Groupes de Lie et Algèbres de Lie**Introduction**

La théorie des groupes est un domaine de recherche en mathématiques et en physique qui a été initié par des scientifiques tels qu'Évariste Galois, Sophus Lie, John Von Neumann et Paul Dirac. Ces scientifiques ont tous apporté des contributions importantes au développement de cette théorie, notamment en ce qui concerne la symétrie continue, les groupes de transformations et les applications en physique.

Leurs travaux ont jeté les bases de la théorie des groupes, qui continue d'être un domaine de recherche dynamique et important aujourd'hui. Les groupes de Lie sont nommés ainsi en l'honneur du mathématicien norvégien Sophus Lie, qui les a introduits afin d'étudier certaines propriétés des équations différentielles telle que La théorie de groupes de Lie qui décrit la symétrie continue (en) en mathématiques.

I. Propriétés infinitésimales des groupes de Lie**1.1. Définition (Groupe de Lie)**

Un groupe de Lie G est un groupe topologique, localement compact, qui est également une variété différentielle c'est-à-dire un espace localement euclidien où l'on peut définir des notions telles que la dérivée, l'intégration, etc... et telle que les applications de multiplication et de passage à l'inverse sont de classe $\mathbb{C}^\infty$.

La loi de groupe de Lie est une opération binaire qui combine deux éléments d'un groupe de Lie pour en produire un troisième. Cette opération est généralement notée " $*$ ". La loi de groupe de Lie doit satisfaire certaines propriétés pour que le groupe soit considéré comme un groupe de Lie

1.2. Sous groupes de Lie

Un sous-groupe de Lie est un sous-groupe d'un groupe de Lie qui est lui-même un groupe de Lie. Dans la physique fondamentale, nous utilisons les groupes de Lie de $GL_n(\mathbb{C})$ et surtout les groupes spéciaux unitaires $SU_n(\mathbb{C})$. Un sous-groupe de Lie est muni d'une structure de variété différentielle telle que les opérations de groupe sont des fonctions lisses. D'une manière plus générale, toute sous-variété différentielle régulière d'un groupe de Lie est un sous-groupe de Lie. Les sous-groupes de Lie ont des propriétés intéressantes qui permettent de les étudier de manière approfondie.

Exemples

Un exemple simple de sous-groupe de Lie est le cercle unité S^1 , qui est un sous-groupe de Lie muni de la multiplication euclidienne.

Un exemple concret de sous-groupe de Lie est le groupe spécial linéaire $SL(n, \mathbb{R})$, qui est le groupe des matrices réelles $n \times n$ ayant un déterminant égal à 1. Ce groupe est un sous-groupe de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$, le groupe des matrices réelles $n \times n$ inversibles, muni de la multiplication matricielle. $SL(n, \mathbb{R})$ est un sous-groupe de Lie car il est fermé dans $GL(n, \mathbb{R})$ et il est muni d'une structure de variété différentielle régulière induite par l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Les opérations de groupe de $SL(n, \mathbb{R})$ (multiplication et inversion) sont des fonctions lisses par rapport à cette structure.

1.2. Définition (Algèbre de Lie)

D'une manière cohérente, une algèbre de Lie est un espace vectoriel muni d'une opération bilinéaire appelée crochet de Lie, qui satisfait certaines propriétés algébriques.

Le crochet de Lie mesure la non-commutativité de l'opération binaire associée au groupe de transformations, et il permet de décrire la structure interne du groupe de manière abstraite sans faire référence aux éléments concrets de l'algèbre.

Cette structure peut ensuite être utilisée pour étudier les propriétés de symétrie et de transformation continue associées au groupe de transformations correspondant

Si g est une algèbre de Lie, alors le crochet de Lie est une application bilinéaire, qui à chaque paire d'éléments (X, Y) lui a associé un nouvel élément $[X, Y]$ de g

Cette opération doit satisfaire les propriétés suivantes :

1. **Antisymétrie** : $[X, Y] = -[Y, X]$ pour tout X, Y dans g .
2. **Identité de Jacobi** : $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ pour tout X, Y, Z dans g .
3. **Linéarité à droite** : $[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]$ pour tout X, Y, Z dans g et a, b dans le corps sur lequel est définie l'algèbre.

