Généralités sur les Représentations de groupes

Introduction

L'idée générale de la théorie des représentations est d'essayé d'étudier un groupe G en le faisant agir sur un espace vectoriel de manière linéaire. Autrement dit, une représentation d'un groupe est un moyen de voir un groupe comme un groupe de matrices inversible dans le but de comprendre certaines propriétés du groupe à l'aide des propriétés des matrices associées.

I. Représentations

1.1. <u>Définitions</u>

1. On appelle représentation d'un groupe G notée $\Gamma(G)$ un homomorphisme de G dans le sous groupe des transformations linéaires $GL(\mathbf{R})$ dans un espace vectoriel $\mathbf{R}$. En d'autres termes:

si $G = \{E, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ un groupe fini d'ordre n, une représentation de G consiste à associée à chaque élément de G une matrice de dimension égale à la dimension de l'espace considéré.

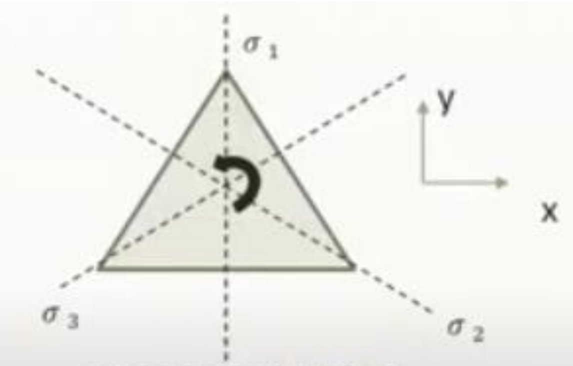
$$E \rightarrow \Gamma(E), \quad a_1 \rightarrow \Gamma(a_1), \quad a_2 \rightarrow \Gamma(a_2), \dots, a_n \rightarrow \Gamma(a_n),$$

où Γ est l'homomorphisme du groupe G dans $GL(\mathbf{R})$.

2. Si $*$ est l'opération interne dans $GL(\mathbf{R})$ et (.) celle de G on a

- $\Gamma(a_1 . a_2) = \Gamma(a_1) * \Gamma(a_2)$
- $\Gamma(E) = I$ **(matrice identité)**
- $\Gamma(a_1)^{-1} = \Gamma^{-1}(a_1)$

1.2. <u>Représentation du groupe de symmetries du triangle équilatéral dans l'espace cartésien</u> R^2



Triangle équilatéral

	e	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
e	e	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
C_3	C_3	C_3^2	e	σ_2	σ_3	σ_1
C_3^2	C_3^2	e	C_3	σ_3	σ_1	σ_2
σ_1	σ_1	σ_3	σ_2	e	C_3^2	C_3
σ_2	σ_2	σ_1	σ_3	C_3	e	C_3^2
σ_3	σ_3	σ_2	σ_1	C_3^2	C_3	e

On rappelle que dans l'espace R^2, un point M est représenté par un couple $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. **Une** transformation T dans le plan R^2 associée au point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le point $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ **où** x', y' sont déterminés selon la transformation T.

1.2.1. <u>Cas d'une rotation d'angle θ</u>

Si T est une rotation d'angle θ, alors

$T: M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ **tels-que** $\begin{cases} x' = \cos\theta\, x - \sin\theta\, y \\ y' = \sin\theta\, x + \cos\theta\, y \end{cases}$

La matrice associée à cette transformation est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

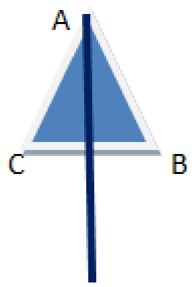
Prenons comme exemple l'élément neutre e du groupe C_{3v}.

e: C'est la transformation qui consiste à ne rien faire. Elle peut être vue comme une rotation d'angle zéro. La matrice associée à cette rotation est $\begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc la représentation de e dans R^2 est donnée par $\Gamma(\mathrm{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On suit la même technique pour les autres rotations du groupe C_{3v}

1.2.2. <u>Cas d'une réflexion</u>



σ_1

Si on considère l'inversion σ_1 par rapport à l'axe passant par le sommet A.

