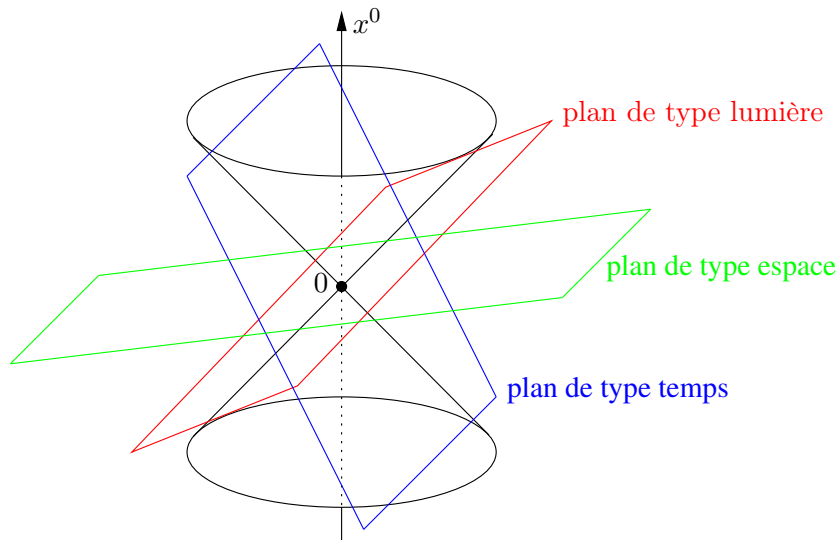
Un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^{1,3}$ propre (c'est-à-dire différent de $\{0\}$ et $\mathbb{R}^{1,3}$) est dit

- (1) *de type espace* si la restriction de g à E est définie positive (donc de signature $(+)$, $(+, +)$ ou $(+, +, +)$ si E est de dimension $1, 2, 3$), ou de manière équivalente si tous ses vecteurs non nuls sont de type espace,
- (2) *de type lumière* si la restriction de g à E est dégénérée⁸⁴ (donc de signature (0) , $(0, +)$ ou $(0, +, +)$ si E est de dimension $1, 2, 3$), ou de manière équivalente s'il est tangent au cône de lumière,⁸⁵
- (3) *de type temps* si la restriction de g à E est non dégénérée et non définie positive (donc de signature $(-)$, $(-, +)$ ou $(-, +, +)$ si E est de dimension $1, 2, 3$), ou de manière équivalente s'il contient au moins un vecteur de type temps.

En particulier, une droite vectorielle de $\mathbb{R}^{1,3}$ est de type espace, lumière ou temps si et seulement si n'importe lequel de ses vecteurs directeurs est de type espace, lumière ou temps. Par exemple, l'intersection d'un plan de type temps avec le cône de lumière est la réunion de deux droites distinctes de type lumière.

84. c'est-à-dire s'il existe un vecteur non nul de E qui est orthogonal à tous les vecteurs de E

85. En effet, si $v \in E$ non nul est orthogonal à tous les éléments de E , alors v est un vecteur lumière non nul, donc E n'est pas contenu dans l'hyperplan horizontal $\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_3$, donc l'intersection $E \cap (\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_3)$, qui est un sous-espace vectoriel de type espace, est un supplémentaire dans E de la droite vectorielle $\mathbb{R}v$, qui peut être de dimension $0, 1$ ou 2 .



Proposition 3.1. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{1,3}$.

- (1) Nous avons $\dim E^{\perp_{1,3}} = 4 - \dim E$.
- (2) L'espace vectoriel $\mathbb{R}^{1,3}$ est somme directe de E et de $E^{\perp_{1,3}}$ si et seulement si E n'est pas de type lumière.

Démonstration. (1) L'application⁸⁶ de l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 dans son espace vectoriel dual $(\mathbb{R}^4)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^4; \mathbb{R})$ (dont les éléments sont les formes linéaires sur \mathbb{R}^4) définie par

$$x \mapsto \{ \tilde{x} : y \mapsto x \cdot y \}$$

est un isomorphisme linéaire, car elle est clairement linéaire, les espaces vectoriels de départ et d'arrivée ont la même dimension, et elle est injective (car la forme lorentzienne g est non dégénérée). Donc si $(f_i)_{1 \leq i \leq k}$ est une base de E , alors les formes linéaires \tilde{f}_i pour $1 \leq i \leq k$ sont linéairement indépendantes, donc l'intersection des hyperplans $\ker \tilde{f}_i$ pour $1 \leq i \leq k$ est de dimension égale à $4 - k = 4 - \dim E$. Or cette intersection est exactement $E^{\perp_{1,3}}$, par linéarité.

(2) La somme des dimensions de E et de $E^{\perp_{1,3}}$ est égale à la dimension de $\mathbb{R}^{1,3}$ par l'assertion précédente, et E est de type lumière si et seulement si l'intersection $E \cap E^{\perp_{1,3}}$ n'est pas réduite à $\{0\}$. \square

Exercice E.4. Montrer que tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^{1,3}$ orthogonal à un vecteur de type temps est un vecteur de type espace.

Par l'exercice précédent, l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel de type temps est un sous-espace vectoriel supplémentaire de type espace.

3.2 Le groupe de Lorentz restreint $SO_0(1, 3)$

Le *groupe de Lorentz*⁸⁷, noté \mathcal{L} , est le groupe des transformations de l'espace-temps de Minkowski, c'est-à-dire le groupe des bijections linéaires Λ de l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 qui

86. appelée application de dualité lorentzienne

87. Cette terminologie semble avoir été introduite par H. Poincaré dans [Poi], même s'il considère en fait le groupe engendré par le groupe de Lorentz et les homothéties $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \mapsto \ell x = (\ell x^0, \ell x^1, \ell x^2, \ell x^3)$ pour $\ell > 0$.

préservent la forme lorentzienne g , c'est-à-dire telles que

$$g(\Lambda x, \Lambda y) = g(x, y)$$

pour tous les $x, y \in \mathbb{R}^{1,3}$.

Ses éléments sont appelés les *transformations de Lorentz*. Elles préservent le cône de lumière, l'hyperboloïde à une nappe et l'hyperboloïde à deux nappes (qui sont les images réciproques de $\{0\}$, $\{+1\}$, $\{-1\}$ respectivement par l'application $x \mapsto g(x, x) = x \cdot x$). Elles préservent le type des vecteurs : si $\Lambda \in \mathcal{L}$ et si $x \in \mathbb{R}^{1,3}$ est un vecteur de type temps (respectivement espace, lumière), alors $\Lambda(x)$ est aussi de type temps (respectivement espace, lumière). Elles préservent de même le type des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{1,3}$.

En identifiant une bijection linéaire de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^4 avec sa matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^4 , le groupe de Lorentz est donc le groupe $O(1, 3)$ (qui est un groupe de Lie classique déjà défini dans la partie 1.1). Il est constitué des matrices $\Lambda = (\Lambda_\nu^\mu)_{0 \leq \mu, \nu \leq 3}$ telles que

$${}^t \Lambda I_{1,3} \Lambda = I_{1,3} \quad \text{ou encore} \quad \Lambda_\mu^\alpha g_{\alpha, \beta} \Lambda_\nu^\beta = g_{\mu, \nu} \quad (42)$$

(toujours avec la convention de sommation d'Einstein) pour tous les $\mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Si $\Lambda \in O(1, 3)$, alors la formule (42) montre que $(\det \Lambda)^2 = 1$,⁸⁸ donc $\det \Lambda = \pm 1$, et aussi⁸⁹

$$-(\Lambda_0^0)^2 + (\Lambda_0^1)^2 + (\Lambda_0^2)^2 + (\Lambda_0^3)^2 = -1 .$$

Donc $(\Lambda_0^0)^2 \geq 1$, c'est-à-dire $\Lambda_0^0 \geq 1$ ou $\Lambda_0^0 \leq -1$. Les quatre possibilités pour les signes de $\det \Lambda$ et de Λ_0^0 correspondent aux quatre composantes connexes de $O(1, 3)$ (voir le corollaire 1.9).

Le groupe

$$SO(1, 3) = \{\Lambda \in O(1, 3) : \det \Lambda = 1\}$$

est appelé le groupe des *transformations de Lorentz propres*. Il possède deux composantes connexes. Le groupe

$$SO_0(1, 3) = \{\Lambda \in O(1, 3) : \det \Lambda = 1, \Lambda_0^0 \geq 1\} ,$$

qui est la composante connexe de l'identité dans $O(1, 3)$ et dans $SO(1, 3)$, ainsi que le sous-groupe de \mathcal{L} correspondant noté \mathcal{L}_+^\uparrow , est appelé le groupe des *transformations de Lorentz propres orthochrones* (et parfois *groupe de Lorentz restreint*) : ce sont les transformations de Lorentz qui préservent l'orientation globale de l'espace-temps de Minkowski et qui envoient un vecteur de type temps orienté vers le futur sur un vecteur de type temps orienté vers le futur. En particulier, les transformations de Lorentz propres orthochrones préservent chacune des deux nappes de l'hyperboloïde à deux nappes : le groupe $SO_0(1, 3)$ préserve l'espace hyperbolique $\mathbb{H}_\mathbb{R}^3$.

88. En effet, $(\det \Lambda)^2 \det(I_{1,3}) = \det({}^t \Lambda I_{1,3} \Lambda) = \det(I_{1,3}) \neq 0$.

89. par l'égalité des coefficients en haut à gauche dans les matrices ${}^t \Lambda I_{1,3} \Lambda$ et $I_{1,3}$, car la première ligne de ${}^t \Lambda$ est la première colonne de Λ , et la première colonne de $I_{1,3} \Lambda$ est la première colonne de Λ avec signe opposé de son premier terme

Remarque 3.2. Si $\Lambda \in \text{O}(1, 3)$ préserve un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^{1,3}$, alors il préserve aussi son orthogonal $E^{\perp_{1,3}}$.⁹⁰

$$\text{Soient } T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ qui sont des éléments de}$$

$\text{O}(1, 3)$ par la formule (42), appelés *renversement du temps* et *symétrie centrale spatiale*. Ces matrices, qui engendrent un sous-groupe d'ordre 4 de $\text{O}(1, 3)$ (isomorphe au groupe de Klein $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$), permettent de passer d'une composante connexe de $\text{O}(1, 3)$ à l'autre : nous avons (avec unions disjointes)

$$\text{SO}(1, 3) = \text{SO}_0(1, 3) \cup ST\text{SO}_0(1, 3)$$

et

$$\text{O}(1, 3) = \text{SO}_0(1, 3) \cup T\text{SO}_0(1, 3) \cup S\text{SO}_0(1, 3) \cup ST\text{SO}_0(1, 3).$$

Nous regroupons dans la proposition suivante les propriétés de transitivité des transformations de Lorentz propres orthochrones. Nous renvoyons à l'annexe A pour des rappels de définition sur la transitivité d'une action de groupe.

Appelons *base de Lorentz* de $\mathbb{R}^{1,3}$ toute base (e'_0, e'_1, e'_2, e'_3) de l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 telle que $e'_\mu \cdot e'_\nu = g_{\mu,\nu}$ pour tous les $\mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$. Par exemple, par la définition de l'espace-temps de Minkowski, la base canonique (e_0, e_1, e_2, e_3) de \mathbb{R}^4 est une base de Lorentz de $\mathbb{R}^{1,3}$. Une base de Lorentz est *orientée* si son déterminant dans la base canonique de $\mathbb{R}^{1,3}$ est positif.

Proposition 3.3. (1) *Le groupe $\text{O}(1, 3)$ agit transitivement sur les bases de Lorentz de $\mathbb{R}^{1,3}$, et le groupe $\text{SO}(1, 3)$ agit transitivement sur les bases de Lorentz orientées de $\mathbb{R}^{1,3}$.*

(2) *Le groupe $\text{SO}(1, 3)$ agit transitivement sur les vecteurs unitaires de type temps. Le groupe $\text{SO}_0(1, 3)$ agit transitivement sur l'espace hyperbolique $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ (c'est-à-dire sur les vecteurs unitaires de type temps orientés vers le futur), ainsi que sur les vecteurs unitaires de type espace.*

Démonstration. (1) Soit (e'_0, e'_1, e'_2, e'_3) une base de Lorentz de $\mathbb{R}^{1,3}$. Notons Λ la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^4 à la base (e'_0, e'_1, e'_2, e'_3) . Alors pour tous les entiers $\mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$, nous avons

$$g(\Lambda e_\mu, \Lambda e_\nu) = g(e'_\mu, e'_\nu) = g(e_\mu, e_\nu).$$

Par bilinéarité, nous avons donc $g(\Lambda x, \Lambda y) = g(x, y)$ pour tous les $x, y \in \mathbb{R}^{1,3}$. Par conséquent $\Lambda \in \text{O}(1, 3)$. Si la base (e'_0, e'_1, e'_2, e'_3) est de plus orientée, alors le déterminant de Λ est positif, donc égal à 1, car nous avons vu que le déterminant d'un élément de $\text{O}(1, 3)$ est ± 1 .

⁹⁰. Ceci signifie que si $\Lambda(E) \subset E$, alors $\Lambda(E^{\perp_{1,3}}) \subset E^{\perp_{1,3}}$. Pour démontrer ceci, si $\Lambda \in \text{O}(1, 3)$ préserve E , alors $\Lambda(E) = E$ par égalité des dimensions car Λ est une bijection linéaire, et pour tous les $y \in E^{\perp_{1,3}}$, nous avons, pour tous les $x \in E$,

$$(\Lambda y) \cdot x = (\Lambda y) \cdot (\Lambda \Lambda^{-1} x) = y \cdot (\Lambda^{-1} x) = 0$$

car $\Lambda^{-1} x \in E$.

(2) Soit e'_0 un vecteur unitaire de type temps. Alors l'orthogonal E de la droite vectorielle $\mathbb{R}e'_0$ qu'il engendre est un sous-espace vectoriel de type espace, donc admet une base orthonormée (e'_1, e'_2, e'_3) pour la restriction de g à E (qui est un produit scalaire euclidien sur E). Ainsi (e'_0, e'_1, e'_2, e'_3) est une base de Lorentz de $\mathbb{R}^{1,3}$, qui est orientée quitte à remplacer e'_3 par $-e'_3$. Par l'assertion (1), il existe $\Lambda \in \text{SO}(1, 3)$ tel que $\Lambda e'_\mu = e_\mu$ pour tout $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$, et en particulier $\Lambda e'_0 = e_0$. Si e'_0 est orienté vers le futur, alors $\Lambda_0^0 > 0$, donc $\Lambda \in \text{SO}_0(1, 3)$.

Si e'_3 est un vecteur unitaire de type espace, alors la restriction de g à l'orthogonal E de la droite $\mathbb{R}e'_3$ qu'il engendre est de signature $(-, +, +)$. Par le théorème de réduction des formes bilinéaires non dégénérées, E admet donc une base (e'_0, e'_1, e'_2) telle que $e'_\mu \cdot e'_\nu = g_{\mu, \nu}$ pour tous les $\mu, \nu \in \{0, 1, 2\}$. Ainsi (e'_0, e'_1, e'_2, e'_3) est une base de Lorentz de $\mathbb{R}^{1,3}$, qui est orientée quitte à remplacer e'_2 par $-e'_2$. Par l'assertion (1), il existe $\Lambda \in \text{SO}(1, 3)$ tel que $\Lambda e'_\mu = e_\mu$ pour $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$, et en particulier $\Lambda e'_3 = e_3$. Quitte à remplacer (e'_0, e'_1) par $(-e'_0, -e'_1)$ (ce qui préserve le déterminant), nous avons $\Lambda \in \text{SO}_0(1, 3)$. \square

Nous allons maintenant décrire quelques sous-groupes de Lie de $\text{SO}_0(1, 3)$ et quelques éléments typiques de $\text{SO}_0(1, 3)$.

L'application de $\text{O}(3)$ dans $\text{GL}_4(\mathbb{R})$ définie, en utilisant les matrices par blocs, par

$$A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

est un plongement de groupes de Lie, dont l'image est contenue dans $\text{O}(1, 3)$ par les formules (42). Nous identifions $\text{O}(3)$ avec son image dans $\text{O}(1, 3)$ par cette application. Notons que $\text{SO}(3)$ est alors contenu dans $\text{SO}_0(1, 3)$ par connexité.

Lemma 3.4. *Le stabilisateur de e_0 dans $\text{SO}_0(1, 3)$ est exactement $\text{SO}(3)$.*

Démonstration. Il est immédiat que $\text{SO}(3)$ fixe e_0 . Réciproquement, si $\Lambda \in \text{SO}_0(1, 3)$ fixe e_0 , alors $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & A \end{pmatrix}$ où X est une matrice ligne à 3 colonnes et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Le déterminant de A , égal au déterminant de Λ , est 1. La formule (42) s'écrit par blocs

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ {}^tX & {}^tA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_3 \end{pmatrix}.$$

Ceci donne $-X = 0$ et $-{}^tXX + {}^tAA = I_3$, donc $X = 0$ et $A \in \text{O}(3)$, d'où $A \in \text{SO}(3)$ puisque $\det A = 1$, ce qui est le résultat cherché. ⁹¹ \square

Proposition 3.5. *Pour tout $\Lambda \in \text{SO}_0(1, 3)$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) Λ fixe point par point un plan vectoriel de type temps,
- (2) Λ fixe un vecteur de type temps,
- (3) Λ est conjugué dans $\text{SO}_0(1, 3)$ à un élément de $\text{SO}(3)$,

⁹¹. Le fait que $X = 0$ découle aussi directement du fait que Λ préserve l'orthogonal de $\mathbb{R}e_0$ (voir la remarque 3.2), qui est l'espace vectoriel $\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_3$ engendré par les trois derniers vecteurs de la base canonique.

$$(4) \Lambda \text{ est conjugué dans } \text{SO}_0(1, 3) \text{ à } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Un élément Λ de $\text{SO}_0(1, 3)$ vérifiant l'une des conditions équivalentes ci-dessus est appelée une *rotation spatiale*.⁹² Le nombre réel θ est alors uniquement défini modulo 2π , et appelé l'*angle* de la rotation spatiale Λ . Par l'invariance de la trace des matrices par conjugaison, il se calcule de la manière suivante :

$$\cos \theta = \frac{\text{tr } \Lambda}{2} - 1.$$

Cette formule montre que $|\text{tr } \Lambda| \leq 4$ si Λ est une rotation spatiale, avec égalité si et seulement si Λ est l'identité.

Démonstration. Il est immédiat que (1) implique (2), que (4) implique (3), et que (4) implique (1) (car $\mathbb{R}e_0 + \mathbb{R}e_1$ est un plan vectoriel de type temps).

Montrons⁹³ que (3) implique (2) : puisque e_0 est un vecteur de type temps fixé par $\text{SO}(3)$ par le sens facile du lemme 3.4, s'il existe $\Lambda' \in \text{SO}_0(1, 3)$ tel que $\Lambda'\Lambda(\Lambda')^{-1} \in \text{SO}(3)$, alors $\Lambda'\Lambda(\Lambda')^{-1}e_0 = e_0$ donc Λ fixe le vecteur $(\Lambda')^{-1}e_0$, qui est de type temps car $\text{O}(1, 3)$ préserve le type des vecteurs.

Le fait que (3) implique (4) découle du fait que tout élément de $\text{SO}(3)$ est une rotation qui fixe point par point une droite vectorielle de \mathbb{R}^3 (son axe de rotation, voir le début de la partie 2), et que $\text{SO}(3)$ agit transitivement sur les droites vectorielles de \mathbb{R}^3 , donc (voir la formule (69) dans l'appendice A) que tout élément de $\text{SO}(3)$ est conjugué dans $\text{SO}(3)$ à un élément fixant le premier axe de coordonnée de $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_3$ pour l'action linéaire de $\text{SO}(3)$ sur \mathbb{R}^3 .

Enfin, montrons que (2) implique (3). Si $\Lambda \in \text{SO}_0(1, 3)$ fixe un vecteur de type temps v , alors quitte à remplacer v par $\pm \frac{v}{\sqrt{|v \cdot v|}}$, nous pouvons supposer que v est un vecteur unitaire de type temps orienté vers le futur. Puisque $\text{SO}_0(1, 3)$ agit transitivement sur les vecteurs unitaires de type temps orientés vers le futur (voir la proposition 3.3 (2)), il existe $\Lambda' \in \text{SO}_0(1, 3)$ tel que $\Lambda'v = e_0$. Alors $\Lambda'\Lambda(\Lambda')^{-1}$ est un élément de $\text{SO}_0(1, 3)$ qui fixe e_0 . Le résultat découle alors du lemme 3.4. \square

Proposition 3.6. *Pour tout $\Lambda \in \text{SO}_0(1, 3)$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Λ fixe point par point un plan vectoriel de type espace,

$$(2) \Lambda \text{ est conjugué dans } \text{SO}_0(1, 3) \text{ à } \begin{pmatrix} \cosh \psi & \sinh \psi & 0 & 0 \\ \sinh \psi & \cosh \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un élément Λ de $\text{SO}_0(1, 3)$ vérifiant l'une des conditions équivalentes ci-dessus est appelé une *transformation de Lorentz spéciale*.⁹⁴ Le nombre réel ψ est alors uniquement

92. Les mathématiciens disent aussi transformation *elliptique*.

93. même si ce n'est pas logiquement nécessaire, au vu des deux implications qui suivent

94. Les physiciens anglos-saxons disent "boost". Si la rapidité ψ est non nulle, les mathématiciens disent transformation *hyperbolique*.

défini, et appelé la *rapidité* de la transformation de Lorentz spéciale Λ . Par l'invariance de la trace des matrices par conjugaison, il se calcule de la manière suivante :

$$\psi = \operatorname{argcosh} \left(\frac{\operatorname{tr} \Lambda}{2} - 1 \right).$$

Cette formule montre que $\operatorname{tr} \Lambda \geq 4$ si Λ est une transformation de Lorentz spéciale, avec égalité si et seulement si Λ est l'identité.

Démonstration. Le plan vectoriel P engendré par e_2, e_3 étant de type espace, et les plans de type espace étant envoyés sur des plans de type espace par les éléments de $\operatorname{SO}_0(1, 3)$, le fait que (2) implique (1) est immédiat : si $\Lambda' \in \operatorname{SO}_0(1, 3)$ est tel que $\Lambda' \Lambda (\Lambda')^{-1}$ fixe point par point P , alors Λ fixe point par point $(\Lambda')^{-1} P$.

Réciproquement, soit P un plan vectoriel de type espace dans $\mathbb{R}^{1,3}$, fixé point par point par $\Lambda \in \operatorname{SO}_0(1, 3)$. Son orthogonal $P^{\perp 1,3}$ est un plan de type temps, car la signature de la restriction de g à $P^{\perp 1,3}$ doit être $(-, +)$. En prenant une base orthonormée (e'_2, e'_3) de P , et en la complétant par une base orthogonale (e'_0, e'_1) de $P^{\perp 1,3}$ telle que $e'_0 \cdot e'_0 = -1$ et $e'_1 \cdot e'_1 = 1$, nous obtenons une base de Lorentz (e'_0, e'_1, e'_2, e'_3) . Par la transitivité⁹⁵ de $\operatorname{O}(1, 3)$ sur les bases de Lorentz de $\mathbb{R}^{1,3}$ (et quitte à changer des signes), il existe donc un élément $\Lambda_0 \in \operatorname{SO}_0(1, 3)$ tel que $\Lambda_0 P = \mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_3$. Quitte à conjuguer Λ par Λ_0 , nous pouvons donc supposer que Λ fixe e_2 et e_3 . Par la remarque 3.2, l'orthogonal de $\mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_3$,

qui est $\mathbb{R}e_0 + \mathbb{R}e_1$, est invariant par Λ . Donc $\Lambda = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a \geq 1$ et $ad - bc = 1$

car $\Lambda \in \operatorname{SO}_0(1, 3)$. La formule (42) donne

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où $-a^2 + c^2 = -1$, $-ab + cd = 0$ et $-b^2 + d^2 = 1$. En multipliant par d la seconde équation, et en utilisant la troisième et $ad - bc = 1$, nous avons $-(1 + bc)b + c(1 + b^2) = 0$, donc $b = c$ et $a^2 - b^2 = 1$. Puisque $a \geq 0$, cette dernière équation implique qu'il existe $\psi \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cosh \psi$ et $b = \sinh \psi$. Puisque $ad - bc = 1$, nous avons $ad = 1 + b^2 = a^2$, donc $a = d$ puisque $a \neq 0$. Le résultat en découle. \square

Donnons une application en physique de la proposition 3.6, concernant le problème de changement de référentiel relativiste.