Exemples :

Soit V un espace vectoriel, alors $gl(V) = \text{End}(V)$ muni du crochet $[a, b] = ab - ba$ est une algèbre de Lie.

Le sous-espace $sl(V) = \{x \in gl(V) : tr(x) = 0\}$ est une sous-algèbre de Lie.

1.2. Propriétés infinitésimales des groupes de Lie

Les propriétés infinitésimales des groupes de Lie sont essentielles pour comprendre comment ces groupes agissent localement sur des variétés différentielles. Voici quelques-unes des propriétés infinitésimales importantes des groupes de Lie :

1. Algèbre de Lie: Les groupes de Lie sont associés à une algèbre de Lie, qui est un espace vectoriel muni d'une opération de crochet de Lie. Le crochet de Lie capture la structure infinitésimale du groupe.

2. Exponentielle de Lie : L'exponentielle de Lie est une fonction qui associe un élément de l'algèbre de Lie à un élément du groupe de Lie lui-même. Elle permet de passer des transformations infinitésimales aux transformations finies.

3. Générateurs de groupe : Les éléments de l'algèbre de Lie agissent comme des générateurs infinitésimaux des transformations du groupe. Ils sont utilisés pour construire des transformations infinitésimales.

4. Vecteurs tangents : Les éléments de l'algèbre de Lie sont les vecteurs tangents en l'identité du groupe de Lie. Ils représentent les déplacements infinitésimaux le long des trajectoires du groupe.

5. Équations de structure : Les groupes de Lie sont caractérisés par leurs équations de structure, qui décrivent comment les vecteurs tangents commutent. Ces équations reflètent la géométrie sous-jacente du groupe.

6. Connexions de groupe de Lie : Les connexions de groupe de Lie sont des connexions différentielles spéciales sur les fibrés principaux associés aux groupes de Lie. Elles sont utilisées pour définir la notion de transport parallèle sur ces fibrés.

Ces propriétés infinitésimales jouent un rôle crucial dans la théorie des groupes de Lie et sont fondamentales pour la compréhension des symétries et des transformations continues en mathématiques et en physique

1.2.1. Algèbre de Lie définie par un groupe de Lie

L'algèbre de Lie définie par un groupe de Lie est une construction mathématique qui permet d'associer à chaque groupe de Lie une algèbre de Lie, qui est une structure algébrique qui capture l'essence de la géométrie de ce groupe, c'est-à-dire un groupe continu et différentiable muni d'une structure de variété différentielle. L'algèbre de Lie ainsi définie est une algèbre de Lie réelle, c'est-à-dire

une algèbre vectorielle réelle munie d'une opération de Lie. Elle est souvent notée $\mathfrak{g}$, et on parle de l'algèbre de Lie associée à G .

Les groupes de Lie et les algèbres de Lie sont étroitement liés car chaque groupe de Lie est associé à une algèbre de Lie qui capture l'essence de sa géométrie. D'une façon générale, l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie est l'ensemble des vecteurs tangents à ce groupe en l'identité, muni d'une opération de crochet de Lie qui permet de décrire les transformations infinitésimales de ce groupe autour de son identité.

1.2.2. Application exponentielle de groupes de Lie et Algèbre de Lie

L'exponentielle d'un groupe de Lie est généralement définie par une série de Taylor, où chaque terme de la série est une puissance de l'argument de la fonction. La forme de la série de Taylor dépend du groupe de Lie considéré et de la structure de son algèbre de Lie. Cependant, pour les groupes de Lie simples telles-que $SU(2)$ ou $SO(3)$, l'exponentielle peut être calculée explicitement à l'aide de formules trigonométriques.