C'est une transformation qui laisse le point A inchangé et qui interverti les points B **et** C

$\sigma_1: T: M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tels-que $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

σ_1**:** C'est une transformation qui joue le rôle d'une symétrie axiale par rapport à l'axe passant par A et perpendiculaire **à** $[BC]$ **.** La matrice associée à cette transformation est $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc: $\Gamma(\sigma_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.3. Représentation fidèle

Une représentation $\boldsymbol{\Gamma}$ est dite fidèle **si** $\forall\, \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \in \boldsymbol{G}$: $\boldsymbol{\Gamma(a_1)} = \boldsymbol{\Gamma(a_2)} \rightleftarrows \boldsymbol{a_1 = a_2}$.

Dans l'exemple précédent il s'agit d'une représentation fidèle.

1.4. Représentation équivalente

Soient $\boldsymbol{\Gamma(G)}, \boldsymbol{\Gamma'(G)}$ deux représentations d'un groupe $\boldsymbol{G}$.

$\boldsymbol{\Gamma}$ **et** $\boldsymbol{\Gamma'}$ sont dites équivalentes s'il existe une matrice inversible $\boldsymbol{S}$ telle-que pour tout $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{G}$

$$\boldsymbol{\Gamma(G) = S\,\Gamma'(G)S^{-1}}$$

c.a.d., que l'on peut passer d'une représentation à l'autre par un changement de repère. La matrice $\boldsymbol{S}$ lorsqu'elle existe elle s'appelle la matrice de changement de repère.

Explication

Soit $\boldsymbol{\Gamma}$ une représentations d'un groupe $\boldsymbol{G}$ et soit $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{G}$, donc il existe une matrice linéaire $\boldsymbol{A}$ telle-que $\boldsymbol{\Gamma(a) = A}$. Comme $\boldsymbol{A}$ est une transformation linéaire donc pour chaque vecteur $\boldsymbol{X}$ il existe un vecteur Y tel-que $\boldsymbol{A\,X = Y}$. Soit $\boldsymbol{S}$ la matrice de changement de repère et soient $\boldsymbol{X'}$, $\boldsymbol{Y'}$, $\boldsymbol{\Gamma'(a)}$ les images de $\boldsymbol{X, Y, \Gamma(a)}$ par $\boldsymbol{S}$. On a alors, $\boldsymbol{X' = SX}$, $\boldsymbol{Y' = SY}$, $\boldsymbol{\Gamma'(a) = S\Gamma(a)}$, $\boldsymbol{X = S^{-1}X'}$. Il en résulte que , $\boldsymbol{Y' = SY = SA\,X = SAS^{-1}X' = (S\Gamma(a)S^{-1})X' = \Gamma'(a)\,X'}$

$$\text{donc } \boldsymbol{\Gamma'(a) = S\Gamma(a)S^{-1}}$$

1.5. Caractère d'une représentation

1.5.1. Définition

On appelle caractère d'un élément $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{G}$ dans la représentation $\boldsymbol{\Gamma}$, la trace de la matrice qui lui est associée. On note le caractère d'un élément $\boldsymbol{a}$ par $\boldsymbol{\chi(a)}$ **et on écrit** $\boldsymbol{\chi(a) = Tr(\Gamma(a))}$.

1.5.2. Propriétés

1. Deux représentations équivalentes ont les mêmes caractères.

2. deux éléments d'une même classe possèdent les mêmes caractères.

Preuves

1. Soient $\boldsymbol{\Gamma(a)}, \boldsymbol{\Gamma'(a)}$ deux représentations équivalentes. On aura besoin de la propriété importante de la trace d'une matrice $\boldsymbol{Tr(A.B) = Tr(B.A)}$.