Supposons que nous passions d'un référentiel fixe de coordonnées d'espace-temps notées (x^0, x^1, x^2, x^3) à un autre référentiel mobile de coordonnées d'espace-temps notées (y^0, y^1, x^2, x^3) par une transformation de Lorentz spéciale de rapidité ϕ laissant fixe point par point le plan vectoriel de type espace $\mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_3$, de sorte que la vitesse d'un observateur en 0 dans le nouveau référentiel soit nulle. Donc y^1 est constant. Notons v la vitesse du point en mouvement dans l'ancien référentiel. Comme $y^1 = (\sinh \phi)x^0 + (\cosh \phi)x^1$, nous avons en dérivant

$$\frac{v}{c} = \frac{dx^1}{c dt} = \frac{dx^1}{dx^0} = -\tanh \phi.$$

95. Voir la proposition 3.3 (1).

Comme $|\tanh \phi| < 1$, nous avons $|v| < c$: on ne peut pas dépasser la vitesse de la lumière ! Puisque $1 - \tanh^2 \phi = \frac{1}{\cosh^2 \phi}$, nous avons donc $\cosh \phi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ et $\sinh \phi = -\frac{v}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

Nous obtenons donc

$$y^1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (-tv + x^1).$$

Lorsque la vitesse v est négligeable devant la vitesse de la lumière c , nous retrouvons le mouvement des points classiques en mouvement rectiligne uniforme de vitesse v . Mais lorsque v s'approche de c , il y a une contraction importante de la longueur d'un corps matériel en mouvement (dans la direction de ce mouvement), correspondant au *facteur de Lorentz*

$$\Gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Nous allons maintenant démontrer une proposition qui dit en particulier que le groupe des transformations de Lorentz propres orthochrones $\text{SO}_0(1, 3)$ est engendré par les rotations spatiales et par les transformations de Lorentz spéciales : tout élément de $\text{SO}_0(1, 3)$ est un produit fini de rotations spatiales et de transformations de Lorentz spéciales.

Notons \mathbf{K} l'image de $\text{SO}(3)$ dans $\text{SO}_0(1, 3)$ (appelé le *sous-groupe compact maximal (standard)* de $\text{SO}_0(1, 3)$) et

$$\mathbf{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh \psi & \sinh \psi & 0 & 0 \\ \sinh \psi & \cosh \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \psi \in \mathbb{R} \right\}$$

le sous-groupe de Lie des transformations de Lorentz spéciales fixant point par point le plan de type espace $\mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_3$, qui est appelé le *sous-groupe de Cartan (standard)* de $\text{SO}_0(1, 3)$. Il est isomorphe au groupe additif \mathbb{R} par l'application qui à un élément $\Lambda \in \mathbf{A}$ associe sa rapidité $\psi = \text{argcosh } \Lambda_0^0$.

Étant donné un groupe G et des sous-groupes A, B, C de G , nous dirons que $G = ABC$ si pour tout élément g de G , il existe des éléments $a \in A$, $b \in B$ et $c \in C$ tels que $g = abc$.

Proposition 3.7. *Soient $G = \text{SO}_0(1, 3)$ et \mathbf{A}, \mathbf{K} les sous-groupes de G définis ci-dessus, alors*

$$G = \mathbf{KAK}.$$

L'égalité $G = \mathbf{KAK}$ s'appelle la *décomposition de Cartan* de $\text{SO}_0(1, 3)$ (voir par exemple [Hel] pour une généralisation).

Démonstration. Nous avons vu dans la démonstration du corollaire 1.9 de décomposition polaire que l'application

$$(\text{O}(1, 3) \cap \text{O}(4)) \times (\text{O}(1, 3) \cap \text{Sym}_4^+) \rightarrow \text{O}(1, 3)$$

définie par $(X, Y) \mapsto XY$ est un homéomorphisme, et que le groupe $\text{O}(1, 3) \cap \text{O}(4)$ est en fait égal à

$$\text{O}(1, 3) \cap \text{O}(4) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} : a \in \text{O}(1) = \{\pm 1\}, B \in \text{O}(3) \right\}.$$

Ce groupe de Lie matriciel a quatre composantes connexes, celle de l'élément neutre étant exactement l'image \mathbf{K} de $\mathrm{SO}(3)$ dans $\mathrm{O}(3)$. Rappelons que $\mathrm{O}(1,3) \cap \mathrm{Sym}_4^+$ est connexe (c'est en effet l'image de l'espace vectoriel réel $\mathfrak{so}(1,3) \cap \mathrm{Sym}_A$ par l'application continue \exp , comme vu dans la démonstration susdite). Donc l'application de $\mathbf{K} \times (G \cap \mathrm{Sym}_4^+) \rightarrow G$ définie par $(X, Y) \mapsto XY$ est un homéomorphisme. Ainsi pour montrer la décomposition de Cartan $G = \mathbf{KAK}$, il suffit de montrer que tout élément h de $G \cap \mathrm{Sym}_4^+$ est conjugué par un élément k de \mathbf{K} à un élément a de \mathbf{A} (au sens que $h = kak^{-1}$, quitte à changer k en son inverse).

Nous écrirons les matrices par blocs 1-3 dans la décomposition $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, et nous identifierons un vecteur de \mathbb{R}^3 avec son vecteur colonne. Soit donc $h = \begin{pmatrix} a & {}^t v \\ u & B \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$, $u, v \in \mathbb{R}^3$ et $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, un élément de $G \cap \mathrm{Sym}_4^+$. Par la symétrie de la matrice h , nous avons donc $v = u$ et $B \in \mathrm{Sym}_3$.

La condition d'appartenance de h à $G = \mathrm{O}(1,3)$, qui est ${}^t h I_{1,3} h = I_{1,3}$ d'après les formules (42), s'écrit donc

$$\begin{pmatrix} a & {}^t u \\ u & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & {}^t u \\ u & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_3 \end{pmatrix}.$$

Cette égalité est équivalente au système d'égalités

$$-a^2 + {}^t u u = -1, \quad -a u + B u = 0, \quad -u {}^t u + B^2 = I_3.$$

Puisque $h \in \mathrm{SO}_0(1,3)$, nous avons $a \geq 1$. La matrice symétrique $I_3 + u {}^t u$ est définie positive, donc admet une unique racine carrée définie positive $\sqrt{I_3 + u {}^t u}$ (voir l'exercice E.1 (4)). Puisque h est définie positive, B doit être définie positive. Donc le système ci-dessus équivaut à⁹⁶

$$a = \sqrt{1 + {}^t u u}, \quad B u = a u, \quad B = \sqrt{I_3 + u {}^t u}. \quad (43)$$

Pour tout $C' \in \mathrm{SO}(3)$, nous avons

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & {}^t u \\ u & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & {}^t u \\ C' u & C' B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^t C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & {}^t(C' u) \\ C' u & C' B {}^t C' \end{pmatrix}.$$

Puisque $\mathrm{SO}(3)$ agit transitivement sur les droites vectorielles de \mathbb{R}^3 , il existe $C \in \mathrm{SO}(3)$ tel que Cu appartienne à la première droite de coordonnée, donc soit de la forme $Cu = (b, 0, 0)$. En utilisant pour la première égalité le fait que $C^{-1} = {}^t C$ et l'égalité $C\sqrt{A}C^{-1} = \sqrt{CAC^{-1}}$ pour toute matrice définie positive A , la matrice $CB {}^t C$ est alors de la forme

$$\begin{aligned} CB {}^t C &= \sqrt{I_3 + Cu {}^t u {}^t C} = \sqrt{I_3 + Cu {}^t(Cu)} = \sqrt{I_3 + \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{1+b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

96. On peut montrer que l'égalité du milieu (qui dit que u est vecteur propre de B pour la valeur propre a) est conséquence des deux autres, mais nous ne nous servons pas de ce fait.

En posant $d = \sqrt{1 + b^2}$, nous avons donc montré qu'il existe un élément $k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ de \mathbf{K} tel que

$$k h k^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La démonstration de la proposition 3.6 donne qu'il existe $\psi \in \mathbb{R}$ tel que $a = d = \cosh \psi$ et $b = \sinh \psi$, donc que $k h k^{-1}$ appartient au sous-groupe de Cartan \mathbf{A} . Ceci termine la démonstration de la proposition 3.7. \square

La composition d'une transformation de Lorentz spéciale fixant point par point un plan vectoriel de type espace P et d'une rotation spatiale fixant point par point le plan vectoriel de type temps $P^{\perp 1,3}$ est appelée une *quadrivis*⁹⁷ (ou parfois 4-vis). Ce sont les éléments de $\text{SO}_0(1,3)$ conjugués à $\begin{pmatrix} \cosh \psi & \sinh \psi & 0 & 0 \\ \sinh \psi & \cosh \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, et les paramètres ψ et θ , réels et réels modulo 2π , sont appelés la *rapidité* et l'*angle* de la quadrivis, respectivement.

Exercice E.5. *Montrer qu'un élément de $\text{SO}_0(1,3)$ est une quadrivis si et seulement s'il fixe point par point deux droites vectorielles lumières distinctes.*

Proposition 3.8. *Pour tout $\Lambda \in \text{SO}_0(1,3)$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Λ fixe point par point un plan vectoriel de type lumière,

(2) Λ est conjugué dans $\text{SO}_0(1,3)$ à $R_\alpha = \begin{pmatrix} 1 + 2\alpha^2 & -2\alpha^2 & 2\alpha & 0 \\ 2\alpha^2 & 1 - 2\alpha^2 & 2\alpha & 0 \\ 2\alpha & -2\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Un élément Λ de $\text{SO}_0(1,3)$ vérifiant l'une des conditions équivalentes ci-dessus est appelée une *rotation lumière*.⁹⁸ Par l'invariance de la trace par conjugaison, notons que $\text{tr } \Lambda = 4$ si Λ est une rotation lumière.

Démonstration. Il est facile de vérifier en utilisant la formule (42) que la matrice R_α appartient à $\text{O}(1,3)$. Un petit calcul montre que son déterminant est 1. Son coefficient en haut à gauche est $(R_\alpha)_0^0 = 1 + 2\alpha^2 \geq 1$, donc R_α appartient à $\text{SO}_0(1,3)$. Elle fixe point par point le plan vectoriel $P = \mathbb{R}(e_0 + e_1) + \mathbb{R}e_3$, qui est de type lumière. Donc s'il existe $\Lambda' \in \text{SO}_0(1,3)$ tel que $\Lambda' \Lambda (\Lambda')^{-1} = R_\alpha$, alors Λ fixe point par point le plan vectoriel $(\Lambda')^{-1}P$, qui est de type lumière, car $\text{O}(1,3)$ préserve le type des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{1,3}$. Ainsi, l'assertion (2) implique l'assertion (1).

Réciproquement, supposons qu'il existe un plan vectoriel de type lumière P , qui est fixé point par point par Λ . Alors l'intersection de P avec l'hyperplan vectoriel de type espace $H = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_3$ est une droite de type espace, dont nous notons e'_3 un vecteur

97. Les mathématiciens disent aussi transformation *loxodromique*.

98. Les mathématiciens disent aussi transformation *parabolique*.

directeur unitaire. L'intersection de P et du cône de lumière est une droite de type lumière, donc un de ses vecteurs directeurs est $e_0 + e'_1$, où e'_1 est un vecteur unitaire de H , orthogonal à e'_3 . En prenant pour e'_2 un vecteur de H tel que (e'_1, e'_2, e'_3) soit une base orthonormée de H (pour la restriction de g à H), nous obtenons ainsi une base de Lorentz (e_0, e'_1, e'_2, e'_3) . Quitte à remplacer e'_2 par $-e'_2$, par la transitivité de $\text{SO}(3)$ sur les bases orthonormées directes de \mathbb{R}^3 , il existe $\Lambda' \in \text{SO}(3)$ tel que $\Lambda' e'_j = e_j$ pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$. Quitte à remplacer Λ par $\Lambda' \Lambda (\Lambda')^{-1}$, nous pouvons donc supposer que $P = \mathbb{R}(e_0 + e_1) + \mathbb{R}e_3$ est fixé point par point par Λ . Dans la base $(e_0 + e_1, e_1 - e_0, e_2, e_3)$, la matrice de la forme bilinéaire

g est $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Puisque Λ préserve l'orthogonal de $\mathbb{R}e_3$, qui est $\mathbb{R}e_0 + \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2$,

la matrice de Λ dans cette nouvelle base s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & u & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Puisque Λ appartient à

$\text{O}(1, 3)$, nous avons

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & x & u & 0 \\ b & y & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & u & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ceci équivaut à

$$\begin{pmatrix} 1 & 2x & 2y & 0 \\ 2x & 4xa + u^2 & 2ay + 2bx + uv & 0 \\ 2y & 2ay + 2bx + uv & 4by + v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où $x = 1, y = 0, v = \pm 1, u = \mp 2b$ et $a = -b^2$. La matrice de Λ (dont le déterminant est

1, ce qui force $v = 1$) dans la base $(e_0 + e_1, e_1 - e_0, e_2, e_3)$ est donc $\begin{pmatrix} 1 & -b^2 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En

posant $b = 2\alpha$, ceci démontre que la matrice de Λ dans la base canonique de \mathbb{R}^4 est R_α . \square

Nous donnerons dans la proposition 3.14 une classification modulo conjugaison des transformations de Lorentz propres orthochrones, en montrant qu'elles sont conjuguées à des quadris ou à des rotations lumières.

3.3 Le groupe de Poincaré $\text{O}(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^{1,3}$

Nous donnons dans cette partie une variante affine du groupe de transformations vectorielles $\text{O}(1, 3)$.

Le *groupe de Poincaré*, aussi appelé *groupe de Lorentz affine* (ou inhomogène), noté $\text{O}(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^{1,3}$, est le groupe des bijections affines de l'espace affine $\mathbb{R}^{1,3}$ dont la partie vectorielle est une transformation de Lorentz de $\mathbb{R}^{1,3}$. C'est donc l'ensemble des applications de la forme

$$(\Lambda, a) : x \mapsto \Lambda x + a$$

où $a \in \mathbb{R}^{1,3}$ est le *facteur de translation* et $\Lambda \in O(1,3)$ est la *partie vectorielle* de (Λ, a) . La loi de composition vérifie

$$(\Lambda, a)(\Lambda', a') = (\Lambda\Lambda', a + \Lambda a') \quad \text{et} \quad (\Lambda, a)^{-1} = (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a).$$

Le groupe de Poincaré préserve les cônes de lumière affines : pour tous les $x \in \mathbb{R}^{1,3}$ et $h \in O(1,3) \ltimes \mathbb{R}^{1,3}$, l'image par h du cône de lumière affine de x est le cône de lumière affine de $h(x)$.

Le groupe de Poincaré est bien un groupe de Lie matriciel, car il s'identifie avec un sous-groupe de Lie de $GL_5(\mathbb{R})$ par l'application

$$(\Lambda, a) \mapsto \begin{pmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(en utilisant des matrices par blocs 4-1, et en identifiant un élément de \mathbb{R}^4 avec sa matrice colonne correspondante). On vérifie que $\begin{pmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda' & a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda\Lambda' & a + \Lambda a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La composante connexe de l'élément neutre dans le groupe de Poincaré est le sous-groupe $SO_0(1,3) \ltimes \mathbb{R}^{1,3}$ de $O(1,3) \ltimes \mathbb{R}^{1,3}$ constitué des éléments (Λ, a) où $\Lambda \in SO_0(1,3)$ et $a \in \mathbb{R}^{1,3}$.

Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^{1,3}$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{1,3}$ une application de classe C^∞ . Nous dirons que f *préserve l'élément de longueur minkowskien*

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

si, en notant $(y^0, y^1, y^2, y^3) = f(x^0, x^1, x^2, x^3)$, nous avons ⁹⁹

$$g_{\alpha,\beta} dy^\alpha dy^\beta = g_{\mu,\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (44)$$

Proposition 3.9. *Toute application C^∞ d'un ouvert connexe Ω de $\mathbb{R}^{1,3}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{1,3}$, qui préserve l'élément de longueur minkowskien*

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2,$$

est la restriction à Ω d'un élément du groupe de Poincaré.

Démonstration. La formule (44) est équivalente à

$$g_{\alpha,\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu,\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

donc au système d'égalités, pour tous les $\mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$,

$$g_{\alpha,\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} = g_{\mu,\nu}. \quad (45)$$

En particulier, en notant $Jf = \left(\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} \right)_{0 \leq \beta, \nu \leq 3}$ la matrice jacobienne de f , nous avons

$$(\det I_{1,3}) (\det Jf)^2 = \det I_{1,3} \neq 0.$$

99. toujours en utilisant la convention de sommation d'Einstein

Donc la matrice jacobienne de f est inversible. En dérivant la formule (45) par rapport à x^γ , où $\gamma \in \{0, 1, 2, 3\}$, nous avons

$$g_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\gamma \partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} + g_{\alpha,\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^\gamma \partial x^\nu} = 0. \quad (46)$$

Pour tous les $\gamma, \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$, posons

$$A_{\gamma,\mu,\nu} = g_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\gamma \partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu},$$

de sorte que l'égalité (46) s'écrive, puisque la matrice de g est symétrique,

$$A_{\gamma,\mu,\nu} + A_{\gamma,\nu,\mu} = 0. \quad (47)$$

Par le lemme de Schwarz, la quantité $A_{\gamma,\mu,\nu}$ est invariante par l'échange des deux premiers indices γ et μ : nous avons $A_{\gamma,\mu,\nu} = A_{\mu,\gamma,\nu}$. En échangeant γ et μ dans l'égalité (47), nous avons donc

$$A_{\gamma,\mu,\nu} + A_{\mu,\nu,\gamma} = 0. \quad (48)$$

De même, en échangeant γ et ν dans l'égalité (47), nous avons

$$A_{\nu,\mu,\gamma} + A_{\gamma,\nu,\mu} = 0. \quad (49)$$

En ajoutant les égalités (47) et (48), et en enlevant au résultat l'égalité (49), nous avons donc $2A_{\gamma,\mu,\nu} = 0$ pour tous les $\gamma, \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$. Puisque la matrice jacobienne de f et la matrice de g sont inversibles, ceci implique que

$$\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\gamma \partial x^\mu} = 0$$

pour tous les $\alpha, \gamma, \mu \in \{0, 1, 2, 3\}$. Puisque Ω est connexe, il existe donc des constantes d'intégrations telles qu'en tout point de Ω , les applications y^0, y^1, y^2, y^3 soient des fonctions affines de x^0, x^1, x^2, x^3 : il existe une matrice $\Lambda = (\Lambda_\nu^\mu)_{0 \leq \mu, \nu \leq 3}$ dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et un quadrivecteur $a = (a^0, a^1, a^2, a^3)$ tel que pour tout $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$, nous ayons

$$y^\alpha = \Lambda_\beta^\alpha x^\beta + a^\alpha.$$

Remarquons que Λ , qui est égale à la matrice jacobienne de f , est inversible. En reportant la formule centrée ci-dessus dans la formule (45), nous en déduisons que

$$\Lambda_\mu^\alpha g_{\alpha,\beta} \Lambda_\nu^\beta = g_{\mu,\nu}$$

Ceci dit exactement que $\Lambda \in O(1, 3)$ par les formules (42). Donc f est la restriction à Ω d'un élément du groupe de Poincaré $O(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^{1,3}$. \square

3.4 L'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(1, 3)$

Par le calcul de l'algèbre de Lie effectué dans la partie 1.2 (voir le tableau (2)), l'algèbre de Lie du groupe de Lie matriciel $O(1, 3)$ (qui est aussi celle des groupes de Lie matriciels

$\text{SO}(1, 3)$ et $\text{SO}_0(1, 3)$ est

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(1, 3) &= \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : {}^t X I_{1,3} + I_{1,3} X = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c' & -b' \\ b & -c' & 0 & a' \\ c & b' & -a' & 0 \end{pmatrix} : a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned}$$

munie du crochet de Lie des matrices. Donc l'espace vectoriel $\mathfrak{so}(1, 3)$ admet pour base le sextuplet constitué des trois matrices symétriques

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et des trois matrices antisymétriques correspondant à la base canonique (η_1, η_2, η_3) (voir la formule (9)) de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$ (identifiée avec son image par $X \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{so}(1, 3)$), que nous noterons de même :

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, $\mathfrak{so}(1, 3)$ est de dimension 6 (et donc les sous-variétés $\text{O}(1, 3)$ et $\text{SO}_0(1, 3)$ sont de dimension 6, comme déjà vu dans la partie 1.1). Cette base $(K_1, K_2, K_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$, que nous appellerons *base canonique* de $\mathfrak{so}(1, 3)$, est constituée de trois générateurs infinitésimaux K_1, K_2, K_3 des transformations de Lorentz spéciales (des “boosts”) et de trois générateurs infinitésimaux η_1, η_2, η_3 de rotations spatiales. Toujours avec le même argument que ces trois dernières matrices sont anti-symétriques, les physiciens préfèrent utiliser les matrices hermitiennes suivantes (qui sont maintenant dans $i \mathfrak{so}(1, 3)$), notées comme celles de $\mathfrak{so}(3)$ (et les physiciens omettent aussi les tildes) :

$$\tilde{J}_1 = i \eta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{J}_2 = i \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{J}_3 = i \eta_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un petit calcul élémentaire montre que les relations de commutation de la base canonique $(K_1, K_2, K_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(1, 3)$ sont

$$\begin{cases} [\eta_j, \eta_k] &= \epsilon_{jk}^\ell \eta_\ell \\ [K_j, K_k] &= -\epsilon_{jk}^\ell \eta_\ell \\ [K_j, \eta_k] &= \epsilon_{jk}^\ell K_\ell \end{cases}$$

où j, k varient dans $\{1, 2, 3\}$ et $\epsilon_{j,k}^\ell$ est le tenseur totalement antisymétrique déjà défini, égal à la signature de la permutation $(j k \ell)$ si j, k, ℓ sont deux à deux distincts, et à 0 sinon. Le lecteur reconnaîtra dans les premières relations de commutation celles de la base canonique (η_1, η_2, η_3) de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$.