L'application exponentielle prend un élément de l'algèbre de Lie et le transforme en un élément du groupe de Lie en utilisant une courbe intégrale.

Plus précisément, soit X un élément de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G . Nous considérons la courbe.

$$c(t) = \exp(tX),$$

t : est un paramètre réel. Cette courbe est une courbe de groupe de Lie qui *satisfait*.

$$c(0) = e$$

e : est l'identité du groupe G L'application exponentielle est alors définie comme :

$$\exp(X) = c(1) .$$

L'application exponentielle est une bijection locale, c'est-à-dire que pour tout élément X de l'algèbre de Lie, il existe un voisinage U de l'identité dans G tel que l'application exponentielle soit une bijection de l'ensemble des vecteurs tangents en l'identité de U à U .

Cela signifie que l'on peut définir une application inverse locale appelée l'application logarithmique, qui à tout élément de G près de l'identité associe un élément de l'algèbre de Lie. L'application

exponentielle est donc une façon de passer de la description locale du groupe de Lie à la description globale, et l'application logarithmique est la réciproque de cette transformation.

L'exponentielle de l'algèbre de Lie de Pauli peut être écrite explicitement en termes de matrices de Pauli, qui sont définies comme suit :

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'exponentielle de l'algèbre de Lie de Pauli est donnée par la formule suivante :

$$\exp(i\theta(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})/2) = \cos(\theta/2)I + i(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})\sin(\theta/2)$$

Où $\mathbf{a}$ est un vecteur réel de trois composantes, θ est un paramètre réel et I est la matrice identité. Cette formule permet de transformer un élément algébrique de $SU(2)$ en un élément du groupe lui-même.

1.2.3. Espace tangent de toutes les courbes autour de l'identité de tous les groupes

Pour tout groupe de Lie G , l'espace tangent de toutes les courbes autour de l'identité est l'algèbre de Lie de G , notée $\mathfrak{g}$. Cet espace est constitué de tous les vecteurs tangents à G en l'identité, c'est-à-dire de toutes les dérivées tangentes possibles à des courbes passant par l'identité de G . Ces vecteurs tangents peuvent être combinés via l'opération de crochet de Lie pour obtenir d'autres vecteurs tangents. Cette opération décrit comment les vecteurs tangents évoluent le long des courbes infinitésimales dans le groupe de Lie, et est essentielle pour comprendre la géométrie de G .

Exemple

Soit $G = (\mathbb{R}^*, \times)$, le groupe multiplicatif des nombres réels non nuls avec l'opération de multiplication. Dans ce cas, l'élément identité est 1. Pour trouver l'espace tangent nous devons considérer les courbes passant par l'identité au temps de cette courbure

$$c(t) = e^t$$

e : est la constante d'Euler (~ 2.718) et t est le paramètre réel.

$$\text{en } t = 0 \quad c'(0) = e^0 = 1.$$

D'une manière générale, pour le groupe multiplicatif des nombres réels non nuls $(\mathbb{R}^*, \times)$, l'espace tangent à l'identité est $T_1(\mathbb{R}^*) = \{k * 1 \mid k \in \mathbb{R}\}$

où $\mathbf{1}$ représente le vecteur tangent à la courbe

$$c(t) = e^t \text{ en } t = 0$$

$k * \mathbf{1}$ Représente une multiplication scalaire de ce vecteur tangent.

Remarque

• **Le groupe de Lie $U(n)$** : est l'ensemble des *matrices* $n \times n$ unitaires, où T désigne la transposition conjuguée et I la matrice identité. C'est un groupe de Lie compact.

• **Le groupe de Lie $SU(n)$** : est le sous-groupe de $U(n)$ des matrices unitaires de déterminant 1, c'est-à-dire des matrices X telles que $XX^T = I$ et $Det(X) = 1$.