$\chi^{'}(a) = Tr(\Gamma'(a)) = Tr(S\Gamma(a)S^{-1}) = Tr(SS^{-1}\Gamma(a)) = Tr(\Gamma(a)) = \chi(a).$

2. Si a, b appartiennent à la même classe donc ils sont conjugués. Il existe $x \in G$ tel-que

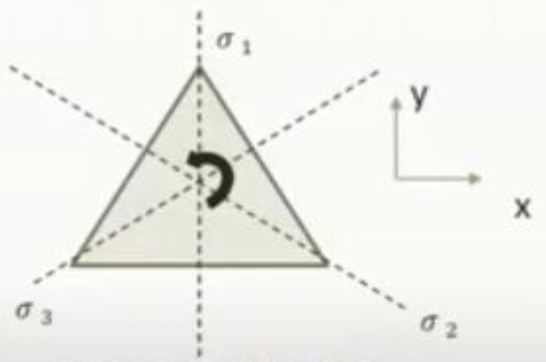
$$\mathbf{b} = xax^{-1}$$

On pose $\Gamma(\mathrm{a}) = \mathbf{A}$ **et** $\Gamma(\mathbf{b}) = \mathbf{B}$**. On a**

$$\mathbf{B} = \Gamma(xax^{-1}) = \Gamma(x)\,\Gamma(a)\,\Gamma(x^{-1}) = \Gamma(x)\,\Gamma(a)\,\Gamma(x)^{-1}$$

$$\chi(b) = Tr(\Gamma(x)\,\Gamma(a)\,\Gamma(x)^{-1}) = Tr(\Gamma(x)\,\Gamma(x)^{-1}\Gamma(a)\,) = Tr(\Gamma(a)\,) = Tr(\mathrm{A}\,) = \chi(a).$$

Exemple



Triangle équilatéral

	e	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
e	e	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
C_3	C_3	C_3^2	e	σ_2	σ_3	σ_1
C_3^2	C_3^2	e	C_3	σ_3	σ_1	σ_2
σ_1	σ_1	σ_3	σ_2	e	C_3^2	C_3
σ_2	σ_2	σ_1	σ_3	C_3	e	C_3^2
σ_3	σ_3	σ_2	σ_1	C_3^2	C_3	e

Nous avons déterminé dans la série N° 2 les représentations des elements de ce groupe sont :

$$\Gamma(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma(C_3^1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \Gamma(\mathrm{C}_3^2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \Gamma(\sigma_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma(\sigma_2) = \begin{pmatrix} +\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \Gamma(\sigma_3) = \begin{pmatrix} +\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Les classes d'équivalences sont : $\{e\}, \{(C_3^1, \mathrm{C}_3^2\ \}, \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_2\ \}.$

On a $\chi(e) = Tr\Gamma(e) = 2.$

On peut facilement vérifier que les elements d'une même classe ont les mêmes caractères en calculant les traces des matrices associées.

$\chi(C_3^1) = \chi(\mathrm{C}_3^2) = -1$

$\chi(\sigma_1) = \chi(\sigma_1) = \chi(\sigma_3) = \mathbf{0}$.

II. Représentations réductibles et irréductibles

2.1. Notion de sous espace invariant et représentation réductible

Définition

Soit $\mathbf{\Gamma}$ une représentation d'un groupe $\boldsymbol{G}$ dans un espace vectoriel $\boldsymbol{R^n}$ de dimension $\boldsymbol{n}$.

S'il existe un sous espace $\boldsymbol{R_1}$ de dimension $\mathbf{m} < n$ tel-que $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R_1}$, $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{a}).\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R_1}, \forall \mathbf{a} \in \mathbf{G}$,

alors $\boldsymbol{R_1}$ est dit un sous espace invariant. Alors la matrice associée à un élément quelconque $\mathbf{a} \in \mathbf{G}$ **peut** se mettre sous la forme :

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma_1} & \boldsymbol{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Gamma_2} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{\Gamma_1}$	Une matrice de dimension	$n \times m$
$\mathbf{\Gamma_2}$	//	$(n-m) \times (n-m)$
$\boldsymbol{T}$	//	$n - m \times m$

$\mathbf{\Gamma_1}, \mathbf{\Gamma_2}, \boldsymbol{T}$ sont des blocs matricielles.