Les relations de commutation des matrices $(K_1, K_2, K_3, \tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \tilde{J}_3)$ sont par contre

$$\begin{cases} [\tilde{J}_j, \tilde{J}_k] &= i \epsilon_{jk}^\ell \tilde{J}_\ell \\ [K_j, K_k] &= i \epsilon_{jk}^\ell \tilde{J}_\ell \\ [K_j, \tilde{J}_k] &= i \epsilon_{jk}^\ell K_\ell. \end{cases}$$

Nous montrerons dans la partie suivante (voir le corollaire 3.12) que l'application exponentielle $\exp : \mathfrak{so}(1, 3) \rightarrow \text{SO}_0(1, 3)$ est surjective. Ainsi, tout élément Λ de $\text{SO}_0(1, 3)$ s'écrit (toujours avec la convention de sommation d'Einstein)

$$\Lambda = \exp(\psi^j K_j + \theta^k \eta_k),$$

où $\psi^1, \psi^2, \psi^3, \theta^1, \theta^2, \theta^3 \in \mathbb{R}$. Les physiciens préfèrent la notation équivalente

$$\Lambda = \exp(\vec{\psi} \cdot \vec{K} - i \vec{\theta} \cdot \vec{J}),$$

où

$$\begin{aligned} \vec{\psi} &= (\psi^1, \psi^2, \psi^3) \in \mathbb{R}^3, & \vec{\theta} &= (\theta^1, \theta^2, \theta^3) \in \mathbb{R}^3, \\ \vec{K} &= (K_1, K_2, K_3) \in \mathfrak{so}(1, 3)^3, & \vec{J} &= (\tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \tilde{J}_3) \in (i \mathfrak{so}(1, 3))^3, \end{aligned}$$

et

$$\vec{\psi} \cdot \vec{K} = \psi^j K_j, \quad \vec{\theta} \cdot \vec{J} = \theta^k \tilde{J}_k.$$

L'algèbre de Lie du groupe de Poincaré $\text{O}(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^{1,3}$ est l'espace vectoriel réel produit $\mathfrak{so}(1, 3) \times \mathbb{R}^4$ des couples (X, v) où $X \in \mathfrak{so}(1, 3)$ et $v \in \mathbb{R}^4$, muni du crochet de Lie

$$[(X, v), (X', v')] = ([X, X'], Xv' - X'v).$$

Ceci se montre facilement à partir du plongement vu ci-dessus de $\text{O}(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^{1,3}$ dans $\text{GL}_5(\mathbb{R})$: l'algèbre de Lie de l'image du plongement est $\left\{ \begin{pmatrix} X & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : X \in \mathfrak{so}(1, 3), v \in \mathbb{R}^4 \right\}$

et

$$\begin{pmatrix} X & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' & v' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X' & v' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XX' - X'X & Xv' - X'v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note aussi $\mathfrak{so}(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^4$ cette algèbre de Lie, pour ne pas la confondre avec l'algèbre de Lie produit $\mathfrak{so}(1, 3) \times \mathbb{R}^4$ de $\mathfrak{so}(1, 3)$ et de l'algèbre de Lie abélienne \mathbb{R}^4 .

Notons encore $K_1, K_2, K_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ les éléments $(K_1, 0), (K_2, 0), (K_3, 0), (\eta_1, 0), (\eta_2, 0), (\eta_3, 0)$ de cette algèbre de Lie, et introduisons

$$P_0 = (0, e_0), \quad P_1 = (0, e_1), \quad P_2 = (0, e_2), \quad P_3 = (0, e_3),$$

avec (e_0, e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^4 . Alors

$$(K_1, K_2, K_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3, P_0, P_1, P_2, P_3)$$

est une base de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré (qui est donc de dimension 10), et les relations de commutation sont, par un calcul élémentaire,

$$\left\{ \begin{array}{l} [\eta_j, \eta_k] = \epsilon_{j,k}^\ell \eta_\ell \\ [K_j, K_k] = -\epsilon_{j,k}^\ell \eta_\ell \\ [K_j, \eta_k] = \epsilon_{j,k}^\ell K_\ell \\ [P_\mu, P_\nu] = 0 \\ [\eta_j, P_k] = \epsilon_{j,k}^\ell P_\ell \\ [\eta_j, P_0] = 0 \\ [K_j, P_k] = \delta_{j,k} P_0 \\ [K_j, P_0] = P_j, \end{array} \right.$$

où j, k varient dans $\{1, 2, 3\}$ et μ, ν dans $\{0, 1, 2, 3\}$, et où $\delta_{j,k}$ est le symbole de Kronecker, égal à 1 si $j = k$ et à 0 sinon.

En particulier, le sous-espace vectoriel \mathbb{R}^4 engendré par P_0, P_1, P_2, P_3 est une sous-algèbre de Lie abélienne de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^4$ du groupe de Poincaré.

3.5 Le revêtement universel de $\mathrm{SO}_0(1, 3)$ par $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$

Rappelons que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) : \det A = 1\}$ est le groupe de Lie matriciel des matrices 2×2 de déterminant 1 à coefficient dans \mathbb{C} . Nous allons montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ joue pour $\mathrm{SO}_0(1, 3)$ un rôle analogue à celui de $\mathrm{SU}(2)$ pour $\mathrm{SO}(3)$, en construisant un revêtement à deux feuilletés de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{SO}_0(1, 3)$.

Proposition 3.10. (1) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le groupe de Lie matriciel $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est simplement connexe.*

(2) *Il existe un morphisme de groupes de Lie Φ surjectif de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{SO}_0(1, 3)$, dont le noyau est $\{\pm \mathrm{id}\}$.*

(3) *Les algèbres de Lie réelles $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ et $\mathfrak{so}(1, 3)$ sont isomorphes.*

Un tel morphisme Φ est appelé un *morphisme spinoriel* (ou application spineur), voir par exemple [Por] pour une explication.

Le sous-groupe $\{\pm \mathrm{id}\}$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est distingué (par exemple parce que c'est le noyau d'un morphisme de groupes), et nous noterons

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) / \{\pm \mathrm{id}\}$$

le groupe quotient de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ par $\{\pm \mathrm{id}\}$, où nous identifions donc deux éléments de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ si et seulement s'ils sont égaux au signe près. Le résultat précédent dit en particulier que l'application Φ induit un isomorphisme de groupes

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{SO}_0(1, 3),$$

qui est l'un des *isomorphismes exceptionnels* entre certains groupes de Lie matriciels de petite dimension, voir par exemple [Hel, Pau2].

Démonstration. (1) Par la décomposition polaire (voir le théorème 1.8), $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est homéomorphe à $\mathrm{SU}(n) \times \mathbb{R}^{n^2-1}$. Puisque le produit de deux espaces topologiques simplement connexes est encore simplement connexe, et par la proposition 1.12 (voir la proposition 2.3 si $n = 2$), $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est simplement connexe.

(2) Rappelons que $\mathrm{Herm}_2 = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) : X^* = X\}$ est le sous-espace vectoriel réel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ formé des matrices hermitiennes. Il admet pour base

$$\left(\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right),$$

où $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont les matrices de Pauli. Nous avons par conséquent un isomorphisme linéaire $\mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathrm{Herm}_2$ défini par

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) \mapsto x^\eta \sigma_\eta = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - i x^2 \\ x^1 + i x^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que

$$-\det x^\eta \sigma_\eta = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2. \quad (50)$$

Considérons l'application $\Phi' : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{Herm}_2)$ définie par

$$A \mapsto \{\Phi'(A) : X \mapsto AXA^*\}$$

Notons que $\Phi'(A)$ envoie bien Herm_2 dans Herm_2 ¹⁰⁰, que $\Phi'(A)$ est linéaire et inversible d'inverse $\Phi'(A^{-1})$. L'application Φ' , dont la source et le but sont des groupes de Lie matriciels, est de classe C^∞ (car polynomiale en les coefficients) et c'est un morphisme de groupes¹⁰¹. C'est donc un morphisme de groupes de Lie.

Notons $\Phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ l'application qui à $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ associe la matrice de $\Phi'(A)$ dans la base $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. C'est aussi un morphisme de groupes de Lie.

Puisque

$$\det(AXA^*) = |\det(A)|^2 \det X = \det X$$

pour tous les $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et $X \in \mathrm{Herm}_2$, l'application linéaire $\Phi'(A)$ préserve l'application $-\det$, et donc par la formule (50), l'image de Φ est contenue dans $\mathrm{O}(1, 3)$. Par la continuité de Φ et la connexité de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, cette image est en fait contenue dans la composante connexe de l'élément neutre $\mathrm{SO}_0(1, 3)$ de $\mathrm{O}(1, 3)$. Nous avons donc bien construit un morphisme de groupes de Lie $\Phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{SO}_0(1, 3)$.

Montrons que le noyau $\ker \Phi$ de Φ est égal à $\{\pm \mathrm{id}\}$, ou de manière équivalente que le noyau $\ker \Phi' = \ker \Phi$ de Φ' est égal à $\{\pm \mathrm{id}\}$. Soit $A \in \ker \Phi'$. Alors pour tout $X \in \mathrm{Herm}_2$, nous avons

$$AXA^* = X.$$

En prenant en particulier pour X la matrice identité, nous en déduisons que $AA^* = \mathrm{id}$, donc que A est unitaire, d'inverse égal à A^* . D'où $AX = XA$ pour tout $X \in \mathrm{Herm}_2$.

100. car $(AXA^*)^* = AX^*A^* = AXA^*$ si $X \in \mathrm{Herm}_2$

101. car pour tous les $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et $X \in \mathrm{Herm}_2$, nous avons $(AB)X(AB)^* = A(BXB^*)A^*$, donc $\Phi'(AB) = \Phi'(A) \circ \Phi'(B)$

En prenant pour X la matrice σ_3 , qui est diagonale à valeurs propres distinctes, nous en déduisons donc que A doit être diagonale. En prenant $X = \sigma_1$, nous en déduisons que les coefficients diagonaux de A sont égaux. Comme $\det A = 1$, ceci implique que $A = \pm \text{id}$. Donc $\ker \Phi \subset \{\pm \text{id}\}$ et l'inclusion réciproque étant immédiate, nous avons

$$\ker \Phi = \{\pm \text{id}\} .$$

Puisque Φ est un morphisme de groupes, par la décomposition de Cartan (voir la proposition 3.7), pour montrer que Φ est surjectif, il suffit de montrer que toute rotation spatiale appartient à l'image de Φ , et que tout élément du sous-groupe de Cartan \mathbf{A} appartient à l'image de Φ .

Il est facile de vérifier que

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} \cosh \frac{\psi}{2} & \sinh \frac{\psi}{2} \\ \sinh \frac{\psi}{2} & \cosh \frac{\psi}{2} \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad \Phi(A) = \begin{pmatrix} \cosh \psi & \sinh \psi & 0 & 0 \\ \sinh \psi & \cosh \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (51)$$

En effet, un petit calcul montre que l'application linéaire $\Phi'(A) : X \mapsto AXA^*$ envoie $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sur respectivement

$$\cosh \psi \sigma_0 + \sinh \psi \sigma_1, \quad \sinh \psi \sigma_0 + \cosh \psi \sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \sigma_3 .$$

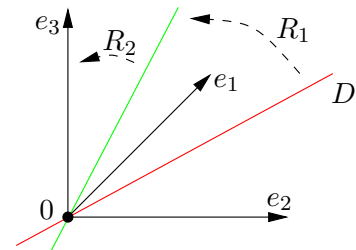
Donc \mathbf{A} est contenu dans l'image de Φ .

Puisque Φ est un morphisme de groupes et puisque toute rotation dans \mathbb{R}^3 est un produit de rotations autour des trois axes de coordonnées,¹⁰² pour montrer que toute rotation spatiale appartient à l'image de Φ , il suffit de montrer que les rotations spatiales d'axes de rotation $\mathbb{R}e_1$, $\mathbb{R}e_2$ et $\mathbb{R}e_3$ appartiennent à l'image de Φ . Or un petit calcul¹⁰³ montre que

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad \Phi(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad (52)$$

qui est la rotation spatiale d'axe $\mathbb{R}e_3$ et d'angle θ . Celle-ci appartient donc à l'image de Φ . Notons (en prenant le cas particulier $\theta = -\pi$) que l'élément $R'_3 = \Phi\left(\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\right)$ de

Si (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de \mathbb{R}^3 , et si $R \in \text{SO}(3)$, soit D l'axe de rotation de R , soit R_1 une rotation d'axe $\mathbb{R}e_1$ telle que la droite vectorielle $R_1 D$ soit contenue dans le plan vectoriel $\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_3$, et soit R_2 une rotation d'axe $\mathbb{R}e_2$ telle que $R_2 R_1 D = \mathbb{R}e_3$. Alors $R_3 = R_2 R_1 R (R_2 R_1)^{-1}$ est une rotation d'axe $\mathbb{R}e_3$, donc $R = (R_1)^{-1} (R_2)^{-1} R_3 R_2 R_1$ est un produit de rotations autour des axes de coordonnées.



103. Vérifier que l'application $X \mapsto AXA^*$ envoie $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sur respectivement $\sigma_0, \cos \theta \sigma_1 + \sin \theta \sigma_2, -\sin \theta \sigma_1 + \cos \theta \sigma_2$ et σ_3 .

$\text{SO}_0(1, 3)$ envoie $\mathbb{R}e_1$ sur $\mathbb{R}e_2$. De même, ¹⁰⁴

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \text{ alors } \Phi(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (53)$$

qui est la rotation spatiale d'axe $\mathbb{R}e_1$ et d'angle θ . Celle-ci appartient donc à l'image de Φ . Remarquons que la matrice A dans les deux formules centrées ci-dessus est même un élément de $\text{SU}(2)$. On peut en fait vérifier que $\Phi(\text{SU}(2))$ est contenu dans le sous-groupe $\text{SO}(3)$ de $\text{SO}_0(1, 3)$ car il fixe σ_0 , et que la restriction de Φ à $\text{SU}(2)$ coïncide avec le morphisme $\phi : \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$ construit dans la proposition 2.4.

Enfin, si R'_2 est n'importe quelle rotation spatiale d'axe $\mathbb{R}e_2$, alors $(R'_3)^{-1} \circ R'_2 \circ R'_3$ est une rotation spatiale d'axe $\mathbb{R}e_1$, donc appartient à l'image de Φ . Puisque R'_3 appartient aussi à l'image de Φ et puisque Φ est un morphisme de groupes, nous avons donc que R'_2 appartient à l'image de Φ . Ceci conclut la démonstration de l'assertion (2) de la proposition 3.10.

(3) L'application tangente $T_{\text{id}}\Phi : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathfrak{so}(1, 3)$ du morphisme de groupes de Lie Φ en l'élément neutre est un isomorphisme d'algèbres de Lie réelles entre les algèbres de Lie de $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ et $\text{SO}_0(1, 3)$. En effet, c'est un morphisme d'algèbres de Lie par la proposition 1.13 (3). Si ce morphisme n'est pas injectif, alors par la formule (5), le noyau de Φ contiendrait l'image d'un sous-groupe à un paramètre $t \mapsto \exp(tX)$ pour X un élément non nul de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, donc ce noyau serait infini, ce qui contredit l'assertion (2) de la proposition 3.10. Les deux espaces vectoriels réels $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ et $\mathfrak{so}(1, 3)$ ont dimension 6. Donc l'application linéaire $T_{\text{id}}\Phi$, qui est injective entre espaces vectoriels réels de même dimension (finie), est bijective.

Ceci conclut la démonstration de la proposition 3.10. \square

Remarque. Il est facile de vérifier que l'application de $\text{Herm}_2 \times \text{Herm}_2$ dans \mathbb{R} définie par

$$(X, Y) \mapsto \frac{1}{2} \text{tr}(XY^*) = \frac{1}{2} \text{tr}(XY)$$

est un produit scalaire euclidien sur Herm_2 (nous avons $\text{tr}(XX^*) = \sum_{\mu, \nu=0}^3 |X_{\nu}^{\mu}|^2$), rendant la base $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ orthonormée.

Proposition 3.11. (1) Si $X = x^{\mu} \sigma_{\mu}$, alors $x^{\mu} = \frac{1}{2} \text{tr}(X \sigma_{\mu})$.

(2) Pour tout $A \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$, si $\Lambda = \Phi(A)$ est l'image de A par le morphisme spinoriel Φ , alors pour tous les $\mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$, nous avons

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \frac{1}{2} \text{tr}(A \sigma_{\nu} A^* \sigma_{\mu}).$$

Démonstration. (1) Nous avons, en utilisant la linéarité de la trace et le fait que la base $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ est orthonormée pour le produit scalaire ci-dessus,

$$\text{tr}(X \sigma_{\mu}) = \text{tr}(x^{\nu} \sigma_{\nu} \sigma_{\mu}) = x^{\nu} \text{tr}(\sigma_{\nu} \sigma_{\mu}) = 2 x^{\mu}.$$

104. Vérifier que l'application $X \mapsto AXA^*$ envoie maintenant $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sur respectivement $\sigma_0, \sigma_1 \cos \theta \sigma_2 + \sin \theta \sigma_3$ et $-\sin \theta \sigma_2 + \cos \theta \sigma_3$.

(2) Pour tout $X = x^\mu \sigma_\mu \in \text{Herm}_2$, notons $Y = AXA^* = y^\mu \sigma_\mu$. Alors par la définition de Φ , nous avons

$$y^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu .$$

Or par l'assertion (1) et la linéarité de la trace, nous avons

$$y^\mu = \frac{1}{2} \text{tr}(Y \sigma_\mu) = \frac{1}{2} \text{tr}(A x^\nu \sigma_\nu A^* \sigma_\mu) = \frac{1}{2} \text{tr}(A \sigma_\nu A^* \sigma_\mu) x^\nu .$$

Le résultat en découle par identification. \square

Une conséquence importante de la proposition 3.10, que nous donnons dans le corollaire 3.12, est la surjectivité annoncée dans la partie 3.4 de l'application exponentielle $\exp : \mathfrak{so}(1, 3) \rightarrow \text{SO}_0(1, 3)$. On peut montrer plus généralement que l'application exponentielle $\exp : \mathfrak{so}(1, n) \rightarrow \text{SO}_0(1, n)$ est surjective, voir par exemple [Nis, Rie].

Corollaire 3.12. *L'application exponentielle $\exp : \mathfrak{so}(1, 3) \rightarrow \text{SO}_0(1, 3)$ du groupe de Lie matriciel $\text{SO}_0(1, 3)$ est surjective.*

Démonstration. Le lemme suivant dit que par contre l'application exponentielle $\exp : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{C})$ n'est pas surjective, mais que sa composition avec la projection canonique $\text{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{C}) = \text{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm \text{id}\}$ est surjective, ce qui suffira pour notre propos.

Lemma 3.13. *L'image de $\exp : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{C})$ est l'ensemble des éléments $A \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ tels qu'il n'existe pas de matrice nilpotente N (vérifiant $N^2 = 0$) non nulle telle que $A = -I_2 + N$. En particulier, pour tout $A \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$, nous avons $A \in \exp(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ ou $-A \in \exp(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$.*

Démonstration. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, notons ω (qui dépend de x, y, z) une des deux racines carrées complexes de $x^2 + yz$, de sorte que

$$\det X = -x^2 - yz = -\omega^2 .$$

Nous prolongeons par continuité la fonction $t \mapsto \frac{\sinh t}{t}$ définie sur $\mathbb{C} - \{0\}$, en lui donnant la valeur limite 1 en $t = 0$. Par le théorème de Cayley-Hamilton

$$X^2 - (\text{tr } X)X + (\det X)I_2 = 0$$

(ou tout simplement en calculant le carré de X), nous avons

$$X^2 = \omega^2 I_2 .$$

Donc $X^{2n} = \omega^{2n} I_2$ et $X^{2n+1} = \omega^{2n} X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En développant les séries, nous avons donc

$$\exp X = (\cosh \omega) I_2 + \frac{\sinh \omega}{\omega} X = \begin{pmatrix} \cosh \omega + \frac{\sinh \omega}{\omega} x & \frac{\sinh \omega}{\omega} y \\ \frac{\sinh \omega}{\omega} z & \cosh \omega - \frac{\sinh \omega}{\omega} x \end{pmatrix} .$$

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ tel que $A + I_2$ ne soit pas nilpotente, et montrons que A appartient à l'image de $\exp : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{C})$.

Par la formule centrée précédente, nous avons $A = \exp X$ si et seulement si

$$\cosh \omega = \frac{a+d}{2}, \quad \frac{\sinh \omega}{\omega} x = \frac{a-d}{2}, \quad \frac{\sinh \omega}{\omega} y = b, \quad \frac{\sinh \omega}{\omega} z = c.$$

Rappelons que $\cosh : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est surjective¹⁰⁵ et que $\sinh \omega = -\sin(i\omega)$ est nul si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega = i\pi n$. En particulier, $\frac{\sinh \omega}{\omega}$ est nul si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ tel que $\omega = i\pi n$. Fixons donc $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\cosh \omega = \frac{a+d}{2}$.

Supposons tout d'abord que $\omega \notin i\pi\mathbb{Z} - \{0\}$. Posons alors

$$x = \frac{\omega}{\sinh \omega} \frac{a-d}{2}, \quad y = \frac{\omega}{\sinh \omega} b, \quad z = \frac{\omega}{\sinh \omega} c.$$

Pour montrer que $A = \exp X$, il suffit donc de montrer que $\omega^2 = x^2 + yz$. Or, en utilisant le fait que $bc = ad - 1$, nous avons

$$\begin{aligned} x^2 + yz &= \frac{\omega^2(a-d)^2}{4 \sinh^2 \omega} + \frac{\omega^2 bc}{\sinh^2 \omega} = \frac{\omega^2((a-d)^2 + 4(ad-1))}{4 \sinh^2 \omega} \\ &= \frac{\omega^2((a+d)^2 - 4)}{4 \sinh^2 \omega} = \frac{\omega^2(\cosh^2 \omega - 1)}{\sinh^2 \omega} = \omega^2. \end{aligned}$$

Supposons au contraire qu'il existe un élément $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ tel que $\omega = i\pi n$. En particulier $\cosh \omega = (-1)^n$, donc $\text{tr } A = a+d = 2(-1)^n$. Si λ_1, λ_2 sont les valeurs propres (complexes) de A , alors $\lambda_1 \lambda_2 = \det A = 1$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr } A = 2(-1)^n$, ce qui implique que $\lambda_1 = \lambda_2 = (-1)^n$.

Si n est pair, alors la matrice $N = A - I_2$ est nilpotente. En effet, ses deux valeurs propres sont égales à 0, donc elle appartient à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et vérifie (par trigonalisation) $N^2 = 0$. D'où

$$\exp N = I_2 + N = A,$$

et A appartient bien à l'image de $\exp : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{C})$.

Si n est impair, alors un raisonnement analogue montre que $N = A + I_2$ est nilpotente. Par l'hypothèse sur A , ceci implique que $A = -I_2$, qui est dans l'image de l'application $\exp : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{C})$ car $\exp \begin{pmatrix} i\pi & 0 \\ 0 & -i\pi \end{pmatrix} = -I_2$.

Réciproquement, soit $A \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ tel que $N = A + I_2$ soit nilpotente non nulle, montrons par l'absurde que A n'appartient pas à l'image de $\exp : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{C})$. En effet, supposons au contraire qu'il existe $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ tel que $\exp X = A$. Puisque $N \neq 0$, la matrice $A = -I_2 + N$ n'est pas diagonalisable, donc X n'est pas diagonalisable (sinon $A = \exp X$ le serait), donc les valeurs propres de X sont égales, et elles sont nulles car $\text{tr } X = 0$. Par trigonalisation, les valeurs propres de $A = \exp X$ sont donc égales à $e^0 = 1$, une contradiction car les valeurs propres de A sont toutes deux égales à -1 . \square

Pour démontrer la surjectivité de $\exp : \mathfrak{so}(1,3) \rightarrow \text{SO}_0(1,3)$, nous allons utiliser ce lemme et la commutativité du diagramme suivant, où Φ est le morphisme spinoriel donné

105. pour tout $a \in \mathbb{C}$, l'équation $\frac{e^z + e^{-z}}{2} = a$ admet une solution $z \in \mathbb{C}$ si et seulement si l'équation quadratique $X^2 - 2aX + 1 = 0$ (obtenue en posant $X = e^z$) a une solution non nulle, or $X = a + \sqrt{a^2 - 1}$ est une telle solution.

par la proposition 3.10 (2),

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) & \xrightarrow{T_{\text{id}}\Phi} & \mathfrak{so}(1,3) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ \text{SL}_2(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\Phi} & \text{SO}_0(1,3), \end{array}$$

c'est-à-dire l'égalité $\Phi \circ \exp = \exp \circ T_{\text{id}}\Phi$ vue dans la proposition 1.13 (3).