• **Le groupe de Lie $SO(n)$** : est l'ensemble des matrices $n \times n$, orthogonales, c'est-à-dire des matrices X telles que $XX^T = I$ et $Det(X) = 1$, où T désigne la transposition. C'est un groupe de Lie non compact.

Remarque : Les matrices carrées unitaires à coefficients réels sont les matrices orthogonales.

• **Le groupe de Lie $SL(n, R)$** : est le groupe spécial linéaire, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $n \times n$ de déterminant 1 à coefficients réels.

• **Le groupe de Lie $SL(n, C)$** : est le sous-groupe de $GL(n, C)$ des matrices de déterminant 1, c'est-à-dire des matrices X telles que $Det(X) = 1$. C'est un groupe de Lie non compact.

Donc une algèbre $\mathfrak{g}$ (qui sont respectivement contenues dans une algèbre de Lie) est dite compacte si elle est l'algèbre d'un groupe de Lie compact. Il vient que, l'espace tangent de toutes les courbes autour de l'identité d'un groupe de Lie est l'algèbre de Lie associée à ce groupe.

1.3. Types de groupes de Lie

Les groupes de Lie sont classés selon leurs propriétés algébriques (Abélien, simple, semi-simple, résoluble), ou bien topologiques (connexe, simplement connexe, compact). Il existe plusieurs types de groupes de Lie, classés en fonction de leur structure et de leurs propriétés.

• **Groupes de Lie simples** : Ce sont des groupes de Lie qui ne peuvent pas être décomposés en un produit de groupes de Lie plus simples.

Les groupes de Lie simples sont d'une importance particulière en physique théorique et en mathématiques, car ils constituent les blocs de construction de nombreux autres groupes de Lie.

- **Groupes de Lie semi-simples** : Ce sont des groupes de Lie qui peuvent être décomposés en un produit de groupes de Lie simples.

- **Groupes de Lie compacts** : Ce sont des groupes de Lie pour lesquels l'ensemble des éléments du groupe est borné

- **Groupes de Lie non-compacts** : Ce sont des groupes de Lie pour lesquels l'ensemble des éléments du groupe n'est pas borné.

Les groupes de Lie non-compacts sont souvent associés aux symétries continues. [8]

- **Groupes de Lie nilpotents** : Ce sont des groupes de Lie pour lesquels toutes les valeurs de leur algèbre de Lie sont nulles.

Les groupes de Lie nilpotents sont utilisés pour décrire les mouvements d'objets mathématiques tels que les surfaces.

- **Groupes de Lie solvables** : Ce sont des groupes de Lie pour lesquels il existe une suite finie de sous-groupes, chacun étant un groupe de Lie nilpotent, qui conduit au groupe de Lie complet.

II. Théorèmes de Lie

Les théorèmes de Lie sont des résultats important dans la théorie des groupes de Lie et ont des applications significatives en mathématiques et en physique.

2.1 Théorème 1 (Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt)

Ce théorème énonce que tout groupe de Lie peut être engendré par les éléments de son algèbre de Lie. En d'autre termes, les éléments de l'algèbre de Lie du groupe de Lie sont suffisant pour générer le groupe de manière finie. Il fournit une méthode pour exprimer les éléments du groupe de Lie en termes de séries formelles d'éléments de l'algèbre de Lie.

Exemple : Considérons le groupe de Lie des translations dans l'espace euclidien à une dimension, noté $\mathbb{R}$. Les éléments de cet espace vectoriel correspondent aux translations, c'est-à-dire aux déplacements le long de la droite réelle. L'algèbre de Lie de ce groupe est également $\mathbb{R}$, car la somme de deux translations est encore une translation, et le commutateur de deux translations est nul.

En utilisant le premier théorème de Lie, nous pouvons montrer que toutes les translations dans $\mathbb{R}$ peuvent être engendrées par un seul élément de l'algèbre de Lie, qui est simplement le vecteur unité, 1.