On doit avoir ce zéro qui désigne la matrice pour pouvoir avoir $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{a}).\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R_1}$

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma_1} & \boldsymbol{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Gamma_2} \end{pmatrix}$$

2.2. Représentation reductible-irreductible

- Si $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma_1}(\mathbf{a}) & \boldsymbol{T}(\mathbf{a}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Gamma_2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$, $\forall \mathbf{a} \in \mathbf{G}$, alors la représentation est dite réductible.
  - Si de plus l'espace $\boldsymbol{R_2}$ est invariant donc indépendant de $\boldsymbol{R_1}$,alors $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma_1}(\mathbf{a}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Gamma_2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$

    $\forall \mathbf{a} \in \mathbf{G}$, alors la représentation est dite completement réductible.

    $\mathbf{\Gamma_1}(\mathbf{a})$ est la représentation de l'élément a dans $\boldsymbol{R_1}$,

    $\mathbf{\Gamma_2}(\mathbf{a})$ est la représentation de l'élément a dans $\boldsymbol{R_2}$.

- Si $\mathbf{\Gamma_1}, \mathbf{\Gamma_2}$ ne peuvent pas être réduites davantage alors $\mathbf{\Gamma_1}, \mathbf{\Gamma_2}$ sont dites representations irreducible de G (notées R.I).
- Les dimensions des représentations irréductibles sont en relation avec l'ordre du groupe.

2.3. <u>Décomposition de Jordan</u>

On appelle décomposition de Jordan la décomposition d'une représentation en représentations irréductibles . La decomposition est notée

$$\Gamma = \mathbf{m_1\Gamma_1} \oplus \mathbf{m_2\Gamma_2} \oplus \mathbf{m_3\Gamma_3} \quad \dots \quad \oplus \mathbf{m_r}\Gamma_r$$

$\mathbf{m_i}$ représente le nombre de fois où la représentation irréductible Γ_i apparait dans la représentation réductible Γ.

2.4. <u>Table des caractères</u>

Soit G un groupe d'ordre N.

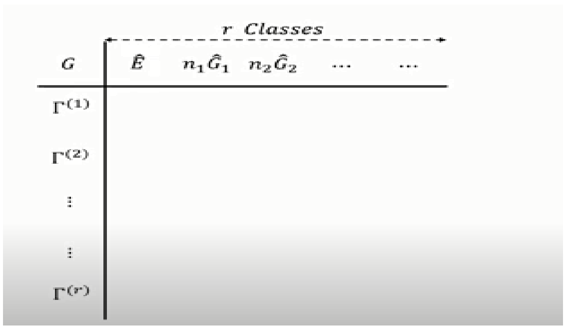
Une table de caractère contient tous les propriétés de symétrie d'un groupe de symétrie.

Pour tracer cette table on suit les étapes suivantes:

1. On détermine toutes les clases de symétrie du groupe. L'élément neutre définie sa propre classe.

2. Soient $C_1, C_2, \dots C_r$ les représentants des $\mathbf{r}$ classes . Soient $n_1, n_2, \dots, n_r$ le nombres d'éléments des classes de représentants respectifs $C_1, C_2, \dots C_r$ avec $\sum_{i=1}^{r} n_i = N$

3. on note le nombre de classes par r. Comme le nombre de représentations irréductibles est égale au nombre de classes , on note les représentations irréductible par $\Gamma^1, \Gamma^2, \dots \Gamma^r$.



4. Pour remplir la table de caractère on a besoin des théorèmes suivants:

- **Pour remplir le première ligne**

Théorème 1

Il existe une et une seul représentation irréductible complètement symétrique notée Γ^1 et qui ne contient que des $\mathbf{1}$. Elle est irréductible puisque sa dimension est $\mathbf{1}$.

$$\boldsymbol{\Gamma^1(a) = 1, \forall\, a \in G.}$$

Elle vérifie aussi

$$\boldsymbol{\Gamma^1(ab) = \Gamma^1(a)\Gamma^1(b) = 1} \textbf{ (homomorphisme)}$$

On réserve la première ligne de cette table aux caractères de cette représentation,c.a.d., on fait correspondre à chaque classe la trace des éléments de cette classe qui est toujours égale à $\mathbf{1}$.