En effet, soit $A \in \text{SO}_0(1,3)$. Par la surjectivité de Φ (voir la proposition 3.10 (2)), soit $B \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ tel que $\Phi(B) = A$. Par le lemme 3.13, il existe $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tels que $\exp X = \varepsilon B$. Mais alors, puisque le noyau du morphisme de groupes Φ contient $\{\pm \text{id}\}$ par la proposition 3.10 (2), nous avons

$$\exp(T_{\text{id}}\Phi(X)) = \Phi(\exp X) = \Phi(\varepsilon B) = \Phi(B) = A.$$

Ceci démontre le résultat. \square

Proposition 3.14. *Toute transformation de Lorentz propre orthochrone est conjuguée ou bien à une quadris de rapidité non nulle, ou bien à une rotation spatiale d'angle non nul ou bien à une rotation lumière.*

Toute transformation de Lorentz propre orthochrone préserve au moins une droite de type lumière. Elle est conjuguée à une rotation lumière de paramètre α non nul si et seulement si elle préserve exactement une droite de type lumière. Elle est conjuguée à une quadris de rapidité non nulle ou d'angle non nul si et seulement si elle préserve exactement deux droites de type lumière distinctes. Elle vaut l'identité si et seulement si elle préserve au moins trois droites de type lumière deux à deux distinctes.

Démonstration. Puisque tout élément de $\text{SO}_0(1,3)$ appartient à l'image du morphisme de groupes spinoriel $\Phi : \text{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{SO}_0(1,3)$, nous allons commencer par classer à conjugaison près les éléments de $\text{SL}_2(\mathbb{C})$.

Lemma 3.15. *Tout élément A de $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ est conjugué dans $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ ou bien à $A_{\psi,\theta} = \begin{pmatrix} \cosh(\frac{\psi-i\theta}{2}) & \sinh(\frac{\psi-i\theta}{2}) \\ \sinh(\frac{\psi-i\theta}{2}) & \cosh(\frac{\psi-i\theta}{2}) \end{pmatrix}$ avec $\psi > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, ou bien à $A_\theta = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$, ou bien à $A'_\alpha = \pm \begin{pmatrix} 1+i\alpha & -i\alpha \\ i\alpha & 1-i\alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Soient $A \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ et λ_1, λ_2 les valeurs propres complexes de A . Nous pouvons supposer que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$. Puisque $\det A = 1$, nous avons $\lambda_2 = \lambda_1^{-1}$. Trois cas sont possibles.

Cas 1 : $|\lambda_1| > |\lambda_2|$.

Alors A , qui est à valeurs propres complexes distinctes, est conjuguée à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1^{-1} \end{pmatrix}$. Puisque $|\lambda_1| = \frac{1}{|\lambda_2|}$, nous avons $|\lambda_1| > 1$. Donc il existe $\psi > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que si $z = \frac{\psi-i\theta}{2}$, alors $\lambda_1 = e^z$. Il est facile de vérifier que $A_{\psi,\theta}$ admet aussi pour valeurs propres $e^{\pm z}$. Donc A est conjuguée (dans $\text{GL}_2(\mathbb{C})$, donc dans $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ en divisant par une racine carrée complexe du déterminant) à $A_{\psi,\theta}$.

Cas 2 : $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Alors A est encore conjuguée à $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1^{-1} \end{pmatrix}$. Comme maintenant $|\lambda_1| = 1$, nous pouvons écrire $\lambda_1 = e^{-i\frac{\theta}{2}}$ avec $\theta \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$ car si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\lambda_1 = \pm 1 = \lambda_2$, ce qui est exclu. Donc A est conjuguée (dans $\text{GL}_2(\mathbb{C})$, donc dans $\text{SL}_2(\mathbb{C})$) à A_θ .

Cas 3 : $\lambda_1 = \lambda_2$.

Alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$, et quitte à remplacer A par $-A$, nous pouvons supposer que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Par trigonalisation, A est alors conjuguée à $\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $z \in \mathbb{C}$. Or pour tout $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$, nous avons $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc A est conjuguée à $I_2 = A'_0$ si $z = 0$ et à $\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sinon (en prenant pour λ une racine carrée complexe de $\frac{2i}{z}$). Comme A'_1 s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $(e_1 + e_2, e_1 - e_2)$ où (e_1, e_2) est la base canonique de \mathbb{C}^2 , la matrice A est conjuguée (dans $\text{GL}_2(\mathbb{C})$, donc dans $\text{SL}_2(\mathbb{C})$) à A'_0 ou à A'_1 . \square

Remarquons¹⁰⁶ que

$$\Phi(A'_\alpha) = \begin{pmatrix} 1 + 2\alpha^2 & -2\alpha^2 & 2\alpha & 0 \\ 2\alpha^2 & 1 - 2\alpha^2 & 2\alpha & 0 \\ 2\alpha & -2\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (54)$$

qui est la rotation lumière R_α . Remarquons aussi qu'en utilisant les formules

$$\begin{aligned} \cos u &= \cosh(iu), & \sin u &= -i \sinh(iu), \\ \cosh(u - v) &= \cosh u \cosh v - \sinh u \sinh v, & \sinh(u - v) &= \sinh u \cosh v - \cosh u \sinh v, \end{aligned}$$

nous avons

$$A_{\psi, \theta} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \frac{\psi}{2} & \sinh \frac{\psi}{2} \\ \sinh \frac{\psi}{2} & \cosh \frac{\psi}{2} \end{pmatrix}.$$

Donc par les formules (51) et (53), et puisque Φ est un morphisme de groupes, nous avons

$$\Phi(A_{\psi, \theta}) = \begin{pmatrix} \cosh \psi & \sinh \psi & 0 & 0 \\ \sinh \psi & \cosh \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Maintenant, comme $\Phi(\pm A) = \Phi(A)$ et puisque Φ est un morphisme de groupes, le lemme 3.15 montre que tout élément de $\text{SO}_0(1, 3)$ est conjugué ou bien à $\Phi(A_{\psi, \theta})$ avec $\psi > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ qui est par la formule (55) une quadris de rapidité non nulle, ou bien à $\Phi(A_\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$ qui est par la formule (52) une rotation spatiale d'angle non nul, ou bien à $\Phi(A'_\alpha)$ qui par la formule (54) est une rotation lumière. Ceci montre la première affirmation de la proposition 3.14.

106. Un petit calcul montre que si $A = A'_\alpha$, alors l'application $X \mapsto AXA^*$ envoie $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ respectivement sur $(1 + 2\alpha^2)\sigma_0 + 2\alpha^2\sigma_1 + 2\alpha\sigma_2, -2\alpha^2\sigma_0 + (1 - 2\alpha^2)\sigma_1 - 2\alpha\sigma_2, 2\alpha\sigma_0 + 2\alpha\sigma_1 + \sigma_2$, et σ_3 .

Remarquons que

- si $\psi \neq 0$, alors $\Phi(A_{\psi,\theta})$ préserve exactement deux droites de type lumière, $\mathbb{R}(e_0 + e_1)$ et $\mathbb{R}(e_0 - e_1)$;
- si $\psi = 0$ et $\theta \neq 0$, alors $\Phi(A_{\psi,\theta})$ préserve exactement deux droites de type lumière, $\mathbb{R}(e_0 + e_1)$ et $\mathbb{R}(e_0 - e_1)$;
- si $\alpha \neq 0$, alors $\Phi(A'_\alpha)$ préserve exactement une droite de type lumière $\mathbb{R}(e_0 + e_1)$.

Puisque $\text{SO}_0(1, 3)$ préserve les droites de type lumière, puisque tout élément de $\text{SO}_0(1, 3)$ différent de l'identité est conjugué à $\Phi(A'_\alpha)$ avec $\alpha \neq 0$ ou à $\Phi(A_{\psi,\theta})$ avec $\psi \neq 0$ ou $\theta \neq 0$ par la première affirmation, et par l'équation (69) dans l'appendice A, ceci montre les autres affirmations de la proposition 3.14. \square

3.6 Représentations du groupe de Lorentz

Le but de cette partie est de classer (à conjugaison près) les représentations irréductibles du groupe de Lie $\text{SO}_0(1, 3)$. Nous nous ramènerons, en utilisant en particulier le corollaire 1.24, à classer les représentations irréductibles de son algèbre de Lie $\mathfrak{so}(1, 3)$. Par la proposition 1.16, il revient au même de classer les représentations irréductibles de l'algèbre de Lie complexifiée $\mathfrak{so}(1, 3)^\mathbb{C}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(1, 3)$.

Puisque les algèbres de Lie réelles $\mathfrak{so}(1, 3)$ et $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^\mathbb{R}$ sont isomorphes par la proposition 3.10 (3), le calcul de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(1, 3)^\mathbb{C}$ est donné par le résultat suivant, en prenant $n = 2$.

Lemma 3.16. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre de Lie complexifiée de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})^\mathbb{R}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie complexe produit $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.*

Démonstration. Par définition (voir l'exemple (7) de la partie 1.2), l'algèbre de Lie complexe $(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})^\mathbb{R})^\mathbb{C}$ est l'espace vectoriel réel produit $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})^\mathbb{R} \times \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})^\mathbb{R}$ muni d'une part de l'unique structure d'espace vectoriel complexe (étendant sa structure d'espace vectoriel réel) telle que la multiplication externe par i de (X, Y) soit

$$i \cdot (X, Y) = (-Y, X), \quad (56)$$

et d'autre part du crochet de Lie

$$[(X, Y), (X', Y')] = ([X, X'] - [Y, Y'], [Y, X'] + [X, Y']). \quad (57)$$

Par contre, l'algèbre de Lie complexe produit $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ est l'espace vectoriel réel produit $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})^\mathbb{R} \times \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})^\mathbb{R}$ muni d'une part de l'unique structure d'espace vectoriel complexe telle que la multiplication externe par i de (X, Y) soit

$$i(X, Y) = (iX, iY), \quad (58)$$

et d'autre part du crochet de Lie

$$[(X, Y), (X', Y')] = ([X, X'], [Y, Y']). \quad (59)$$

Rappelons que la matrice conjuguée d'une matrice complexe $X = (X_k^j)_{1 \leq j, k \leq N}$ dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ est la matrice complexe $\overline{X} = (\overline{X_k^j})_{1 \leq j, k \leq N}$ dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de X . L'application $X \mapsto \overline{X}$ est \mathbb{R} -linéaire, involutive et

préserve le sous-espace vectoriel $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ des matrices complexes de trace nulle. L'application $\Theta : \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})^{\mathbb{R}} \times \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})^{\mathbb{R}} \times \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ définie par

$$(X, Y) \mapsto (X + iY, \overline{X} + i\overline{Y}) \quad (60)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels réels, d'inverse

$$(A, B) \mapsto \left(\frac{1}{2}(A + \overline{B}), \frac{1}{2i}(A - \overline{B}) \right). \quad (61)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \Theta(i \cdot (X, Y)) &= \Theta(-Y, X) = (-Y + iX, -\overline{Y} + i\overline{X}) = i(X + iY, \overline{X} + i\overline{Y}) \\ &= i\Theta(X, Y), \end{aligned}$$

donc Θ est aussi \mathbb{C} -linéaire pour les structures d'espaces vectoriels complexes à la source et au but définies par les formules (56) et (58) respectivement. De plus, puisque $[\overline{Z}, \overline{Z'}] = \overline{[Z, Z']}$ pour tous les $Z, Z' \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$, en munissant la source de Θ du crochet de Lie défini par l'équation (57) et le but de Θ du crochet de Lie défini par l'équation (59), nous avons

$$\begin{aligned} &\Theta([(X, Y), (X', Y')]) \\ &= \Theta([X, X'] - [Y, Y'], [Y, X'] + [X, Y']) \\ &= ([X, X'] - [Y, Y'] + i[Y, X'] + i[X, Y'], \overline{[X, X'] - [Y, Y']} + i(\overline{[Y, X']} + \overline{[X, Y']})) \\ &= ([X + iY, X' + iY'], [\overline{X} + i\overline{Y}, \overline{X'} + i\overline{Y'}]) \\ &= [(X + iY, \overline{X} + i\overline{Y}), (X' + iY', \overline{X'} + i\overline{Y'})] = [\Theta(X, Y), \Theta(X', Y')]. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons montré que $\Theta : (\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie complexes. \square

Par les explications données en début de cette partie et par le lemme que nous venons de démontrer, la classification des représentations irréductibles de $\mathrm{SO}_0(1, 3)$ se ramènera à la classification des représentations irréductibles de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Nous allons donc dans un premier temps étudier les représentations des algèbres de Lie sommes directes de deux algèbres de Lie.

Soient \mathfrak{g} et \mathfrak{g}' deux algèbres de Lie (réelles ou complexes, de dimension finie) et soient (V, R) et (V', R') deux représentations d'algèbre de Lie de \mathfrak{g} et \mathfrak{g}' . Notons $R * R'$ l'application de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$ dans $\mathfrak{gl}(V \otimes V')$ telle que pour tout $(X, X') \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$, l'application $(R * R')(X, X')$ soit l'unique application linéaire de $V \otimes V'$ dans $V \otimes V'$ telle que

$$(R * R')(X, X')(v \otimes v') = (R(X)(v)) \otimes v' + v \otimes (R'(X')(v')) \quad (62)$$

pour tous les $v \in V$ et $v' \in V'$.¹⁰⁷

107. La notation $R * R'$ n'est pas standard dans la littérature (cette représentation est parfois notée $R \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes R'$). Lorsque $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$, il est important de ne pas confondre la représentation $R * R'$, qui est une représentation de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, avec la représentation $R \otimes R'$, qui est une représentation de \mathfrak{g} . Un lien entre ces deux représentations est alors donné par la formule suivante :

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \quad (R \otimes R')(X) = (R * R')(X, X).$$

La proposition suivante dit en particulier (sous l'hypothèse que toute représentation de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est complètement réductible) que l'application

$$([R], [R']) \mapsto [R * R']$$

de l'ensemble $\widehat{\mathfrak{g}} \times \widehat{\mathfrak{g}'}$ des couples de classes d'équivalence de représentations irréductibles des algèbres de Lie \mathfrak{g} et \mathfrak{g}' , à valeur dans l'ensemble $\widehat{\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'}$ des classes d'équivalence de représentations irréductibles de l'algèbre de Lie produit $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$, est une bijection.

Proposition 3.17. (1) L'application $R * R'$ de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$ dans $\mathfrak{gl}(V \otimes V')$ est une représentation d'algèbre de Lie de l'algèbre de Lie produit $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$.

(2) Les représentations (V, R) et (V', R') sont toutes deux irréductibles si et seulement si la représentation $(V \otimes V', R * R')$ est irréductible.

(3) Si toute représentation de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est complètement réductible¹⁰⁸ et si (V'', R'') est une représentation irréductible de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$, alors il existe (V, R) et (V', R') des représentations irréductibles d'algèbre de Lie de \mathfrak{g} et \mathfrak{g}' respectivement telles que R'' soit conjugué à $R * R'$.

Démonstration. (1) Pour tous les $X, Y \in \mathfrak{g}$, $X', Y' \in \mathfrak{g}'$, montrons que

$$[(R * R')(X, X'), (R * R')(Y, Y')] = (R * R')([(X, X'), (Y, Y')]) , \quad (63)$$

où le premier crochet de Lie dans la formule centrée ci-dessus est celui de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(V \otimes V')$ et le second est celui de l'algèbre de Lie produit $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$. Pour tous les $v \in V$ et $v' \in V'$, nous avons, en utilisant la convention de notation (*) du début de la partie 1.3 (les représentations sous-entendues étant $R * R'$ ou R ou R' suivant la situation)

$$\begin{aligned} & (X, X')((Y, Y')(v \otimes v')) - (Y, Y')((X, X')(v \otimes v')) \\ &= (X, X')(Yv \otimes v' + v \otimes Y'v') - (Y, Y')(Xv \otimes v' + v \otimes X'v') \\ &= (XYv \otimes v' + Yv \otimes X'v' + Xv \otimes Y'v' + v \otimes X'Y'v') \\ & \quad - (YXv \otimes v' + Xv \otimes Y'v' + Yv \otimes X'v' + v \otimes Y'X'v') \\ &= (XYv - YXv) \otimes v' + v \otimes (X'Y'v' - Y'X'v') \\ &= ([X, Y]v) \otimes v' + v \otimes ([X', Y']v') = ([X, Y], [X', Y'])(v \otimes v') \\ &= [(X, X'), (Y, Y)](v \otimes v') . \end{aligned}$$

Ceci montre la formule (63), et donc que $R * R'$ est bien un morphisme d'algèbres de Lie.

(2) Nous introduisons à l'occasion de cette démonstration un autre outil élémentaire très utile en théorie des représentations, le lemme de Schur, qui est une conséquence élémentaire d'hypothèses d'irréductibilité.

Soient (V_1, R_1) et (V_2, R_2) deux représentations d'algèbre de Lie d'une même algèbre de Lie \mathfrak{g} . Notons $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}((V_1, R_1), (V_2, R_2))$ (ou tout simplement $\text{Hom}(R_1, R_2)$ quand il n'y a pas d'ambiguïté) l'ensemble des opérateurs d'entrelacement des représentations (V_1, R_1) et (V_2, R_2) de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} , c'est-à-dire (voir le début de la partie 1.3) l'ensemble des applications linéaires $T : V_1 \rightarrow V_2$ telles que

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \quad T \circ R_1(X) = R_2(X) \circ T . \quad (64)$$

108. Par le corollaire 1.26, c'est le cas par exemple si l'algèbre de Lie complexifiée de \mathfrak{g} est isomorphe à l'algèbre de Lie complexifiée d'un groupe de Lie matriciel compact simplement connexe.

C'est un sous-espace vectoriel complexe de l'espace vectoriel complexe $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ des applications linéaires de V_1 dans V_2 .

Lemma 3.18 (Lemme de Schur). *Si $T \in \text{Hom}(R_1, R_2)$ est non nul, alors*

- *T est injectif si R_1 est irréductible,*
- *T est surjectif si R_2 est irréductible,*
- *T est un isomorphisme linéaire si R_1 et R_2 sont irréductibles.*

En particulier, si (V, R) est une représentation irréductible non nulle de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} , alors l'application $\lambda \mapsto \lambda \text{id}$ de \mathbb{C} dans $\text{Hom}(R, R)$ est un isomorphisme.

Démonstration. Soit $T \in \text{Hom}(R_1, R_2)$. Par la formule (64), le noyau $\ker T$ de T est un sous-espace vectoriel de V_1 invariant par R_1 , qui, si R_1 est irréductible, est donc nul (auquel cas T est injectif) ou égal à V_1 (auquel cas T est nul). Toujours par la formule (64), l'image $\text{im } T$ de T est un sous-espace vectoriel de V_2 invariant par R_2 , qui, si R_2 est irréductible, est donc nul (auquel cas T est nul) ou égal à V_2 (auquel cas T est surjectif).

Pour montrer la dernière assertion, l'application $\lambda \mapsto \lambda \text{id}$ de \mathbb{C} dans $\text{Hom}(R, R)$ étant clairement bien définie, linéaire et injective (car $V \neq \{0\}$ implique que $\text{id}_V \neq 0$), il suffit de considérer, pour tout $T \in \text{Hom}(R, R)$, une valeur propre complexe λ de T , et de dire que $T - \lambda \text{id}$ est un opérateur d'entrelacement de (V, R) dans (V, R) , qui n'est pas injectif, donc doit être nul puisque (V, R) est irréductible. \square

Revenons à la démonstration de l'assertion (2) de la proposition 3.17. Si E et F sont des sous-espaces vectoriels de V et V' invariants par R et R' respectivement, alors $E \otimes F$ est un sous-espace vectoriel de $V \otimes V'$ invariant par $R * R'$. Donc si R ou R' n'est pas irréductible, alors $R * R'$ n'est pas irréductible.

Réciproquement, supposons que R et R' soient irréductibles. Notons $(V \otimes V', \check{R})$ la représentation d'algèbre de Lie de \mathfrak{g} dans $V \otimes V'$ qui est la restriction au premier facteur \mathfrak{g} de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$ de la représentation $R * R'$:

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \quad \check{R}(X) = (R * R')(X, 0) .$$

Notons \check{V}' l'espace vectoriel complexe

$$\check{V}' = \text{Hom}_{\mathfrak{g}}((V, R), (V \otimes V', \check{R})) .$$

Fixons une base $(e'_1, \dots, e'_{n'})$ de V' . Notons $\Theta : V' \rightarrow \check{V}'$ l'isomorphisme linéaire composé des isomorphismes linéaires

$$V' \simeq \mathbb{C}^{n'} \simeq \text{Hom}(R, R)^{n'} \simeq \check{V}' ,$$

où le premier est l'isomorphisme défini par le choix de base dans V' (c'est-à-dire l'inverse de $(\lambda^1, \dots, \lambda^{n'}) \mapsto \lambda^j e'_j$), le second est sur chaque facteur l'isomorphisme de \mathbb{C} dans $\text{Hom}(R, R)$ donné par le lemme de Schur (puisque R est irréductible), et le dernier est donné par le lemme suivant.

Lemma 3.19. *L'application de $\text{Hom}(R, R)^{n'}$ dans $\check{V}' = \text{Hom}_{\mathfrak{g}}((V, R), (V \otimes V', \check{R}))$, qui à $(T_1, \dots, T_{n'}) \in \text{Hom}(R, R)^{n'}$ associe l'application linéaire*

$$T : v \in V \mapsto T_1(v) \otimes e'_1 + \dots + T_{n'}(v) \otimes e'_{n'} , \quad (65)$$

est un isomorphisme linéaire.