Cela signifie que tout déplacement dans $\mathbb{R}$ peut être obtenu en répétant la translation d'une unité le long de la droite réelle.

2.2. Théorème 2 (Théorème de Lie sur intégration locale)

Ce théorème concerne l'existence et l'unicité des groupes de Lie locaux, c'est-à-dire des groupes de Lie dont l'algèbre de Lie est donnée. Il précise les conditions sous lesquelles une algèbre de Lie locale peut être intégrée en un groupe de Lie.

Exemple : Considérons l'algèbre de Lie $\mathbb{R}^2$ avec le crochet de Lie usuel. Les éléments de cette algèbre de Lie sont des paires ordonnées (x, y) , où x et y sont des réels. Le crochet de Lie de deux éléments (x_1, y_1) et (x_2, y_2) est défini comme :

$$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = (0, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Cette algèbre de Lie correspond à une certaine structure mathématique, mais peut-elle être intégrée en un groupe de Lie ? Le deuxième théorème de Lie répond à cette question.

En utilisant le deuxième théorème de Lie, on peut montrer que l'algèbre de Lie $\mathbb{R}^2$ est localement intégrable. Cela signifie que, localement, autour de l'élément neutre $(0, 0)$, il existe un groupe de Lie. Cependant, il n'est pas possible de construire un groupe de Lie global à partir de cette algèbre de Lie, car la structure globale ne peut pas être définie de manière cohérente.

Cela illustre l'idée de l'intégration locale d'une algèbre de Lie. Dans cet exemple, localement, autour de l'élément neutre, nous pouvons construire un groupe de Lie, mais cette construction ne peut pas être étendue de manière globale.

Cet exemple simplifié démontre comment le deuxième théorème de Lie est utilisé pour examiner la possibilité d'intégrer localement une algèbre de Lie en un groupe de Lie.

2.3. Théorème 3 (Théorème de Cartan-Kuranishi)

Ce théorème traite de la décomposition d'un groupe de Lie en ses sous groupes de Lie compacts et solubles. Il établit que tout groupe de Lie est isomorphe à un produit semi direct de son sous groupe compact et de son sous groupe soluble.

Exemple : Considérons le groupe de Lie $SO(3)$, qui est le groupe des rotations tridimensionnelles. Il est constitué de toutes les rotations autour de l'origine dans l'espace à trois dimensions.

1. Sous-groupe Compact : Le sous-groupe compact de $SO(3)$ est le groupe spécial des rotations $SO(3)$, également noté $SO(3)$. C'est le groupe des rotations qui préservent l'orientation. $SO(3)$ est compact, ce qui signifie qu'il est fermé et borné.

2. Sous-groupe Solvable : Le sous-groupe solvable de $SO(3)$ est le groupe des rotations autour d'un axe fixe, par exemple, les rotations autour de l'axe z . Ce groupe est isomorphe au groupe des réels $\mathbb{R}$, qui est solvable.

Le théorème de Cartan-Kuranishi nous dit que le groupe de Lie $SO(3)$ peut être décomposé en un produit semi-direct de $SO(3)$ et $\mathbb{R}$. Cela signifie que toutes les rotations dans $SO(3)$ peuvent être obtenues en combinant une rotation dans $SO(3)$ (qui préserve l'orientation) avec une rotation autour de l'axe z (qui est solvable).

En d'autres termes, ce théorème montre comment $SO(3)$ peut être décomposé en ses parties compactes et solvables. Cette décomposition est utile pour comprendre la structure et les propriétés du groupe $SO(3)$ et est un exemple de l'application du troisième théorème de Lie.

III. Théorème de Taylor pour les groupes de Lie

Le théorème de Taylor pour les groupes de Lie est une généralisation du théorème de Taylor classique de l'analyse réelle aux fonctions sur un groupe de Lie. Il permet de développer une fonction autour de l'identité du groupe en termes de ses éléments infinitésimaux. Le théorème de Taylor pour les groupes de Lie est essentiel dans l'étude des variations locales des fonctions sur ces groupes et est particulièrement utile dans le contexte des équations différentielles sur les groupes de Lie.