- **Pour remplir la première colonne**

Théorème 2

Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe contenant $\boldsymbol{N}$ éléments répartis en r classes. Alors les dimensions des représentations irréductibles $\boldsymbol{\Gamma^1, \Gamma^2, \dots \Gamma^r}$ sont reliées à l'ordre du groupe G par la relation

$$\sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{f_i}^2 = \boldsymbol{N} = |\boldsymbol{G}|.$$

La première colonne est facile à remplir si on connait les dimensions de chaque représentation, parce que le caractère de chaque représentation $\boldsymbol{\Gamma}$ commence par la trace de $\boldsymbol{\Gamma(E)}$ qui n'est que la trace de la matrice unité et par conséquent c'est la dimension de cette représentation. Donc la colonne commence par $\mathbf{1}$ suivi par les valeurs de $\boldsymbol{f_i}$ obtenues par la relation précédente

	r Classes				
G	$\hat{E}$	$n_1\hat{G}_1$	$n_2\hat{G}_2$	$\cdots$	$\cdots$
$\Gamma^{(1)}$	1	1	1	$\cdots$	$\cdots$
$\Gamma^{(2)}$	f_2				
$\vdots$	$\vdots$				
$\vdots$	$\vdots$				
$\Gamma^{(r)}$	f_r				

- **Pour remplir les autres cases**

Théorème 3

Soit $\boldsymbol{\Gamma}^{\tau}, \boldsymbol{\Gamma}^{\mu}$ deux représentations irréductibles.

$$\sum_i n_i\, \chi_i^{\tau} \chi_i^{\mu} = \delta_{\tau\mu} \quad = \begin{cases} N \ \ si \ \ \tau = \mu \\ 0 \ \ si \ \ \tau \neq \mu \end{cases}$$

D'après le Théorème 3, pour calculer la valeur dans une case , on utilise les deux produits

$$\boldsymbol{\Gamma}^{\tau}.\boldsymbol{\Gamma}^{\mu} = \sum_i n_i\, \chi_i^{\tau} \chi_i^{\mu} = N \quad si \ \ \tau = \mu$$

et

$$\boldsymbol{\Gamma}^{\tau}.\boldsymbol{\Gamma}^{\mu} = \sum_i n_i\, \chi_i^{\tau} \chi_i^{\mu} = 0 \quad si \ \ \tau \neq \mu$$

r *Classes*

G	$\hat{E}$	$n_1\hat{G}_1$	$n_2\hat{G}_2$	$\cdots$	$\cdots$
$\Gamma^{(1)}$	1	1	1	$\cdots$	$\cdots$
$\Gamma^{(2)}$	f_2	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\cdots$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\Gamma^{(r)}$	f_r	$\chi_1^{(r)}$	$\chi_2^{(r)}$	$\cdots$	$\cdots$

Exemples

1. $\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{\sigma}\}$, où $\boldsymbol{E}$ est l'identité et $\boldsymbol{\sigma}$ une réflexion par rapport à un plan donné.

Il est claire que si on applique la réflexion deux fois consécutifs à un point donné le rend à sa place initiale. Donc $\boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{E}$, par suite $\boldsymbol{G}$ est un groupe cyclique Abélien **.** Comme $\boldsymbol{G}$ est Abélien alors chaque élément de $\boldsymbol{G}$ forme sa propre classe. On a alors les deux classes $\boldsymbol{C_1} = \{\boldsymbol{E}\}$ **et** $\boldsymbol{C_2} = \{\boldsymbol{\sigma}\}$. Le nombre de représentations irréductibles est égales au nombre de classes donc on a deux représentations $\boldsymbol{\Gamma^1}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{\Gamma^2}$**.** D'après les théorèmes **1 et 2** **,**La table des caractères est donnée par :

La première ligne ne contient que des $\mathbf{1}$. La première colonne contient les dimensions $\boldsymbol{f_1, f_2}$

telles-que $\boldsymbol{f_1}^2 + \boldsymbol{f_2}^2 = 2$ **et** $\boldsymbol{f_1 = 1}$,

donc forcément $\boldsymbol{f_2 = 1}$

G	$C_1 = \{E\}$	$C_2 = \{\sigma\}$
Γ^1	1	1
Γ^2	1	a

pour le calcule de $\boldsymbol{a}$ on utilise les deux conditions du théorème **3**

$$\begin{cases} 1 + a^2 = 2 \\ 1 + a = 1 \end{cases}$$

ce qui donne $\boldsymbol{a = -1}$

2. $G = \{E,\ C_3^1, C_3^2\}$. $\boldsymbol{G}$ est un groupe cyclique et comme il est abélien chaque élément forme sa propre classe . Donc on a **3** classes différentes $C_1 = \{E\}$, $C_2 = \{\ C_3^1\}$, $C_3 = \{\ C_3^2\}$. Comme le nombre des représentation irréductible est égale au nombre de classes , alors on a **3** représentations $\boldsymbol{\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3}$.