Démonstration. L'application T , qui est clairement linéaire, entrelace bien les représentations (V, R) et $(V \otimes V', \check{R})$ de \mathfrak{g} . En effet, pour tous les $X \in \mathfrak{g}$ et $v \in V$, nous avons, en utilisant respectivement l'équation (65), le fait que $T_i \in \text{Hom}(R, R)$ pour $1 \leq i \leq n'$ et l'équation (62),

$$\begin{aligned} T \circ R(X)(v) &= T_1(R(X)v) \otimes e'_1 + \cdots + T_{n'}(R(X)v) \otimes e'_{n'} \\ &= (R(X) \circ T_1(v)) \otimes e'_1 + \cdots + (R(X) \circ T_{n'}(v)) \otimes e'_{n'} = \check{R}(X) \circ T(v). \end{aligned}$$

L'application $(T_1, \dots, T_{n'}) \mapsto T$ est bien définie, et clairement linéaire. Puisque $(e'_1, \dots, e'_{n'})$ est une base de V' , tout élément de $V \otimes V'$ s'écrit de manière unique $\sum_{i=1}^{n'} v_i \otimes e'_i$ avec $v_1, \dots, v_{n'} \in V$. L'application $(T_1, \dots, T_{n'}) \mapsto T$ est donc injective. De plus, si $T' \in \widetilde{V}'$, alors pour tout $v \in V$, l'élément $T'(v)$ s'écrit de la forme $\sum_{i=1}^{n'} T'(v)_i \otimes e'_i$, et par unicité, $T'_i : v \mapsto T'(v)_i$ est une application linéaire de V dans V . Cette application entrelace R et R , puisque T' entrelace R et \check{R} . Donc l'application $(T_1, \dots, T_{n'}) \mapsto T$ est surjective. \square

Notons \widetilde{R}' la représentation de \mathfrak{g}' dans l'espace vectoriel complexe \widetilde{V}' définie en posant, pour tous les $X' \in \mathfrak{g}'$ et $T \in \widetilde{V}'$,

$$\widetilde{R}'(X')T : v \mapsto R * R'(0, X')(T(v)).$$

L'isomorphisme linéaire Θ entrelace les représentations (V', R') et $(\widetilde{V}', \widetilde{R}')$ de \mathfrak{g}' . En effet, pour tous les $X' \in \mathfrak{g}'$, les $\lambda^1, \dots, \lambda^{n'} \in \mathbb{C}$ et les $v \in V$, nous avons

$$\begin{aligned} (\Theta \circ R'(X')(\lambda^j e'_j))(v) &= (\Theta(\lambda^j R'(X')e'_j))(v) = (\lambda^j v) \otimes (R'(X')e'_j) \\ &= R * R'(0, X')(\lambda^j v \otimes e'_j) = R * R'(0, X')(\Theta(\lambda^j e'_j)(v)) \\ &= (\widetilde{R}'(X') \circ \Theta(\lambda^j e'_j))(v). \end{aligned}$$

Soit E un sous-espace vectoriel du produit tensoriel $V \otimes V'$ invariant par $R * R'$. Alors E est invariant par \check{R} et $\check{E} = \text{Hom}_{\mathfrak{g}}((V, R), (E, \check{R}))$ est un sous-espace vectoriel de $\widetilde{V}' = \text{Hom}_{\mathfrak{g}}((V, R), (V \otimes V', \check{R}))$ invariant par la représentation \widetilde{R}' de \mathfrak{g}' , car les opérateurs linéaires $R * R'(X, 0)$ et $R * R'(0, X')$ de $V \otimes V'$ dans lui-même commutent, pour tous les $X \in \mathfrak{g}$ et $X' \in \mathfrak{g}'$. Donc $E' = \Theta^{-1}(\check{E})$ est un sous-espace vectoriel de V' , qui est invariant par R' puisque Θ entrelace R' et \widetilde{R}' . Par irréductibilité de R' , nous avons $E' = \{0\}$ ou $E' = V'$. Donc $\check{E} = \{0\}$ ou $\check{E} = \widetilde{V}'$. Par conséquent $E = \{0\}$ ou $E = V \otimes V'$. Ceci montre que la représentation $R * R'$ de $G \times G'$ est irréductible.

Montrons pour terminer l'assertion (3) de la proposition 3.17. Soit (V'', R'') une représentation irréductible de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$. Notons $R''_{\mathfrak{g}}$ la représentation de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} dans V'' définie par restriction de R'' au premier facteur de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$:

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \quad R''_{\mathfrak{g}}(X) = R''(X, 0).$$

Par l'hypothèse sur l'algèbre de Lie \mathfrak{g} , la représentation $(V'', R''_{\mathfrak{g}})$ de \mathfrak{g} est complètement réductible. Il existe donc une décomposition en somme directe $V'' = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, dont les facteurs sont invariants par $R''_{\mathfrak{g}}$ et tels que les restrictions de $R''_{\mathfrak{g}}$ à V_1, \dots, V_k soient irréductibles. Pour tout $X' \in \mathfrak{g}'$, la composition de l'inclusion $v_i \mapsto (0, \dots, 0, v_i, 0, \dots, 0)$

de V_i dans V'' comme i -ème facteur, de l'application linéaire $R''(0, X') : V'' \rightarrow V''$ et de la projection linéaire de V'' sur V_i parallèlement aux autres facteurs est un opérateur d'entrelacement entre $R''_{\mathfrak{g}|V_i}$ et $R''_{\mathfrak{g}|V_i}$, car les deux facteurs de l'algèbre de Lie produit $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$ commutent. Par le lemme de Schur 3.18 et par l'irréductibilité de $R''_{\mathfrak{g}|V_i}$, ou bien cet opérateur d'entrelacement est un isomorphisme ou bien il est nul.

La somme directe des sous-espaces vectoriels V_i tels que $(V_i, R''_{\mathfrak{g}|V_i})$ soit conjugué à $(V_1, R''_{\mathfrak{g}|V_1})$ est un sous-espace vectoriel complexe de V'' invariant par R'' , donc égal à V'' par irréductibilité. Nous pouvons donc supposer à conjugaison près que nous avons les égalités $(V_1, R''_{\mathfrak{g}|V_1}) = \dots = (V_k, R''_{\mathfrak{g}|V_k})$. Rappelons que nous avons un isomorphisme canonique $(v_1, \dots, v_k) \mapsto v_1 \otimes e_1 + \dots + v_k \otimes e_k$ de la somme directe de k copies de V_1 avec $V_1 \otimes \mathbb{C}^k$, où (e_1, \dots, e_k) est la base canonique de \mathbb{C}^k . En posant $V = V_1$, $V' = \mathbb{C}^k$ et $R = R''_{\mathfrak{g}|V_1}$, nous pouvons donc supposer à conjugaison près que $V'' = V \otimes V'$ où pour tous les $X \in \mathfrak{g}$, $v \in V$ et $v' \in V'$,

$$R''(X, 0)(v \otimes v') = (R(X)(v)) \otimes v' .$$

Maintenant que nous avons identifié $(V_i, R''_{\mathfrak{g}|V_i})$ avec $(V_1, R''_{\mathfrak{g}|V_1})$, le lemme de Schur dit même que pour tout $X' \in \mathfrak{g}'$, la composition de l'inclusion de V_i dans V'' comme i -ème facteur, de l'application linéaire $R''(0, X') : V'' \rightarrow V''$ et de la projection linéaire de V'' sur V_i parallèlement aux autres facteurs est la multiplication par un scalaire $\lambda_i(X') \in \mathbb{C}$ de V_1 dans V_1 . Par l'identification de $(V_1)^k$ avec $V_1 \otimes \mathbb{C}^k$, pour tout $X' \in \mathfrak{g}'$, il existe donc une application linéaire $R'(X') : V' \rightarrow V'$ telle que pour tous les $v \in V$ et $v' \in V'$,

$$R''(0, X')(v \otimes v') = v \otimes (R'(X')(v')) .$$

Il n'est alors pas difficile de vérifier que (V', R') est une représentation de \mathfrak{g}' et que $R'' = R * R'$, donc R' est irréductible par l'assertion (2). \square

Représentations irréductibles de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Le résultat suivant donne une classification, à conjugaison près, des représentations irréductibles de l'algèbre de Lie somme directe $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ de deux copies de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Pour tous les demi-entiers positifs $j_1, j_2 \in \frac{1}{2} \mathbb{N}$, notons $(V^{j_1, j_2}, D^{j_1, j_2})$ la représentation $(V^{j_1} \otimes V^{j_2}, D^{j_1} * D^{j_2})$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, où (V^{j_1}, D^{j_1}) et (V^{j_2}, D^{j_2}) sont les représentations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ définies dans le théorème 2.5.

Ainsi, l'espace vectoriel $V^{j_1, j_2} = V^{j_1} \otimes V^{j_2}$ est de dimension

$$\dim V^{j_1, j_2} = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) .$$

Il admet une base dont les vecteurs sont notés

$$|(j_1, j_2); (m_1, m_2)\rangle = |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$$

pour m_1 demi-entier entre $-j_1$ et j_1 tel que $j_1 + m_1$ soit entier, et de même pour m_2 un demi-entier entre $-j_2$ et j_2 tel que $j_2 + m_2$ soit entier. En utilisant la formule (62) (toujours avec la convention de notation (*) du début de la partie 1.3), l'action par $D^{j_1, j_2} = D^{j_1} * D^{j_2}$ des 6 générateurs de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, dont les trois premiers commutent aux trois derniers,

$$(J_3, 0), (J_-, 0), (J_+, 0), (0, J_3), (0, J_-), (0, J_+)$$

sur cette base est donnée par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
(J_3, 0)|(j_1, j_2); (m_1, m_2)\rangle &= m_1 |(j_1, j_2); (m_1, m_2)\rangle, \\
(J_\pm, 0)|(j_1, j_2); (m_1, m_2)\rangle &= \sqrt{(j_1 \mp m_1)(j_1 \pm m_1 + 1)} |(j_1, j_2); (m_1 \pm 1, m_2)\rangle, \\
(0, J_3)|(j_1, j_2); (m_1, m_2)\rangle &= m_2 |(j_1, j_2); (m_1, m_2)\rangle, \\
(0, J_\pm)|(j_1, j_2); (m_1, m_2)\rangle &= (\sqrt{(j_2 \mp m_2)(j_2 \pm m_2 + 1)}) |(j_1, j_2); (m_1, m_2 \pm 1)\rangle.
\end{aligned}$$

Notons aussi que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{J}^2, 0)|(j_1, j_2); (m_1, m_2)\rangle &= j_1(j_1 + 1) |(j_1, j_2); (m_1, m_2)\rangle, \\
(0, \mathbf{J}^2)|(j_1, j_2); (m_1, m_2)\rangle &= j_2(j_2 + 1) |(j_1, j_2); (m_1, m_2)\rangle.
\end{aligned}$$

Théorème 3.20. *L'application de l'ensemble $(\frac{1}{2}\mathbb{N}) \times (\frac{1}{2}\mathbb{N})$ dans l'ensemble $\widehat{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})}$ des classes de conjugaison de représentations irréductibles de l'algèbre de Lie somme directe $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, qui à un couple de demi-entiers (j_1, j_2) associe la classe d'équivalence de la représentation $(V^{j_1, j_2}, D^{j_1, j_2}) = (V^{j_1} \otimes V^{j_2}, D^{j_1} * D^{j_2})$, est une bijection.*

Démonstration. Ceci découle du théorème 2.5, du commentaire précédant la proposition 3.17, et du fait que toute représentation d'algèbre de Lie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est complètement irréductible, voir le corollaire 2.7 (et sa démonstration). \square

Représentations irréductibles du groupe de Lie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$

Dans cette partie, nous donnons une classification des représentations du groupe de Lie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Nous commençons par construire une liste de représentations irréductibles, qui apparaîtra dans cette classification.

Dans la partie 2.3, nous avons construit, pour tout demi-entier $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, une représentation irréductible $(\mathcal{V}^j, \mathcal{D}^j)$ du groupe de Lie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ en notant \mathcal{V}^j l'espace vectoriel complexe des polynômes homogènes de degré $2j$ en deux variables z_1, z_2 à coefficients complexes, muni de la base canonique

$$\mathcal{B}_j = (z_1^{j+m} z_2^{j-m})_{m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} : -j \leq m \leq j, j+m \in \mathbb{N}},$$

et

$$\mathcal{D}^j : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{V}^j)$$

le morphisme de groupes de Lie $g \mapsto \{P \mapsto P \circ g^{-1}\}$. Nous noterons aussi $(j, 0)$ cette représentation (voir ci-dessous pour une explication). Contrairement au cas de $\mathrm{SU}(2)$, les représentations $(j, 0)$ ne fournissent pas une liste complète de représentants des classes de conjugaison de représentations irréductibles du groupe de Lie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

Dans ce qui suit, pour tous les $j_1, j_2 \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, nous noterons $(\mathcal{V}^{j_2}, \overline{\mathcal{D}^{j_2}})$ (ou aussi $(0, j_2)$, voir ci-dessous pour une explication) la représentation complexe conjuguée (voir l'exemple (4) de la partie 1.4) de la représentation \mathcal{D}^{j_2} du groupe de Lie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, calculée dans la base canonique (voir le théorème 2.5 et la remarque 2.6)

$$\mathcal{B}'_{j_2} = (|j_2, m\rangle)_{m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} : -j_2 \leq m \leq j_2, j_2+m \in \mathbb{N}},$$

et nous noterons

$$(\mathcal{V}^{j_1, j_2} = \mathcal{V}^{j_1} \otimes \mathcal{V}^{j_2}, \quad \mathcal{D}^{j_1, j_2} = \mathcal{D}^{j_1} \otimes \overline{\mathcal{D}^{j_2}}),$$

ou aussi (j_1, j_2) , la représentation produit tensoriel (voir la formule (21) dans la partie 1.4) des représentations \mathcal{D}^{j_1} et $\overline{\mathcal{D}^{j_2}}$ du groupe de Lie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Rappelons que \mathcal{D}^{j_1, j_2} est le morphisme de groupes de Lie de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}(\mathcal{V}^{j_1, j_2})$ tel que pour tous les $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $v \in \mathcal{V}^{j_1}$ et $v' \in \mathcal{V}^{j_2}$, nous ayons

$$(\mathcal{D}^{j_1} \otimes \overline{\mathcal{D}^{j_2}})(g)(v \otimes v') = (\mathcal{D}^{j_1}(g)(v)) \otimes (\overline{\mathcal{D}^{j_2}(g)}(v')), \quad (66)$$

où $\overline{\mathcal{D}^{j_2}(g)} : \mathcal{V}^{j_2} \rightarrow \mathcal{V}^{j_2}$ est l'application linéaire de matrice dans la base \mathcal{B}'_{j_2} la matrice conjuguée de la matrice de $\mathcal{D}^{j_2}(g)$ dans cette base. La dimension de la représentation \mathcal{D}^{j_1, j_2} est

$$\dim(\mathcal{V}^{j_1, j_2}) = \dim(\mathcal{V}^{j_1} \otimes \mathcal{V}^{j_2}) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1).$$

Le résultat suivant est un théorème de classification (à conjugaison près) des représentations irréductibles du groupe de Lie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

Théorème 3.21. *Pour tous les $j_1, j_2 \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, la représentation $\mathcal{D}^{j_1, j_2} = (j_1, j_2)$ du groupe de Lie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est irréductible.*¹⁰⁹

Toute représentation irréductible de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est conjuguée à une et une seule des représentations $\mathcal{D}^{j_1, j_2} = (j_1, j_2)$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ pour j_1, j_2 des demi-entiers.

En particulier, il n'y a plus unicité à conjugaison près des représentations irréductibles dans une dimension donnée : par exemple les représentations $(j, 0)$ et $(0, j)$ ont la même dimension $2j + 1$, mais elles ne sont pas équivalentes, même si leurs restrictions à $\mathrm{SU}(2)$ le sont. Si $p \in \mathbb{N}$ est premier, il existe exactement deux représentations irréductibles de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ à conjugaison près de dimension p , qui sont $(p, 0)$ et $(0, p)$. Le nombre de classes de conjugaison de représentations irréductibles de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ de dimension $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ est égal au nombre $d(n)$ de diviseurs de n . Rappelons que si $n = \prod_{i=1}^k (p_i)^{\alpha_i}$ est la décomposition en facteurs premiers de n , où p_1, \dots, p_k sont des premiers deux à deux distincts et $\alpha_i \in \mathbb{N}$, alors

$$d(n) = \prod_{i=1}^k (\alpha_i + 1).$$

Démonstration. Fixons $j_1, j_2 \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$. Calculons la représentation complexifiée $(T(\mathcal{D}^{j_1, j_2}))^{\mathbb{C}}$ de la représentation tangente de \mathcal{D}^{j_1, j_2} . Par la définition de \mathcal{D}^{j_1, j_2} , et par les formules (24) et (23), nous avons

$$(T(\mathcal{D}^{j_1, j_2}))^{\mathbb{C}} = (T(\mathcal{D}^{j_1} \otimes \overline{\mathcal{D}^{j_2}}))^{\mathbb{C}} = (T\mathcal{D}^{j_1} \otimes T\overline{\mathcal{D}^{j_2}})^{\mathbb{C}} = (T\mathcal{D}^{j_1} \otimes \overline{T\mathcal{D}^{j_2}})^{\mathbb{C}}.$$

Par le calcul des représentations tangentes des représentations de spin de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ donné dans la démonstration du théorème 2.9, il existe un isomorphisme linéaire ϕ de \mathcal{V}^{j_2} dans V^{j_2} qui entrelace $T\mathcal{D}^{j_2}$ et D^{j_2} , et qui envoie la base canonique

$$\mathcal{B}_j = (z_1^{j+m} z_2^{j-m})_{m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} : -j \leq m \leq j, j+m \in \mathbb{N}}$$

^{109.} Ce fait est remarquable, car en général, l'irréductibilité n'est pas préservée par le produit tensoriel des représentations.

sur la base canonique $\mathcal{B}'_j = (|j_2, m\rangle)_{m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} : -j_2 \leq m \leq j_2, j_2+m \in \mathbb{N}}$ à multiples réels près (voir la formule (40)). En particulier, la matrice de ϕ dans ces bases est réelles. Par la démonstration de la proposition 1.17 (3), cet isomorphisme ϕ entrelace donc aussi les représentations complexes conjuguées $\overline{T\mathcal{D}^{j_2}}$ et $\overline{D^{j_2}}$. Deux représentations d'algèbre de Lie réelle sont équivalentes si et seulement si leurs représentations complexifiées le sont (voir la proposition 1.16). La propriété d'être équivalentes pour des représentations d'algèbre de Lie est préservée par produit tensoriel (voir la remarque (1) en fin de partie 1.3). La représentation $(T(\mathcal{D}^{j_1, j_2}))^{\mathbb{C}}$ est donc conjuguée à $(D^{j_1} \otimes \overline{D^{j_2}})^{\mathbb{C}}$.

Notons $\Theta : (\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ l'isomorphisme d'algèbres de Lie complexes construit dans la démonstration du lemme 3.16.¹¹⁰ Pour simplifier les notations, pour tous les $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et $v \in V^j$, notons $D^j(X)(v) = Xv$. Par la remarque 2.8 et la formule (23), nous avons $\overline{D^j}(X)(v) = \overline{X}v$. Alors pour tous les $A, B \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, $v \in V^{j_1}$ et $v' \in V^{j_2}$, par la formule (61) donnant l'expression de l'isomorphisme Θ^{-1} , par la formule (12) définissant la complexification d'une représentation d'algèbre de Lie, et par la formule (15) définissant le produit tensoriel de deux représentations d'algèbre de Lie successivement, nous avons

$$\begin{aligned} & (D^{j_1} \otimes \overline{D^{j_2}})^{\mathbb{C}}(\Theta^{-1}(A, B))(v \otimes v') \\ &= (D^{j_1} \otimes \overline{D^{j_2}})^{\mathbb{C}}\left(\frac{1}{2}(A + \overline{B}), \frac{1}{2i}(A - \overline{B})\right)(v \otimes v') \\ &= (D^{j_1} \otimes \overline{D^{j_2}})\left(\frac{1}{2}(A + \overline{B})\right)(v \otimes v') + i(D^{j_1} \otimes \overline{D^{j_2}})\left(\frac{1}{2i}(A - \overline{B})\right)(v \otimes v') \\ &= \left(\frac{1}{2}(A + \overline{B})v\right) \otimes v' + v \otimes \left(\frac{1}{2}(A + \overline{B})v'\right) + i\left(\frac{1}{2i}(A - \overline{B})v\right) \otimes v' + i v \otimes \left(\frac{1}{2i}(A - \overline{B})v'\right) \\ &= Av \otimes v' + v \otimes Bv' = (D^{j_1} * D^{j_2})(A, B)(v \otimes v'). \end{aligned}$$

L'application $(j_1, j_2) \mapsto [D^{j_1} * D^{j_2}]$ est une bijection de $(\frac{1}{2}\mathbb{N}) \times (\frac{1}{2}\mathbb{N})$ dans l'ensemble $\overline{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})}$ des classes de conjugaison de représentations irréductibles de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, par le théorème 3.20. Puisque Θ est un isomorphisme d'algèbres de Lie, l'application $[R] \mapsto [R \circ \Theta]$ est une bijection de $\overline{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})}$ dans $\overline{(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}}$. Soit $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ l'ensemble des classes de conjugaison de représentations irréductibles du groupe de Lie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Considérons l'application de $\overline{(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}}$ dans $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ inverse de $[\rho] \mapsto [(T\rho)^{\mathbb{C}}]$, où les crochets désignent les classes de conjugaison de représentations. Puisque $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est simplement connexe, cette application est une bijection, par les propositions 1.25 et 1.16. Ainsi l'application composée

$$(j_1, j_2) \mapsto [D^{j_1} * D^{j_2}] = [(D^{j_1} \otimes \overline{D^{j_2}})^{\mathbb{C}} \circ \Theta^{-1}] \mapsto [(D^{j_1} \otimes \overline{D^{j_2}})^{\mathbb{C}}] = [(T\mathcal{D}^{j_1, j_2})^{\mathbb{C}}] \mapsto \mathcal{D}^{j_1, j_2}$$

est une bijection de $(\frac{1}{2}\mathbb{N}) \times (\frac{1}{2}\mathbb{N})$ dans $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$.

Le résultat en découle. \square

La terminologie des physiciens pour les représentations de petit spins est la suivante :

110. Voir la formule (60).

	$j_1 = 0$	$j_1 = \frac{1}{2}$	$j_1 = 1$
$j_2 = 0$	représentation scalaire de Lorentz	représentation spinorielle de Weyl droite	représentation des champs de 2-formes auto-duales
$j_2 = \frac{1}{2}$	représentation spinorielle de Weyl gauche	représentation des quadri-vecteurs	
$j_2 = 1$	représentation des champs de 2-formes anti-auto-duales		représentation des 2-tenseurs symétriques sans trace

Exemples : (1) *La représentation fondamentale de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ “est” la représentation $(\frac{1}{2}, 0)$.*

Plus précisément, montrons que la représentation $(\frac{1}{2}, 0) = (\mathcal{V}^{\frac{1}{2}}, \mathcal{D}^{\frac{1}{2}})$ est canoniquement conjuguée à la représentation fondamentale (\mathbb{C}^2, ρ) de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Notons (e_1, e_2) la base canonique de \mathbb{C}^2 , et rappelons que (z_1, z_2) est une base de l'espace vectoriel complexe $\mathcal{V}^{\frac{1}{2}}$ des polynômes homogènes de degré $2 \times \frac{1}{2} = 1$ en les variables z_1, z_2 . Notons $T : \mathcal{V}^{\frac{1}{2}} \rightarrow \mathbb{C}^2$ l'unique isomorphisme linéaire tel que

$$z_1 \mapsto e_2 \quad \text{et} \quad z_2 \mapsto -e_1 .$$

Par les définitions de ρ et $\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}$, pour tout $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, l'endomorphisme $\rho(g)$ de \mathbb{C}^2 envoie e_1 sur $a e_1 + c e_2$ et e_2 sur $b e_1 + d e_2$, et l'endomorphisme $\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}(g)$ de $\mathcal{V}^{\frac{1}{2}}$ envoie z_1 sur $d z_1 - b z_2$ et z_2 sur $-c z_1 + a z_2$. En regardant sur les éléments de la base (z_1, z_2) de $\mathcal{V}^{\frac{1}{2}}$, on vérifie facilement que $T \circ \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}(g) = \rho(g) \circ T$. Ceci montre le résultat cherché.