La forme générale du théorème de Taylor pour les groupes de Lie peut être exprimée comme suit. Soit $\mathbf{G}$ un groupe de Lie et e son élément neutre (l'identité). Soit $f : \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbf{G}$. Le théorème de Taylor de première ordre pour les groupes de Lie s'exprime comme suit:

$$f(g) \approx f(e) + Df(e)(X), \text{ où}$$

g : est un élément proche de l'identité e dans le groupe $\mathbf{G}$,

$f(e)$: est la valeur de la fonction en l'identité,

$Df(e)$: est la dérivée de f en l'identité une forme linéaire sur l'algèbre de Lie de $\mathbf{G}$,

X : est un élément de l'algèbre de Lie de $\mathbf{G}$ qui approxime la différence $(g - e)$.

Ce théorème généralise la formule de Taylor standard de l'analyse réelle en introduisant l'idée d'une dérivée dans le contexte d'un groupe de Lie. Il permet de comprendre comment les fonctions sur un groupe de Lie varient localement autour de l'identité en termes des éléments infinitésimaux de l'algèbre de Lie du groupe. Cela est particulièrement utile dans le cadre des équations différentielles sur les groupes de Lie, où les variations locales des fonctions sont cruciales pour la résolution des équations.

Exemple: Pour illustrer le théorème de Taylor pour les groupes de Lie, nous pouvons considérer le groupe de Lie $SO(2)$, qui représente les rotations dans le plan. $SO(2)$ est isomorphe à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, où $\mathbb{R}$ est la droite réelle et $2\pi\mathbb{Z}$ est le groupe des multiples entiers de 2π . En d'autres termes, $SO(2)$ représente les rotations autour de l'origine dans le plan.

Soit $f : SO(2) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $SO(2)$ et e l'élément neutre de $SO(2)$, qui est l'identité représentant l'absence de rotation.

Le théorème de Taylor de première ordre pour les groupes de Lie autour de l'identité s'exprime comme suit :

$$f(g) \approx f(e) + Df(e)(X),$$

où g est une rotation proche de l'identité, $f(e)$ est la valeur de la fonction à l'identité (pas de rotation), $Df(e)$ est la dérivée de f à l'identité, et X est un élément de l'algèbre de Lie de $SO(2)$.

L'algèbre de Lie de $SO(2)$ est $\mathbb{R}$, car il s'agit d'un groupe abélien simple. Ainsi, X est un réel représentant l'angle de rotation infinitésimal.

Supposons que la fonction $f(g)$ soit simplement la projection d'un point (x, y) dans le plan sur l'axe x après une rotation g dans $SO(2)$. La fonction $f(g) = x'$ après la rotation g est donnée par :

$$x' = \cos(\theta) * x - \sin(\theta) * y,$$

où θ est l'angle de rotation.

En utilisant le théorème de Taylor, nous pouvons développer $f(g)$ autour de l'identité e , où θ est proche de zéro (petite rotation). La dérivée de $f(e)$ est alors :

$$Df(e)(X) = D(\cos(\theta) * x - \sin(\theta) * y) / D\theta |_{\theta=0} = -x \sin(0) - y \cos(0) = -x.$$

Par conséquent, le développement de Taylor de $f(g)$ autour de l'identité est :

$$f(g) \approx f(e) + Df(e)(X) = f(e) - x.$$

Cela signifie que, pour une petite rotation g autour de l'identité, la valeur de $f(g)$ est approximativement égale à la valeur de $f(e)$ (pas de rotation) moins x , ce qui représente le déplacement horizontal causé par la petite rotation.

Ce simple exemple illustre comment le théorème de Taylor pour les groupes de Lie permet de développer une fonction autour de l'identité du groupe en utilisant des éléments infinitésimaux de l'algèbre de Lie.