(2) *La représentation Adjointe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ “est” la représentation $(1, 0)$.*

Plus précisément, montrons que la représentation $(1, 0) = (\mathcal{V}^1, \mathcal{D}^1)$ est canoniquement conjuguée à la représentation Adjointe $(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}), \mathrm{Ad})$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Nous allons utiliser la base

$$\left(J_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, J_- = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) .$$

de l'espace vectoriel complexe $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ (voir la partie 2.1, formule (31)) et la base $(z_2^2, z_1 z_2, z_1^2)$ de l'espace vectoriel complexe \mathcal{V}^1 des polynômes homogènes de degré $2 \times 1 = 2$ en les variables z_1, z_2 . Par les définitions de Ad et \mathcal{D}^1 , pour tout $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, l'endomorphisme $\mathrm{Ad}(g)$ de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ envoie

- J_3 sur $gJ_3g^{-1} = (ad + bc)J_3 - abJ_- + cdJ_+$,
- J_- sur $gJ_-g^{-1} = -2acJ_3 + a^2J_- - c^2J_+$,
- J_+ sur $gJ_+g^{-1} = 2bdJ_3 - b^2J_- + d^2J_+$,

et l'endomorphisme $\mathcal{D}^1(g)$ de \mathcal{V}^1 envoie

- z_2^2 sur $(-cz_1 + az_2)^2 = a^2z_2^2 - 2acz_1z_2 + c^2z_1^2$,
- z_1z_2 sur $(dz_1 - bz_2)(-cz_1 + az_2) = -abz_2^2 + (ad + bc)z_1z_2 - cdz_1^2$,
- z_1^2 sur $(dz_1 - bz_2)^2 = b^2z_2^2 - 2bdz_1z_2 + d^2z_1^2$.

Notons $T : \mathcal{V}^1 \rightarrow \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ l'unique isomorphisme linéaire tel que

$$z_1z_2 \mapsto J_3, \quad z_1^2 \mapsto -J_+ \quad \text{et} \quad z_2^2 \mapsto J_- .$$

En regardant sur les éléments de la base (z_1^2, z_1z_2, z_2^2) de \mathcal{V}^1 , on vérifie facilement que $T \circ \mathcal{D}^1(g) = \text{Ad}(g) \circ T$. Ceci montre le résultat cherché.

(3) *La représentation coAdjointe de $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ "est" aussi la représentation $(1, 0)$.*

Plus précisément, montrons que la représentation coAdjointe $(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^*, \text{Ad}^\sim)$ de $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ (voir l'exemple (5) de la partie 1.4) est conjuguée à la représentation Adjointe $(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}), \text{Ad})$ de $\text{SL}_2(\mathbb{C})$.

Nous avons la formule remarquable suivante : pour tout $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} . \quad (67)$$

Puisque ${}^t g^{-1} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$, si $h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, nous avons donc ${}^t g^{-1} = hgh^{-1}$ pour tout $g \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$.

Puisque les représentations $(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}), \text{Ad})$ et $(\mathcal{V}^1, \mathcal{D}^1)$ sont conjuguées par l'exemple (2), les représentations $(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^*, \text{Ad}^\sim)$ et $((\mathcal{V}^1)^*, (\mathcal{D}^1)^\sim)$ sont aussi conjuguées, par la proposition 1.21 (2). Il suffit donc de montrer que les représentations $((\mathcal{V}^1)^*, (\mathcal{D}^1)^\sim)$ et $(\mathcal{V}^1, \mathcal{D}^1)$ sont conjuguées. Par le calcul fait dans l'exemple (2), pour tout $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$, la matrice de $\mathcal{D}^1(g)$ dans la base $(z_2^2, \sqrt{2}z_1z_2, z_1^2)$ de \mathcal{V}^1 est

$$\begin{pmatrix} a^2 & -\sqrt{2}ab & b^2 \\ -\sqrt{2}ac & \sqrt{2}(ad + bc) & -\sqrt{2}bd \\ c^2 & -\sqrt{2}cd & d^2 \end{pmatrix} .$$

Donc pour tout $g \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$, en identifiant les endomorphismes de \mathcal{V}^1 avec leurs matrices dans la base ci-dessus, nous avons

$${}^t(\mathcal{D}^1(g)) = \mathcal{D}^1({}^t g) .$$

En utilisant la base de $(\mathcal{V}^1)^*$ duale de $(z_2^2, \sqrt{2}z_1z_2, z_1^2)$, la formule (20) (voir l'exemple (5) de la partie 1.4) montre donc

$$(\mathcal{D}^1)^\sim(g) = {}^t(\mathcal{D}^1(g^{-1})) = \mathcal{D}^1({}^t g^{-1}) = \mathcal{D}^1(hgh^{-1}) = \mathcal{D}^1(h)\mathcal{D}^1(g)\mathcal{D}^1(h)^{-1} ,$$

et les représentations $((\mathcal{V}^1)^*, (\mathcal{D}^1)^\sim)$ et $(\mathcal{V}^1, \mathcal{D}^1)$ sont bien conjuguées.

Exercice E.6. (1) Montrer que la représentation contragrédiente de la représentation fondamentale de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est conjuguée à la représentation fondamentale :

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right)^\vee = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

(2) Montrer que pour tous les $j_1, j_2 \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, la représentation complexe conjuguée $\overline{\mathcal{D}^{j_1, j_2}}$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est conjuguée à la représentation \mathcal{D}^{j_2, j_1} .

(3) Montrer que pour tous les $j_1, j_2 \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, la représentation \mathcal{D}^{j_1, j_2} est conjuguée à la représentation (V, ρ) du groupe de Lie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, où

- V est l'espace vectoriel complexe des polynômes P en les variables $z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2$ et à coefficients complexes, homogènes de degré $2j_1$ en z_1, z_2 et de degré $2j_2$ en \bar{z}_1, \bar{z}_2 , dont une base est donnée par $f_{j_1, m_1} \bar{f}_{j_2, m_2}$ pour $m_1, m_2 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $-j_1 \leq m_1 \leq j_1$, $j_1 + m_1 \in \mathbb{N}$, $-j_2 \leq m_2 \leq j_2$ et $j_2 + m_2 \in \mathbb{N}$,¹¹¹ et

- si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ alors $\rho(g)$ est l'application linéaire de V dans V qui à $P \in V$ associe l'application polynomiale

$$(z^1, z^2, \bar{z}^1, \bar{z}^2) \mapsto P \circ g^{-1}(z^1, z^2, \bar{z}^1, \bar{z}^2) = P(dz^1 - bz^2, -cz^1 + az^2, \bar{d}\bar{z}^1 - \bar{b}\bar{z}^2, -\bar{c}\bar{z}^1 + \bar{a}\bar{z}^2).$$

Le corollaire suivant donne un théorème de structure, à conjugaison près, pour toutes les représentations du groupe de Lie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

Corollaire 3.22. Toute représentation du groupe de Lie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est conjuguée à une représentation somme directe de copies de représentations (j_1, j_2) pour j_1, j_2 des demi-entiers.

Ainsi, si (V, ρ) est une représentation de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, il existe deux suites finies $(j'_p)_{1 \leq p \leq k}$ et $(j''_p)_{1 \leq p \leq k}$ dans $\frac{1}{2}\mathbb{N}$ telles que ρ soit conjuguée à $\bigoplus_{1 \leq p \leq k} \mathcal{D}^{j'_p, j''_p}$. Les physiciens utilisent aussi la notation

$$\rho = \bigoplus_{j_1, j_2 \in \frac{1}{2}\mathbb{N}} m_{j_1, j_2} (j_1, j_2)$$

où $m_{j_1, j_2} = \mathrm{Card}\{p \in \{1, \dots, k\} : j'_p = j_1, j''_p = j_2\}$ est un entier positif ou nul, nul sauf pour un nombre fini de couples de demi-entiers (j_1, j_2) , appelé la *multiplicité dans ρ* de la représentation irréductible (j_1, j_2) .

Démonstration. Ceci découle du théorème 3.21 de classification des représentations irréductibles de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et de la proposition suivante.

Proposition 3.23. Toute représentation du groupe de Lie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est complètement réductible.

Démonstration. Ce résultat se démontre en se ramenant au cas compact (ou cas des représentations unitarisables) traité par la proposition 1.20, par un petit raisonnement appelé l'*astuce unitaire de Weyl*.

Une représentation (V, ρ) du groupe de Lie matriciel connexe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est complètement réductible si et seulement si la représentation tangente $(V, T\rho)$ de son algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ est complètement réductible (voir la proposition 1.22 (3)). La représentation

111. Voir la formule (40) pour la définition de la base $(f_{j,m})_m$ de \mathcal{V}^j .

$(V, T\rho)$ de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ est complètement réductible si et seulement si la représentation complexifiée $(V, (T\rho)^{\mathbb{C}})$ de l'algèbre de Lie complexifiée $(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}$ est complètement réductible (voir la proposition 1.16). Or $(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie complexe produit $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ par le lemme 3.16. Notons $(V, R = (T\rho)^{\mathbb{C}} \circ \Theta^{-1})$ la représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ correspondant à $(V, (T\rho)^{\mathbb{C}})$ par un tel isomorphisme $\Theta : (\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Alors (V, R) est complètement réductible si et seulement si $(V, (T\rho)^{\mathbb{C}})$ l'est.

Or l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est aussi l'algèbre de Lie complexifiée de l'algèbre de Lie réelle produit $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$, par la proposition 2.2. Par la proposition 1.16, soit (V, R_0) une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$ telle que $(R_0)^{\mathbb{C}} = R$, qui est complètement réductible si et seulement si (V, R) l'est. Notons que $SU(2) \times SU(2)$ est simplement connexe, car $SU(2)$ l'est par la proposition 2.3, et puisque le produit de deux espaces topologiques simplement connexes est encore simplement connexe. Par la proposition 1.25, soit (V, ρ_0) une représentation du groupe de Lie $SU(2) \times SU(2)$ telle que $T\rho_0 = R_0$. Toujours par la proposition 1.22, (V, R_0) est complètement réductible si et seulement si (V, ρ_0) l'est. Or $SU(2) \times SU(2)$ est compact, donc par la proposition 1.20, (V, ρ_0) est complètement réductible. Le résultat en découle. \square \square

Représentations irréductibles du groupe de Lie $SO_0(1, 3)$

La classification (à conjugaison près) des représentations irréductibles du groupe de Lie $SO_0(1, 3)$ se déduit très facilement de celle pour $SL_2(\mathbb{C})$, en suivant la même méthode que pour la déduction de la classification (à conjugaison près) des représentations irréductibles de $SO(3)$ à partir de celles de $SU(2)$.

Notons $\Phi : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow SO_0(1, 3)$ le morphisme de groupes de Lie surjectif de noyau $\{\pm \text{id}\}$ construit dans la proposition 3.10. Si $\sigma : SO_0(1, 3) \rightarrow GL(V)$ est une représentation du groupe de Lie $SO_0(1, 3)$, alors $\sigma \circ \Phi : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow GL(V)$ est une représentation du groupe de Lie $SL_2(\mathbb{C})$. Réciproquement, si $\rho : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow GL(V)$ est une représentation du groupe de Lie $SL_2(\mathbb{C})$, alors ρ définit une représentation $\underline{\rho} : SO_0(1, 3) \rightarrow GL(V)$ du groupe de Lie $SO_0(1, 3)$ telle que $\rho = \underline{\rho} \circ \phi$ si et seulement si

$$\rho(-\text{id}) = \rho(\text{id}) .$$

Montrons que cette condition est vérifiée par la représentation (j_1, j_2) de $SL_2(\mathbb{C})$ si et seulement si la somme $j_1 + j_2$ est un entier, donc si et seulement si j_1 et j_2 sont simultanément des entiers ou des demi-entiers non entiers. En effet, pour tout demi-entier $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, un polynôme homogène P en deux variables z_1, z_2 de degré $2j$ est transformé par la symétrie centrale $(z_1, z_2) \mapsto (-z_1, -z_2)$ en $(-1)^{2j}P$. Donc $\mathcal{D}^j(-\text{id}) = (-1)^{2j} \text{id}_{\mathcal{V}^j}$ et de même $\overline{\mathcal{D}^j}(-\text{id}) = (-1)^{2j} \text{id}_{\mathcal{V}^j}$, en utilisant la base $(z_1^{j+m} z_2^{j-m})_{m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} : -j \leq m \leq j, j+m \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{V}^j et puisque la matrice conjuguée complexe d'une matrice réelle est égale à elle-même. Par la définition d'une représentation produit tensoriel (voir la formule (21)), nous avons donc

$$\mathcal{D}^{j_1} \otimes \overline{\mathcal{D}^{j_2}}(-\text{id}) = (-1)^{2j_1+2j_2} \text{id} .$$

Puisque la condition d'irréductibilité et la conjugaison de représentations de groupe de Lie connexe se lisent sur les représentations tangentes des algèbres de Lie, et puisque les algèbres de Lie réelles $\mathfrak{so}(1, 3)$ et $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ sont isomorphes, nous avons donc le résultat suivant.

Corollaire 3.24. *Toute représentation irréductible de $\mathrm{SO}_0(1, 3)$ est conjuguée à une et une seule des représentations $(\mathcal{V}^{j_1, j_2}, \underline{\mathcal{D}}^{j_1, j_2})$ pour j_1, j_2 des demi-entiers de somme entière. \square*

3.7 Indications pour la résolution des exercices

Schème E.3 Soient $x = (x_0, x_1, x_2, x_3), y = (y_0, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^{1,3}$, posons $u = (x_1, x_2, x_3), v = (y_1, y_2, y_3)$. Notons $\| \cdot \|$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la norme et le produit scalaire euclidiens usuels de \mathbb{R}^3 .

(1) Les conditions $x_0 > 0, x \cdot x = 0$ et $x \cdot x < 0$ sont stables par multiplication de x par un réel strictement positif. Si x, y sont des vecteurs de type temps orientés vers le futur, alors $x_0, y_0 > 0$ et $\|u\| < |x_0|, \|v\| < |y_0|$. Donc $x_0 + y_0 > 0$ et

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| < |x_0| + |y_0| = |x_0 + y_0|.$$

D'où $x + y$ est un vecteur de type temps orienté vers le futur.

(2) Quitte à échanger x et y , à changer simultanément de signe x et y , et à multiplier x et y par un scalaire strictement positif, nous pouvons supposer que $x_0 = 1$ et $y_0 = \pm 1$.

Si x et y sont deux vecteurs de type temps dans la même nappe, alors $y_0 = 1$ et $\|u\| < |x_0| = 1, \|v\| < |y_0| = 1$. Donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$x \cdot y = -x_0 y_0 + \langle u, v \rangle = -1 + \langle u, v \rangle \leq \|u\| \|v\| - 1 < 0.$$

Si x et y sont deux vecteurs de type lumière non colinéaires dans la même nappe, alors $y_0 = 1$ et $\|u\| = |x_0| = 1, \|v\| = |y_0| = 1$. Donc par le cas d'inégalité stricte dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, comme u et v sont non colinéaires,

$$x \cdot y = -x_0 y_0 + \langle u, v \rangle = -1 + \langle u, v \rangle < \|u\| \|v\| - 1 = 0.$$

Réciproquement, si x et y sont deux vecteurs de type temps qui ne sont pas dans la même nappe, alors $y_0 = -1$ et

$$x \cdot y = -x_0 y_0 + \langle u, v \rangle = 1 + \langle u, v \rangle \geq 1 - \|u\| \|v\| > 0.$$

Si x et y sont deux vecteurs de type lumière non colinéaires qui ne sont pas dans la même nappe, alors $y_0 = -1$ et

$$x \cdot y = -x_0 y_0 + \langle u, v \rangle = 1 + \langle u, v \rangle > 1 - \|u\| \|v\| = 0.$$

Schème E.4 Soient x un vecteur de type temps et y un vecteur de $\mathbb{R}^{1,3}$ non nul tel que $x \cdot y = 0$. Montrons que y est de type espace. Comme $x \cdot x \neq 0, y$ n'est pas colinéaire à x . Supposons par l'absurde que y est de type temps ou lumière. Alors pour tous les $a, b \in \mathbb{R}$, le vecteur $ax + by$ est aussi de type temps ou lumière (car par orthogonalité de x et y , nous avons $(ax + by) \cdot (ax + by) = a^2 x \cdot x + b^2 y \cdot y \leq 0$). La restriction de g au plan vectoriel engendré par x et y est donc de signature $(-, -)$ ou $(-, 0)$, ce qui n'est pas possible vu la signature de g .

Schème E.6 (1) Soit (\mathbb{C}^2, ρ) la représentation fondamentale de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Dans la base canonique (e_1, e_2) de \mathbb{C}^2 , pour tout $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, la matrice de $\rho(g)$ est exactement

g . Donc (voir l'exemple (5) de la partie 1.4) dans la base duale (e_1^*, e_2^*) du dual $(\mathbb{C}^2)^*$, la matrice de $\rho^\vee(g)$ est

$${}^t g^{-1} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Par la formule (67), l'unique isomorphisme linéaire T de \mathbb{C}^2 dans $(\mathbb{C}^2)^*$ tel que

$$e_1 \mapsto -e_2^* \quad \text{et} \quad e_2 \mapsto e_1^*$$

conjugue donc la représentation ρ^\vee et la représentation ρ : nous avons $T \circ \rho(g) \circ T^{-1} = \rho^\vee(g)$ pour tout $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

(2) Pour calculer la représentation complexe conjuguée $\overline{\mathcal{D}^{j_1, j_2}}$ dans $\mathcal{V}^{j_1} \otimes \mathcal{V}^{j_2}$, nous utilisons la base des tenseurs purs $(e_i \otimes f_j)_{1 \leq i \leq k_1, 1 \leq j \leq k_2}$ où $(e_i)_{1 \leq i \leq k_1}$ est la base de \mathcal{V}^{j_1} et $(f_j)_{1 \leq j \leq k_2}$ celle de \mathcal{V}^{j_2} utilisées pour calculer les représentations complexes conjuguées $\overline{\mathcal{D}^{j_1}}$ et $\overline{\mathcal{D}^{j_2}}$.

Par la proposition 1.22 (4), puisque $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est connexe, il suffit de montrer que les représentations tangentes $T(\overline{\mathcal{D}^{j_1, j_2}})$ et $T\mathcal{D}^{j_2, j_1}$ de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ sont conjuguées. Par les formules (23) et (24), et puisque $T\mathcal{D}^j$ est conjuguée à D^j (voir la partie 2.3), il suffit donc de montrer que les représentations $\overline{D^{j_1} \otimes \overline{D^{j_2}}}$ et $D^{j_2} \otimes \overline{D^{j_1}}$ de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^{\mathbb{R}}$ sont conjuguées.

On vérifie que l'unique isomorphisme linéaire T de $\mathcal{V}^{j_1} \otimes \mathcal{V}^{j_2}$ dans $\mathcal{V}^{j_2} \otimes \mathcal{V}^{j_1}$ tel que

$$T(e_i \otimes f_j) = f_j \otimes e_i,$$

pour tous les $i \in \{1, \dots, k_1\}$ et $j \in \{1, \dots, k_2\}$, conjugue la représentation $\overline{D^{j_1} \otimes \overline{D^{j_2}}}$ et la représentation $D^{j_2} \otimes \overline{D^{j_1}}$.

4 Le groupe $SU(3)$

Le but de ce chapitre est de décrire les représentations du groupe de Lie $SU(3)$ et d'indiquer une de leurs utilisations en physique des particules. Une référence de base est le livre [KS].

Puisque $SU(3)$ est simplement connexe (voir la proposition 1.12), par la proposition 1.25, pour classer (à conjugaison près) les représentations irréductibles du groupe de Lie $SU(3)$, il suffit de classer (à conjugaison près) les représentations irréductibles de son algèbre de Lie $\mathfrak{su}(3)$, donc celles de son algèbre de Lie complexifiée $\mathfrak{su}(3)^{\mathbb{C}}$, par la proposition 1.16. Puisque les algèbres de Lie $\mathfrak{su}(3)^{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ sont isomorphes (voir la proposition 2.2), nous allons donc commencer par étudier l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$.

4.1 L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Rappelons (voir la partie 1.1) que pour tous les $i, j \in \{1, \dots, n\}$, la matrice élémentaire E_i^j est la matrice $n \times n$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient en i -ème ligne et j -ème colonne, qui est égal à 1.

L'algèbre de Lie complexe

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : \text{tr } X = 0\}$$

des matrices $n \times n$ à coefficients complexes de trace nulle admet pour base la famille des matrices E_i^j pour $1 \leq i \neq j \leq n$ et (sans utiliser la convention de sommation d'Einstein) des matrices

$$H_i = E_i^i - E_{i+1}^{i+1}$$

pour $1 \leq i \leq n - 1$.

Le sous-espace vectoriel complexe \mathfrak{h} de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ composé des matrices diagonales (de trace nulle) admet pour base (H_1, \dots, H_{n-1}) (donc est de dimension $n - 1$). Il est appelé la *sous-algèbre de Cartan* (standard) de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Il joue pour les représentations de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ un rôle analogue à celui joué par la seule matrice H pour $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. C'est une sous-algèbre de Lie abélienne maximale (pour l'inclusion) de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, car deux matrices diagonales commutent et toute matrice qui commute avec toutes les matrices diagonales de trace nulle est aussi diagonale. Pour $1 \leq i \leq n$, notons $\lambda_i : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$ la forme linéaire sur \mathfrak{h} qui à un élément de \mathfrak{h} associe son i -ème coefficient diagonal : sans utiliser la convention de sommation d'Einstein,

$$\lambda_i : H = (H_j^i)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathfrak{h} \mapsto H_j^i.$$

Puisque $\text{tr } H = 0$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$, nous avons

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0.$$

Le réseau

$$\Lambda_W = \mathbb{Z}\lambda_1 + \mathbb{Z}\lambda_2 + \dots + \mathbb{Z}\lambda_n$$

dans le dual \mathfrak{h}^* de \mathfrak{h} est appelé le *réseau des poids* de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$: il est formé des combinaisons linéaires à coefficients entiers des formes linéaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Pour tous les $H \in \mathfrak{h}$ et $1 \leq i \neq j \leq n$, nous avons

$$[H, E_i^j] = (\lambda_i - \lambda_j)(H) E_i^j. \quad (68)$$

Les formes linéaires $\lambda_{ij} = \lambda_i - \lambda_j \in \mathfrak{h}^*$ pour $1 \leq i \neq j \leq n$ sont appelées les *racines* de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ (relativement à \mathfrak{h}). Le réseau

$$\Lambda_R = +_{1 \leq i \neq j \leq n} \mathbb{Z} \lambda_{ij}$$

dans le dual \mathfrak{h}^* de \mathfrak{h} est appelé le *réseau des racines* de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$: il est formé des combinaisons linéaires à coefficients entiers des racines $\lambda_{ij} \in \mathfrak{h}^*$ pour $1 \leq i \neq j \leq n$. Le réseau des racines Λ_R est contenu dans le réseau des poids Λ_W .

En rappelant que $\delta_{j,k}$ est le symbole de Kronecker, égal à 1 si $j = k$ et à 0 sinon, le produit de deux matrices élémentaires est donné par $E_i^j E_k^\ell = \delta_{j,k} E_i^\ell$ et nous avons

$$\lambda_j(H_k) = \delta_{j,k} - \delta_{j,k+1}.$$

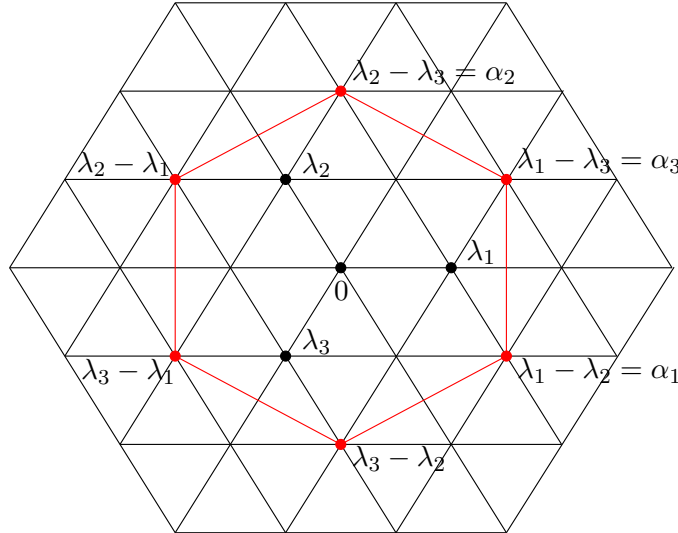
Les relations de commutation de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ pour la base décrite ci-dessus sont donc

$$\begin{aligned} [E_i^j, E_k^\ell] &= \delta_{j,k} E_i^\ell - \delta_{i,\ell} E_k^j, \\ [H_k, E_i^j] &= (\delta_{i,k} - \delta_{i,k+1} - \delta_{j,k} + \delta_{j,k+1}) E_i^j. \end{aligned}$$

Par exemple, si $n = 3$, la base canonique de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ est constituée de

$$\begin{aligned} H_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & H_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ E_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ F_1 &= {}^t E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & F_2 &= {}^t E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & F_3 &= {}^t E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Posons $\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2$, $\alpha_2 = \lambda_2 - \lambda_3$, $\alpha_3 = \lambda_1 - \lambda_3$, qui sont des formes linéaires sur \mathfrak{h} , de sorte que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3 \in \mathfrak{h}^*$ sont les six racines de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$. Nous identifierons \mathfrak{h} et \mathfrak{h}^* par l'unique isomorphisme linéaire qui envoie H_1 et H_2 sur H_1^* et H_2^* respectivement, où (H_1^*, H_2^*) est la base duale de (H_1, H_2) . Le réseau des poids $\Lambda_W = \mathbb{Z}\lambda_1 + \mathbb{Z}\lambda_2 + \mathbb{Z}\lambda_3$ dans l'espace vectoriel réel \mathfrak{h}^* de dimension 2 se représente ainsi :



Si $n = 3$, le réseau des poids Λ_W est le réseau des sommets de la triangulation équilatérale du plan, de pavé fondamental le triangle de sommets $0, \lambda_1, -\lambda_3$. Le sous-réseau des racines Λ_R est le réseau des sommets du pavage hexagonal du plan, de pavé fondamental l'enveloppe convexe des racines $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3$.

Pour tous les $H, H' \in \mathfrak{h}$ et $k \in \{1, 2, 3\}$, nous avons par un calcul facile (ou par le fait que \mathfrak{h} est une sous-algèbre de Lie abélienne et les formules (68))

$$[H, H'] = 0, \quad [H, E_k] = \alpha_k(H) E_k, \quad [H, F_k] = -\alpha_k(H) F_k .$$

Ainsi, les opérateurs linéaires $\text{ad } H$ pour $H \in \mathfrak{h}$ se diagonalisent simultanément, et la décomposition en somme directe

$$\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}E_1 \oplus \mathbb{C}E_2 \oplus \mathbb{C}E_3 \oplus \mathbb{C}F_1 \oplus \mathbb{C}F_2 \oplus \mathbb{C}F_3$$

est appelée la *décomposition en espaces de racine* de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$. Les facteurs de cette décomposition sont des sous-espaces propres communs à tous les opérateurs linéaires $\text{ad } H$ pour $H \in \mathfrak{h}$. Les sous-espaces vectoriels $\mathbb{C}E_1, \mathbb{C}E_2, \mathbb{C}E_3, \mathbb{C}F_1, \mathbb{C}F_2, \mathbb{C}F_3$ de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ sont appelés les *espaces de racine* des racines $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3$ respectivement.

Les relations de commutation de la base canonique $(H_1, H_2, E_1, E_2, E_3, F_1, F_2, F_3)$ de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ définie ci-dessus sont

$$\begin{aligned} [H_i, H_j] &= 0, \\ [H_1, E_1] &= 2E_1, \quad [H_1, E_2] = -E_2, \quad [H_1, E_3] = E_3, \\ [H_2, E_1] &= -E_1, \quad [H_2, E_2] = 2E_2, \quad [H_2, E_3] = E_3, \\ [H_1, F_1] &= -2F_1, \quad [H_1, F_2] = F_2, \quad [H_1, F_3] = -F_3, \\ [H_2, F_1] &= F_1, \quad [H_2, F_2] = -2F_2, \quad [H_2, F_3] = -F_3, \\ [E_1, E_2] &= E_3, \quad [E_2, E_3] = [E_1, E_3] = 0, \\ [F_1, F_2] &= -F_3, \quad [F_2, F_3] = [F_1, F_3] = 0, \\ [E_1, F_1] &= H_1, \quad [E_1, F_2] = 0, \quad [E_1, F_3] = -F_2, \\ [E_2, F_2] &= H_2, \quad [E_2, F_1] = 0, \quad [E_2, F_3] = F_1, \\ [E_3, F_3] &= H_1 + H_2, \quad [E_3, F_1] = -E_2, \quad [E_3, F_2] = E_1 . \end{aligned}$$

Les physiciens (voir par exemple [BT]) introduisent aussi les matrices

$$\begin{aligned} I_3 = \frac{1}{2} H_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \frac{1}{3}(H_1 + 2H_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \\ T_8 = \frac{\sqrt{3}}{2} Y &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{2} Y + I_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nous utiliserons dans ce qui suit la base (I_3, T_8) de \mathfrak{h} plutôt que la base (H_1, H_2) , pour les dessins.

4.2 Représentations irréductibles du groupe de Lie $SU(3)$

Puisque $SU(3)$ est simplement connexe (voir la proposition 1.12) et puisque l'algèbre de Lie complexifiée de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{su}(3)$ est l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ (voir la proposition 2.2), l'application

$$[\rho] \mapsto [(T\rho)^{\mathbb{C}}]$$

de l'ensemble $\widehat{SU(3)}$ des classes d'équivalence de représentations irréductibles du groupe de Lie $SU(3)$ dans l'ensemble $\widehat{\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})}$ des classes d'équivalence de représentations irréductibles de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ est une bijection, par les propositions 1.25 et 1.16.

Un *poids* d'une représentation (V, R) de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ (relativement à \mathfrak{h}) est une forme linéaire $\omega \in \mathfrak{h}^*$ sur la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ telle qu'il existe un vecteur $v \in V$ non nul, appelé *vecteur de poids*, tel que

$$R(H)v = \omega(H)v$$

pour tous les $H \in \mathfrak{h}$. L'ensemble des vecteurs de poids d'un poids donné, union $\{0\}$, est un sous-espace vectoriel complexe de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$, dont la dimension (complexe) est appelée la *multiplicité* de ce poids.

Si de plus $R(E_i)(v) = 0$ pour $i = 1, 2, 3$ et si le plus petit sous-espace vectoriel de V contenant v et stable par $R(F_1)$, $R(F_2)$ et $R(F_3)$ est égal à V tout entier, alors nous dirons que ω est un *plus haut poids* de la représentation (V, R) et que $v \in V$ est un *vecteur de plus haut poids*. On montre alors que ω est unique et que v est unique à multiplication par un scalaire non nul près (voir par exemple [FH, Chap. 12]).

Le théorème de classification des représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ est le suivant (voir par exemple [FH, Chap. 12, 13] pour une démonstration).

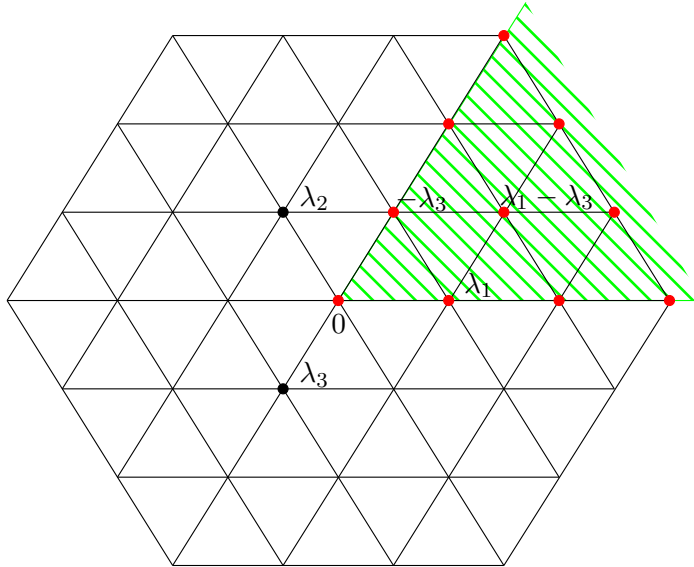
Théorème 4.1. *Pour tous les entiers $m, n \in \mathbb{N}$, il existe une, et une seule à conjugaison près, représentation irréductible $R_{m,n}$ de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ de plus haut poids $m\lambda_1 - n\lambda_3$. Sa dimension est*

$$\dim(R_{m,n}) = \frac{1}{2} (m+1)(n+1)(m+n+2) .$$

L'application de \mathbb{N}^2 dans l'ensemble $\widehat{\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})}$ des classes d'équivalence de représentations irréductibles de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ définie par $(m, n) \mapsto [R_{m,n}]$ est une bijection.

□

L'ensemble des plus hauts poids de représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ est donc l'intersection du réseau des poids $\Lambda_W = \mathbb{Z}\lambda_1 + \mathbb{Z}\lambda_2 + \mathbb{Z}\lambda_3$ avec le cône dans \mathfrak{h}^* défini par $\{s\lambda_1 - t\lambda_3 : s, t \geq 0\}$. Nous donnerons dans les exemples ci-dessous une description concrète des représentations irréductibles correspondants à quelques sommets dans ce cône, en particulier λ_1 , $-\lambda_3$ et $\lambda_1 - \lambda_3$.



Interprétation en physique des particules.

Il s'agit d'une description, connue sous le nom de *symétrie de saveur* $SU(3)$ ou historiquement *voie octuple*¹¹², de certaines particules physiques due à M. Gell-Mann et Y. Ne'eman.

Le principe de base de la description des hadrons¹¹³ par M. Gell-Mann et Y. Ne'eman est que ce sont des vecteurs de poids d'une représentation du groupe $SU(3)$. Les nombres quantiques de ces particules sont les valeurs de ces poids sur les vecteurs particuliers de l'algèbre de Cartan \mathfrak{h} , comme I_3 , Y , Q (qui donnent donc des opérateurs linéaires commutatifs dans l'espace de la représentation), pour respectivement la troisième composante de l'isospin, l'hypercharge et la charge électrique, respectivement. La relation $Q = \frac{1}{2} Y + I_3$ est appelée la *relation de Gell-Mann-Nishima*.

Les particules correspondant à des vecteurs de poids d'une même représentation vérifient certaines propriétés similaires (même spin J et parité P). Le nombre quantique appelé *étrangeté*, et noté S , est conservé (additivement) lors de certaines réactions comme $p + \pi^- \rightarrow \Lambda^0 + K^0$ ne faisant intervenir que l'interaction forte mais pas forcément pour celles relevant de l'interaction faible comme $\Lambda_0 \rightarrow p + \pi^-$.¹¹⁴

Mais la symétrie de saveur $SU(3)$ n'est pas une symétrie exacte, les propriétés de conservation ne sont parfois qu'approchées.

112. Les anglophones disent "The eightfold way".

113. Rappelons que les *hadrons* sont les particules (élémentaires ou composées) soumises à l'interaction forte, que nous appelons *mésons* les hadrons bosoniques (c'est-à-dire suivant la statistique de Bose-Einstein) formés de configurations de paires quark/anti-quark, et que nous appelons *baryons* les hadrons fermioniques (c'est-à-dire suivant la statistique de Fermi-Dirac) composés de trois quarks.

114. Les trois pions sont les mésons π^+ composé d'un quark u (haut) et d'un anti-quark \bar{d} (anti-bas), π^- composé d'un quark d (bas) et d'un anti-quark \bar{u} (anti-haut), et π^0 , superposition des paires $u\bar{u}$ et $d\bar{d}$, voir la note de bas de page 5. Les trois *kaons* K^+ , K^- et K^0 sont les mésons respectivement composés d'un quark u (haut) et d'un anti-quark \bar{s} (anti-étrange) pour K^+ , d'un quark s (étrange) et d'un anti-quark \bar{u} (anti-haut) pour K^- , et d'un quark d (bas) et d'un anti-quark \bar{s} (anti-étrange) pour K^0 . Le baryon Λ^0 est composé d'un quark u (haut), d'un quark d (bas) et d'un quark s (étrange).

Nous allons considérer dans la suite quelques représentations particulières de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$, et indiquer des liens avec la physique des particules.

La représentation fondamentale de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$.

La *représentation fondamentale* (ou standard) de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ est l'application de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ dans $\mathfrak{gl}(\mathbb{C}^3)$ qui à $X \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ associe l'application linéaire $v \mapsto Xv$ de \mathbb{C}^3 dans \mathbb{C}^3 (en identifiant un vecteur de \mathbb{C}^3 avec le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de \mathbb{C}^3), dont la matrice dans la base canonique est exactement X . Étant de dimension 3, elle est notée $\mathbf{3}$.

Elle est clairement irréductible, car tout sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^3 invariant par toute matrice de trace nulle est égal à $\{0\}$ ou \mathbb{C}^3 .

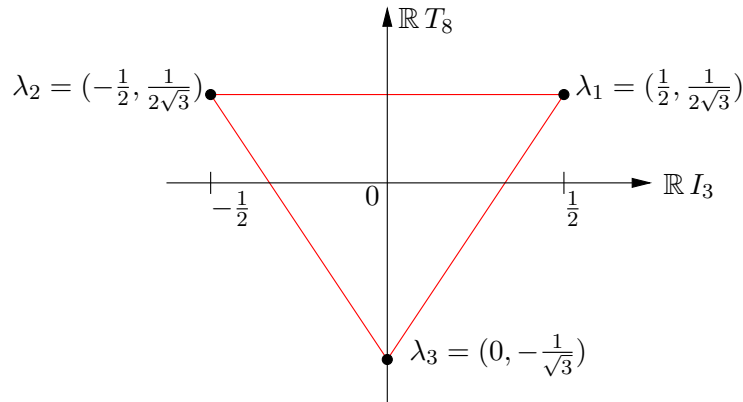
Les seuls vecteurs propres non nuls communs à toutes les matrices diagonales de trace nulle sont les multiples non nuls des éléments e_1, e_2, e_3 de la base canonique de \mathbb{C}^3 . Donc les poids de la représentation fondamentale $\mathbf{3}$ de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ sont exactement les formes linéaires λ_1, λ_2 et λ_3 sur la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} , ayant pour vecteur de poids les (multiples non nuls des) vecteurs de la base canonique e_1, e_2 et e_3 respectivement. Le plus haut poids de $\mathbf{3}$ est λ_1 , par unicité, car $E_1e_1 = E_2e_1 = E_3e_1 = 0$ et

$$\text{Vect}(e_1, F_1e_1, F_3e_1) = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{C}^3,$$

donc le plus petit sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^3 contenant e_1 et stable par F_1, F_2, F_3 est \mathbb{C}^3 . Puisque la trace des éléments de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ est nulle, ces poids vérifient la relation linéaire

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0.$$

Dans la base (I_3, T_8) de \mathfrak{h} et après l'identification susdite de \mathfrak{h} et \mathfrak{h}^* , ces poids forment les sommets d'un triangle équilatéral.



Les vecteurs de poids e_1, e_2 et e_3 (pour les poids λ_1, λ_2 et λ_3) correspondent respectivement aux quarks u (haut),¹¹⁵ d (bas)¹¹⁶ et s (étrange).¹¹⁷ La représentation $\mathbf{3}$ est pour les physiciens un *triplet* de quarks.

115. Les anglophones disent “up”.

116. Les anglophones disent “down”.

117. Les anglophones disent “strange”.

La représentation contragrédiente de la représentation fondamentale de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$.

La représentation contragrédiente de la représentation fondamentale de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ est ¹¹⁸ l'application de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ dans $\mathfrak{gl}(\mathbb{C}^3)$ qui à $X \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ associe l'application linéaire $v \mapsto -{}^tXv$ de \mathbb{C}^3 dans \mathbb{C}^3 (en identifiant un vecteur de \mathbb{C}^3 avec le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de \mathbb{C}^3), dont la matrice dans la base canonique est $-{}^tX$. Elle est notée $\bar{\mathbf{3}}$.

Elle est irréductible par la proposition 1.21 (1).

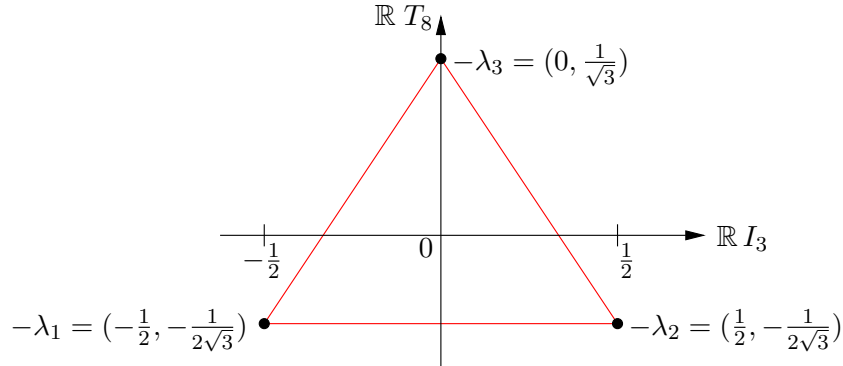
Les poids de la représentation $\bar{\mathbf{3}}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ sont exactement les formes linéaires $-\lambda_1, -\lambda_2$ et $-\lambda_3$, ayant pour vecteur de poids les (multiples non nuls des) vecteurs de la base canonique e_1, e_2 et e_3 .

Le plus haut poids de $\bar{\mathbf{3}}$ est $-\lambda_3$, par unicité. En effet, e_3 est un vecteur de poids $-\lambda_3$. Nous avons $-{}^tE_1e_3 = -{}^tE_2e_3 = -{}^tE_3e_3 = 0$ et

$$\text{Vect}(e_3, -{}^tF_2e_3, -{}^tF_3e_3) = \text{Vect}(e_3, -e_2, -e_1) = \mathbb{C}^3.$$

Donc le plus petit sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^3 contenant e_3 et stable par $-{}^tF_1, -{}^tF_2, -{}^tF_3$ est \mathbb{C}^3 .

Dans la base (I_3, T_8) et après l'identification susdite entre \mathfrak{h} et \mathfrak{h}^* , les poids forment les sommets d'un triangle équilatéral.



Les vecteurs de poids e_1, e_2 et e_3 (pour les poids $-\lambda_1, -\lambda_2$ et $-\lambda_3$) correspondent respectivement aux antiquarks \bar{u} (anti-haut), \bar{d} (anti-bas) et \bar{s} (anti-étrange). La représentation $\bar{\mathbf{3}}$ de $SU(3)$ est pour les physiciens un *triplet* d'antiquarks.

La représentation adjointe de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$.

La représentation adjointe de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ est l'application de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ dans $\mathfrak{gl}(\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}))$ qui à $X \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ associe l'application linéaire $\text{ad } X : Y \mapsto [X, Y] = XY - YX$. Étant de dimension 8, elle est notée $\mathbf{8}$.

La formule (68) montre que les poids de la représentation $\mathbf{8}$ de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ sont exactement, outre le poids nul 0 dont l'ensemble des vecteurs de poids est exactement $\mathfrak{h} - \{0\}$ (donc a multiplicité 2), les six racines $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, -\alpha_1, -\alpha_2$ et $-\alpha_3$, ayant respectivement pour vecteur de poids les (multiples non nuls des) six vecteurs E_1, E_2, E_3, F_1, F_2 et F_3 de la base canonique de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$: pour tout $H \in \mathfrak{h}$ et $i \in \{1, 2, 3\}$, nous avons

$$\text{ad } H (E_i) = [H, E_i] = \alpha_i(H)E_i, \quad \text{ad } H (F_i) = [H, F_i] = -\alpha_i(H)F_i.$$

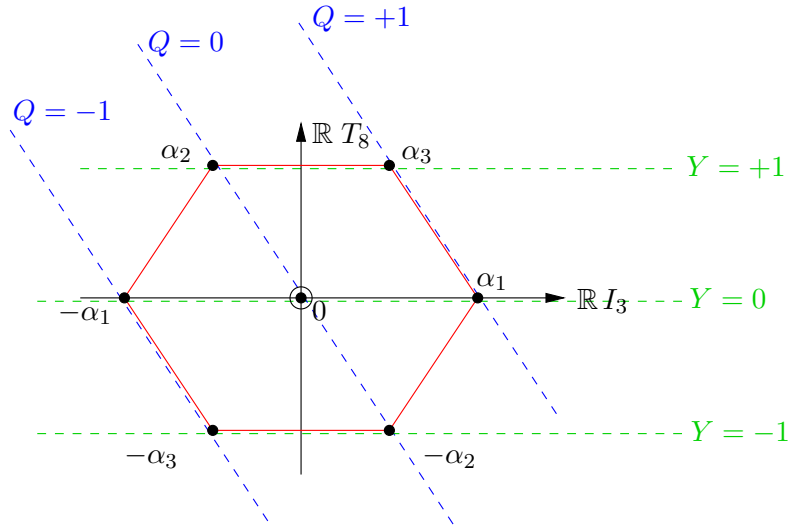
118. Voir la formule (14).

Le plus haut poids de $\mathbf{8}$ est $\alpha_3 = \lambda_1 - \lambda_3$, par unicité. En effet, en utilisant les relations de commutations ci-dessus de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$, nous avons $\text{ad } E_i(E_3) = 0$ pour $i = 1, 2, 3$ et

$$\begin{aligned} & \text{Vect} (E_3, \text{ad } F_1(E_3), \text{ad } F_2(E_3), \text{ad } F_3 \circ \text{ad } F_1(E_3), \text{ad } F_3 \circ \text{ad } F_2(E_3), \\ & \quad \text{ad } F_2 \circ \text{ad } F_3 \circ \text{ad } F_1(E_3), \text{ad } F_1 \circ \text{ad } F_2(E_3), \text{ad } F_2 \circ \text{ad } F_1(E_3)) \\ &= \text{Vect}(E_3, E_2, E_1, F_1, F_2, F_3, H_1, H_2) = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) . \end{aligned}$$

Donc le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ contenant E_3 et stable par $\text{ad } F_1, \text{ad } F_2, \text{ad } F_3$ est $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$.

Dans la base (I_3, T_8) de \mathfrak{h} et après l'identification susdite de \mathfrak{h} et \mathfrak{h}^* , les poids non nuls de $\mathbf{8}$ forment les sommets d'un hexagone régulier. Le poids nul, étant de multiplicité 2, est représenté par un point entouré d'un petit cercle.



Les vecteurs de poids E_1, E_2 et E_3 (pour les poids α_1, α_2 et α_3) correspondent respectivement aux baryons $\Sigma^+ = uus$, neutron $n = ddu$ et proton $p = uud$. Les vecteurs de poids F_1, F_2 et F_3 (pour les poids $-\alpha_1, -\alpha_2$ et $-\alpha_3$) correspondent respectivement aux baryons $\Sigma^- = dds$, $\Xi^0 = ssu$ et $\Xi^- = dss$. Les vecteurs de poids pour le poids nul correspondent aux baryons Λ_0, Σ^0 , tous deux composés de trois quarks uds . La représentation $\mathbf{8}$ de $SU(3)$ est pour les physiciens un *octet* de baryons de spin 1/2, dont les charges et hypercharges se lisent sur le diagramme ci-dessus.

Annexes

A Rappel de vocabulaire sur les groupes

Un *groupe* est un ensemble G muni d'une loi \cdot (souvent notée (sauf dans le cas abélien, voir ci-dessous) par le symbole rien-du-tout pour simplifier) qui est associative,¹¹⁹ possède un élément neutre e ¹²⁰ et dont tout élément x admet un inverse¹²¹ noté x^{-1} . Un *morphisme de groupes* d'un groupe G dans un groupe H est une application $f : G \rightarrow H$ telle que $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous les $x, y \in G$.¹²² Un *isomorphisme* (de groupes, lorsqu'il est utile de préciser) d'un groupe G dans un groupe H est un morphisme de groupes bijectif de G dans H .¹²³

Une partie A d'un groupe G *engendre* G si tout élément de G est produit d'un nombre fini d'éléments de A ou de leurs inverses. Si A est une partie d'un groupe G , le sous-groupe de G *engendré par* A est le plus petit sous-groupe de G contenant A , c'est l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant A , et c'est l'ensemble des produits finis d'éléments de A ou de leurs inverses.

Deux éléments x, y de G *commutent* si $xy = yx$. Le *centre*

$$Z(G) = \{x \in G : \forall y \in G, xy = yx\}$$

de G est le sous-groupe de G formé des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G . Un groupe est *abélien* (ou *commutatif*) si tous ses éléments commutent, auquel cas sa loi est notée $+$, son élément neutre est noté 0 et l'inverse d'un élément x est noté $-x$.

Soit $g \in G$. L'application L_g de G dans G définie par $x \mapsto gx$ s'appelle la *translation à gauche* par g . Elle est bijective, d'inverse $L_{g^{-1}}$. L'application R_g de G dans G définie par $x \mapsto xg$ s'appelle la *translation à droite*¹²⁴ par g . Elle est bijective, d'inverse $R_{g^{-1}}$.

L'application i_g de G dans G définie par $x \mapsto gxg^{-1}$ s'appelle la *conjugaison* par g . Elle vaut l'identité si et seulement si x est dans le centre de G . Deux éléments h et h' de G sont dit *conjugués* s'il existe une conjugaison de G qui envoie h sur h' , c'est-à-dire si et seulement si il existe $g \in G$ tel que $h' = ghg^{-1}$. La relation « être conjugué à » est une relation d'équivalence sur G , dont les classes d'équivalence sont appelées les *classes de conjugaison* de G . On fera bien attention que deux éléments d'un sous-groupe H de G peuvent être conjugués dans G sans être conjugués dans H .

Un sous-groupe H de G est *distingué* (ou *normal*) s'il est invariant par les conjugaisons par tous les éléments de G .¹²⁵ Par exemple, le *noyau* $\text{Ker } f = \{x \in G : f(x) = e\}$ d'un morphisme de groupes $f : G \rightarrow H$ est un sous-groupe distingué de G , car pour tout $g \in G$, nous avons¹²⁶

$$f \circ i_g = i_{f(g)} \circ f.$$

119. Pour tous les $x, y, z \in G$, nous avons $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

120. Pour tout $x \in G$, nous avons $x \cdot e = e \cdot x = x$.

121. Pour tout $x \in G$, nous avons $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.

122. Elle vérifie alors $f(e) = e$ et $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ pour tout $x \in G$.

123. Son application réciproque est alors un morphisme de groupes de H dans G .

124. Il est parfois plus pertinent de considérer $x \mapsto xg^{-1}$ comme la translation à droite par g .

125. c'est-à-dire si $ghg^{-1} \in H$ pour tous les $g \in G$ et $h \in H$

126. puisque $f(gxg^{-1}) = f(g)f(x)f(g)^{-1}$ pour tous les $g, x \in G$

Soient G un groupe (d'élément neutre e) et E un ensemble. Une *action* de G sur E est une application de $G \times E$ dans E notée $(g, x) \mapsto gx$ telle que, pour tous les $x \in E$ et $g, h \in G$, nous avons

- (1) $ex = x$,
- (2) $g(hx) = (gh)x$.

Ainsi pour tout $g \in G$, l'application $x \mapsto gx$ est une bijection de E dans E , d'inverse $x \mapsto g^{-1}x$. Pour simplifier, nous noterons encore g l'application $x \mapsto gx$ lorsque l'action est sous-entendue.

Une action d'un groupe G sur un ensemble E est *transitive* si pour tous les x, y dans E , il existe un élément g de G tel que $y = gx$.

Soit A une partie de E . Nous notons $gA = \{gx : x \in A\}$ l'image de A par g .

Nous dirons qu'un élément $g \in G$ *préserve* (ou laisse invariant) A si $gA \subset A$. Nous dirons qu'un sous-groupe H de G *préserve* (ou laisse invariant) A si h préserve A pour tout $h \in H$, ou, de manière équivalente car H contient les inverses de ses éléments, si $hA = A$ pour tout $h \in H$.

Le *stabilisateur* de A est le sous-groupe de G des éléments $g \in G$ tels que $gA = A$. Le *stabilisateur point par point* (ou *fixateur*) de A est le sous-groupe de G des éléments $g \in G$ tels que $gx = x$ pour tout $x \in A$. Le stabilisateur d'un point x (c'est-à-dire du singleton $\{x\}$) de E est noté G_x . Notons que

$$G_{gx} = g G_x g^{-1} \quad (69)$$

le stabilisateur de l'image de x par g est le conjugué par g du stabilisateur de x .

B Rappel de vocabulaire de calcul différentiel

Nous renvoyons par exemple à [Ave, Car, Cha, Die1] pour cette annexe.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés réels de dimension finie, U, V deux ouverts de E, F respectivement, $f : U \rightarrow V$ une application de classe C^1 et x un point de U .

On note $df_x : E \rightarrow F$ la différentielle de f en x :

$$\forall v \in E, \quad df_x(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x + tv).$$

On note $\text{rk}_x f = \dim \text{Im } df_x$ la dimension de l'image de df_x , appelée le *rang* de f en x . C'est aussi le rang de la matrice de l'application linéaire df_x dans n'importe quelles bases de E et F . On a

$$\text{rk}_x f \leq \min\{\dim E, \dim F\}.$$

Si $F = \mathbb{R}^q$, et si f^1, \dots, f^q sont les composantes de f , alors le rang de f en x est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les formes linéaires $d(f^1)_x, \dots, d(f^q)_x$ dans l'espace vectoriel dual E^* de E . Si $E = \mathbb{R}^p$, alors le rang de f en x est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x^1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^p}(x)$ de F . Si $E = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}^q$ et les bases sont les bases canoniques, la matrice de df_x , qui est, avec i l'indice de ligne et j l'indice de colonne,

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq p}},$$

est appelée la *matrice jacobienne* de f en x . Le rang de f en x est égal au rang de sa matrice jacobienne en x . Si $p = q$, on note $j_x f \in \mathbb{R}$ le déterminant de la matrice jacobienne de f en x , que l'on appelle le *jacobien* de f en x . L'application $j f : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui à $x \in E$ associe $j_x f$ est alors appelée le *jacobien* (ou application jacobienne) de f .

Soit k un élément de $(\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty\}$. On dit qu'une application $f : U \rightarrow V$ de classe C^k est un C^k -difféomorphisme (ou *difféomorphisme* lorsque k est sous-entendu, par exemple $k = \infty$, ce qui sera souvent le cas dans les exercices) si f est bijective et si son inverse est de classe C^k .

Rappelons qu'un *homéomorphisme* entre deux espaces topologiques est une application continue bijective d'inverse continue. En particulier, un C^k -difféomorphisme est un homéomorphisme. Mais par exemple l'application $x \mapsto x^3$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est un homéomorphisme qui est de classe C^∞ , mais qui n'est pas un C^∞ -difféomorphisme (ni même un C^1 -difféomorphisme).

Théorème B.1. (Théorème d'inversion locale) *Soient E et F deux espaces vectoriels normés réels de dimension finie, U un ouvert de E , k un élément de $(\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty\}$ et $f : U \rightarrow F$ une application de classe C^k . Si, en un point x de U , la différentielle $df_x : E \rightarrow F$ est bijective, alors il existe un voisinage ouvert V de x contenu dans U , et un voisinage ouvert W de $f(x)$, tels que $f : V \rightarrow W$ soit un C^k -difféomorphisme.*

Notons que si E et F ont même dimension, alors on peut bien sûr par la linéarité des différentielles remplacer « bijective » par « injective » dans ce résultat. Le corollaire suivant est une application immédiate.

Corollaire B.2. *Une application bijective entre deux ouverts de \mathbb{R}^n , différentiable de classe C^k , dont le jacobien ne s'annule pas, est un C^k -difféomorphisme entre ces ouverts. \square*

Index

- abélien, 120
- action, 121
 - transitive, 121
- ad-alternée, 39
- algèbre
 - de Lie, 24
 - abélienne, 30
 - complexifiée, 26
 - d'un groupe de Lie, 27
 - semi-simple, 30
 - simple, 30
 - somme directe, 25
- angle, 79, 83
- annulateur, 36
- antihermitienne, 18
- antisymétriques, 18
- application
 - d'évaluation, 36
 - de classe C^k , 15
 - exponentielle, 10
 - tangente, 17
- astuce unitaire de Weyl, 108
- auto-adjointe, 8
- automorphisme
 - d'algèbres de Lie, 24
 - de groupes de Lie, 20

- baryon, 4, 116
- base
 - associée, 8
 - canonique, 7, 29, 87
 - de Lorentz, 77
 - orientée, 77
- boost, 79
- boson, 4

- caractère, 66
- centre
 - d'un groupe, 120
 - d'une algèbre de Lie, 33
- classe de conjugaison, 120
- coefficient
 - de Clebsch-Gordan, 65
 - matriciel, 41
- commutatif, 120
- commuter, 30, 120
- complexifié, 26
- complexifiée, 26, 34
- complètement réductible, 32, 42
- cône
 - de lumière, 72
 - affine, 74
 - vectorel, 72
 - isotrope, 72
- conjugaison, 40, 120
- conjugué, 120
- conjuguée, 31, 40
- constante de structure, 29
- coordonnée
 - d'espace, 71
 - de temps, 71
- courbe tracée sur une sous-variété, 16
- crochet de Lie, 24

- d'alembertien, 5
- de type
 - espace, 72, 74
 - lumière, 72, 74
 - temps, 72, 74
 - orienté vers le futur, 72
 - orienté vers le passé, 72
- décomposition
 - de Clebsch-Gordan, 65
 - polaire, 20
- difféomorphisme, 16, 122
- dimension, 15, 31, 40
- distingué, 120
- décomposition de Cartan, 81
- décomposition en espaces de racine, 114

- eightfold way, 116
- elliptique, 79
- endomorphisme, 7
- engendrer, 120
- engendré par, 120
- équivalentes, 31, 40
- espace
 - de racine, 114
 - euclidien standard, 14
 - hermitien standard, 14
 - hyperbolique, 73
 - pseudo-euclidien standard, 14
- espace-temps de Minkowski, 71
- état
 - couplé, 65
 - découplé, 65
- extension de scalaires, 26, 34

- facteur de Lorentz, 81
- fermion, 4
- fixateur, 121
- forme
 - de Killing, 39
 - réelle, 26

générateur infinitésimal, 11, 27
gluon, 6
groupe, 120
 abélien, 120
 commutatif, 120
 de Lorentz, 75
 affine, 84
 restreint, 76
 de Poincaré, 84
 des rotations, 14
 linéaire, 8
 complexe, 8
 réel, 8
 orthogonal, 14
 spécial linéaire, 14
 spécial orthogonal, 14
 spécial unitaire, 14
 unitaire, 14, 41

hadron, 116
hermitienne, 8
hermitique, 8
homéomorphisme, 122
hyperbolique, 79
hyperboloïde
 à deux nappes, 73
 à une nappe, 73

idéale, 30
 triviale, 30
identité de Jacobi, 24
invariant, 32, 41
irréductible, 32, 41
isomorphe, 20, 24
isomorphisme
 d'algèbres de Lie, 24
 de groupes, 120
 de groupes de Lie, 20
 exceptionnel, 56, 90
isospin, 6, 68
 projection, 69
 total, 69
isotrope, 72
jacobien, 122
kaons, 116
lemme de Schur, 100
lepton, 4
loxodromique, 83
lumière, 72
 orienté vers le futur, 72
 orienté vers le passé, 72

matrice
 adjointe, 8
 de Minkowski, 71
 de Pauli, 32
 élémentaire, 7
 jacobienne, 122
morphisme
 d'algèbres de Lie, 24
 de groupes, 120
 de groupes de Lie, 20
 spinorielle, 89
multiplicité, 64, 65, 108, 115
 de spin, 62
méson, 5, 116

nappe
 du futur, 72
 du passé, 72
nilpotente, 13
normal, 120
noyau, 120
nucléon, 4

opérateur
 d'entrelacement, 31, 40
 de Casimir, 53, 54
orthogonal, 74

parabolique, 83
paramétrage local, 15
particule élémentaire, 4
pion, 5
plongement d'algèbre de Lie, 33
poids, 115
 plus haut, 115
produit tensoriel, 37
préserver, 121

quadrivecteur, 71
 de type espace, 72
 de type lumière, 72
 de type temps, 72
 orienté vers le futur, 72
 orienté vers le passé, 72
 orthogonaux, 74
 unitaire, 73
quadrivis, 83
quark, 4

racines, 113
rang, 121
rapidité, 80, 83
relation
 de Gell-Mann-Nishima, 116

- de commutation, 29
- représentation
 - Adjointe, 9, 42
 - adjointe, 9, 33
 - d'algèbre de Lie, 31
 - adjointe, 33
 - coadjointe, 36
 - complexe conjuguée, 35
 - complexifiée, 34
 - complètement réductible, 32
 - conjuguées, 31
 - contragrédiente, 36
 - équivalentes, 31
 - fondamentale, 33
 - irréductible, 32
 - produit direct, 32
 - produit tensoriel, 38
 - restreinte, 32, 41
 - somme directe, 32
 - de groupe de Lie, 40
 - Adjointe, 42
 - coAdjointe, 44
 - complexe conjuguée, 43
 - complètement réductible, 42
 - conjuguées, 40
 - contragrédiente, 43
 - équivalentes, 40
 - fondamentale, 40, 117
 - irréductible, 41
 - produit tensoriel, 45
 - somme directe, 42
 - de spin j , 62
 - tangente, 45
 - unitaire
 - de groupe de Lie, 41
- réseau
 - des poids, 112
 - des racines, 113
- restriction de scalaire, 25
- rotation
 - lumière, 83
 - spatiale, 79
- scalaire de Lorentz, 71
- semi-simple, 30
- simplement connexe, 23
- sous-algèbre
 - de Cartan, 112
 - de Lie, 24
- sous-espace
 - invariant, 32, 41
 - stable, 32, 41
 - trivial, 32
- vectorel
 - de type espace, 74
 - de type lumière, 74
 - de type temps, 74
 - orthogonal, 74
- sous-groupe
 - à un paramètre, 11
 - compact maximal, 81
 - de Cartan, 81
 - de Lie, 20
- sous-variété, 15
 - produit, 17
- spin, 6
- stabilisateur, 121
 - point par point, 121
- surface, 16
- symbole 3- j , 65
- symétrie de saveur, 116
- tenseur
 - métrique, 71
 - pur, 37
- théorème
 - d'inversion locale, 122
 - de décomposition polaire, 20
- trace, 10, 66
- transformation de Lorentz, 76
 - propre, 76
 - orthochrone, 76
 - spéciale, 79
- transitive, 121
- translation
 - à droite, 20, 120
 - à gauche, 20, 120
- trigonaliser, 11
- triplet, 117–119
- unipotente, 13
- unitaire, 73
- vecteur
 - de plus haut poids, 115
 - de poids, 115
- vecteur tangent, 16
- voie octuple, 116

Références

- [Ave] A. Avez. *Calcul différentiel*. Masson, 1983.
- [BdlHV] B. Bekka, P. de la Harpe, and A. Valette. *Kazhdan's property T*. New Math. Mono. **11**, Cambridge Univ. Press, 2008.
- [Bou1] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie : chap. 1*. Hermann, 1972.
- [Bou2] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie : chap. 2 et 3*. Hermann, 1972.
- [Bou3] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie : chap. 4, 5 et 6*. Masson, 1981.
- [Bou4] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie : chap. 7 et 8*. Hermann, 1975.
- [BT] J.-P. Blaizot and J.-C. Tolédano. *Symétries et physique microscopique*. Ellipses, 1997.
- [Car] H. Cartan. *Cours de calcul différentiel*. Hermann, 2nde éd. 1977.
- [CG] Y. Cottingham and D. A. Greenwood. *An Introduction to the Standard Model of Particle Physics*. Cambridge University Press, 2007.
- [Cha] M. Chaperon. *Calcul différentiel et calcul intégral 3e année : Cours et exercices avec solutions*. Dunod, 2008.
- [CSM] R. W. Carter, G. Segal, and I. MacDonald. *Lectures on Lie algebras and Lie groups*. Lond. Math. Soc. Stud. Texts **32**, Camb. Univ. Press 1995.
- [Del] B. Delamotte. *Un soupçon de théorie des groupes : groupes de rotations et groupe de Poincaré*. Notes de cours de M2, Université Paris-Diderot, 2006. HAL <cel-00092924>.
- [Die1] J. Dieudonné. *Éléments d'analyse t. 1 : fondements de l'analyse moderne*. Gauthier-Villars, 1971.
- [Die2] J. Dieudonné. *La géométrie des groupes classiques*. Erg. Math. Grenz., Springer Verlag, 1971.
- [Edm] A. R. Edmonds. *Angular Momentum in Quantum Mechanics*. Princeton Univ. Press, 1996.
- [FH] W. Fulton and J. Harris. *Representation theory. A first course*. Grad. Text Math. **129**, Springer Verlag, 1991.
- [Fuc] J. Fuchs. *Lectures on conformal field theory and Kac-Moody algebras*. In "Conformal field theories and integrable models" (Budapest, 1996), 1–54, Lecture Notes in Phys. **498**, Springer Verlag, 1997, voir aussi <http://arxiv.org/pdf/hep-th/9702194v1.pdf>.
- [FuS] J. Fuchs and C. Schweigert. *Symmetries, Lie Algebras and Representations : A Graduate Course for Physicists*. Cambridge Univ. Press 1997.
- [Gil] R. Gilmore. *Lie Groups, Physics, and Geometry : An Introduction for Physicists, Engineers and Chemists*. Cambridge Univ. Press, 2008.
- [God] R. Godement. *Introduction à la théorie des groupes de Lie, I et II*. Pub. Math. Université Paris VII **011**, 1982.
- [Gou] E.ourgoulhon. *Relativité restreinte : Des particules à l'astrophysique*. Savoirs actuels, EDP Sciences, 2010.
- [Gri] D. Griffiths. *Introduction to elementary particles*. 2nd ed. Wiley, 1987.
- [Hel] S. Helgason. *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*. Academic Press, 1978.
- [Her] D. Hernandez. *An introduction to affine Kac-Moody algebras*. Lecture notes from CTQM Master Class, Aarhus University, Denmark, October 2006. <cel-00112530>.
- [Kle] F. Klein. *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*. Verlag von Andreas Deichert, Erlangen, 1872. Traduction française de Henri Eugène Padé *Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes*, Ann. scien. Éc. norm. sup. 3e série, t. 8, 1891, p. 87–102 et 173–199, reproduite dans *Le Programme d'Erlangen*, Bordas, 1974. Traduction anglaise de M. W. Haskell : *A comparative review of recent researches in geometry*, Bull. New York Math. Soc. **2** (1892-1893), 215–249.

- [Kna] A. W. Knapp. *Lie groups beyond an introduction*. Prog. Math. **140**, 2nd ed., Birkhäuser, 2005.
- [KS] Y. Kosmann-Schwarzbach. *Groupes et symétries : Groupes finis, groupes et algèbres de Lie, représentations*. Éditions de l'École Polytechnique, 2006.
- [Lie1] S. Lie. *Gesammelte Abhandlungen 5-6*. F. Engel, P. Heegard eds, Teubner, 1924-1927.
- [Lie2] S. Lie. *Theory of Transformation Groups 1 : General Properties of Continuous Transformation Groups, a Contemporary Approach and Translation*. J. Merker ed., Springer Verlag 2015.
- [Min] H. Minkowski. *Espace et temps*. Ann. Scien. École Normale Sup. **26** (1909) 499–517.
- [MT] N. Mneimné and F. Testard. *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*. Hermann, 1986.
- [Nab] G. L. Naber. *The Geometry of Minkowski spacetime. An introduction to the mathematics of the special theory of relativity*. Applied Math. Scien. **92**, 2nd ed. Springer-Verlag, 2012.
- [Nis] M. Nishikawa. *On the exponential map of the group $0(p, q)_0$* . Memoirs Fac. Science Kyushu Univ., Ser. A **37** (1983) 63–69.
- [OV] A. L. Onishchik and E. B. Vinberg. *Lie groups and algebraic groups*. Springer Verlag, 1990.
- [Pau1] F. Paulin. *Géométrie différentielle élémentaire*. Notes de cours de première année de mastère, Ecole Normale Supérieure, 2007, voir http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours_geodiff.pdf.
- [Pau2] F. Paulin. *Groupes et géométries*. Notes de cours de seconde année de mastère, Université Paris-Sud, 2014, voir http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours_georiem.pdf.
- [Pau3] F. Paulin. *Topologie algébrique élémentaire*. Notes de cours de première année de mastère, Ecole Normale Supérieure, 2010, voir http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours_topoalg.pdf.
- [Pau4] F. Paulin. *Cours d'agrégation : algèbre et géométrie euclidienne et hermitienne*. Cours d'agrégation Université Paris-Saclay (Orsay), 2020, voir http://www.math.u-psud.fr/~paulin/cours_Agregation.pdf.
- [Poi] H. Poincaré. *Sur la dynamique de l'électron*. Rendic. Circ. Mat. Palermo **21** (1906) 129–176.
- [Por] I. R. Porteous. *Clifford algebras and the classical groups*. Cambridge Stud. Adv. Math. **50**, Cambridge Univ. Press, 1995.
- [Rie] M. Riesz. *Clifford numbers and spinors*. F. Bolinder and P. Lounesto eds, Kluwer Acad. Press, 1993.
- [Sch] E. Scholz. *Introducing groups into quantum theory (1926–1930)*. Historia Math. **33** (2006) 440–490.
- [Ser] J.-P. Serre. *Lie algebras and Lie groups*. Lect. Notes Math. **1500**, Springer-Verlag 1992.
- [Som] A. Sommerfeld. *Zur Relativitätstheorie I : Vierdimensionale Vektoralgebra et Zur Relativitätstheorie II : Vierdimensionale Vektoranalysis*. Ann. Physik **32** (1910) 749–776 et **33** (1910) 649–689.
- [Wal] M. Walton. *Affine Kac-Moody algebras and the Wess-Zumino-Witten model*. In "Conformal field theory" (Istanbul, 1998), Front. Phys. **102**, Adv. Book Program, Perseus Publ. 2000, voir aussi <http://arxiv.org/pdf/hep-th/9911187v1.pdf>.
- [Wig] E. Wigner. *On the Consequences of the Symmetry of the Nuclear Hamiltonian on the Spectroscopy of Nuclei*. Phys. Rev. **51** (1937) 106–119.
- [Zub1] J.-B. Zuber. *Invariances in physics and group theory*. In "Sophus Lie and Felix Klein : the Erlangen program and its impact in mathematics and physics", pp. 307-326, IRMA Lect. Math. Theor. Phys. **23**, Eur. Math. Soc. 2015.

[Zub2] J.-B. Zuber. *Symétries en physique*. Notes de cours de M2, Université Pierre et Marie Curie, 2014, http://www.lpthe.jussieu.fr/~zuber/Cours/M1_14/Symetries-en-physique-2014.pdf.

Frédéric Paulin
Laboratoire de mathématique d'Orsay, UMR 8628 Univ. Paris-Sud CNRS
Université Paris-Saclay, 91405 ORSAY Cedex, FRANCE
courriel : frederic.paulin@math.u-psud.fr