G	C_1	C_2	C_3
Γ^1	1	1	1
Γ^2	1	a	c
Γ^3	1	b	d

Dans la première ligne nous n' avons queue des **1**

dans la première colonne on a les valeur $\boldsymbol{f_1}$, $\boldsymbol{f_2}$, $\boldsymbol{f_3}$,

telles-que $\boldsymbol{f_1}^2 + \boldsymbol{f_2}^2 + \boldsymbol{f_3}^2 = 3$, **et** $\boldsymbol{f_1 = 1}$.

La seule possibilité est $\boldsymbol{f_1 = f_2 = f_3 = 1}$.

<u>Remarque</u>

le **3** du second terme désigne l'ordre du groupe. $\Gamma^2(\ C_3^1)$

On a $\Gamma^2(E) = 1$, ce qui est équivalent à $\Gamma^2 \ \left[\!\left[(\ C_3^1)^3\right]\!\right] = 1 \rightleftarrows \left[\Gamma^2\,(\ C_3^1)\right]^3 = 1$. $\quad \boldsymbol{donc} \quad \boldsymbol{a^3 = 1}$

$\boldsymbol{a}$ est une racine cubique de $\mathbf{1}$ et par suite $\boldsymbol{a = e^{\frac{i2\pi}{3}}}$.

Par la condition d'orthogonalité $\boldsymbol{1 + a + c = 0}$ et en remplaçant $\boldsymbol{a = e^{\frac{i2\pi}{3}}}$.

on trouve $\boldsymbol{c\ \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = e^{\frac{i4\pi}{3}} = a^2}$

G	C_1	C_2	C_3
Γ^1	1	1	1
Γ^2	1	a	a^2
Γ^3	1	b	d

Pour calculer les nombres b, d , on applique le théorème **3**

* **Condition d'orthogonalité** (1) $\quad 1 + b + d = 0$

* **Condition d'orthogonalité** (2) $\quad 1 + ab + a^2d = 0$

$$a + a^2b + a^3d = 0 \quad \rightleftarrows \quad a + a^2b + d = 0 .$$

Un calcule simple donne $b = \frac{-1}{a+1} = -1 - \bar{a} = a$ et $d = a^2$.

G	C_1	C_2	C_3
Γ^1	1	1	1
Γ^2	1	a	a^2
Γ^3	1	a	a^2

cette table vérifie les trois théorèmes

<u>Remarque</u>: $a^3 = 1 \; et \; \|a\| = 1$

$$1.1 + a.a + a^2.a^2 = 1 + \|a\|^2 + \left\|a^2\right\|^2 = 1 + \|a\|^2 + \|a\|^4 = 3$$

2.5 <u>Application de la table des caractères pour la décomposition de Jordan</u>

<u>Exemple</u>

Soit $G = S_3 = \{E, (123)(132)(23)(13)(12)\}$

$$R(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \chi\big(R(E)\big) = 3,$$

$$R(123) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R(132) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \;, \; \chi\big(R(123)\big) = \chi\big(R(132)\big) = 0,$$

$$R(23) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad R(13) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$, \; \chi\big(R(23)\big) = \chi\big(R(13)\big) = \chi\big(R(12)\big) = 1$

Les classes de ce groupe sont : $C_1 = \{E\}$, $C_2 = \{\,(123), (132)\,\}$, $C_3 = \{(23)(13)(12)\,\}$,

$n_1 = \,|\, C_1| = 1, n_2 = \,|\, C_2| = 2, n_3 = \,|\, C_3| = 3;$

$$n_1 + n_2 + n_3 \; = 6 = \; |G|$$

Les représentations irréductibles sont: $\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3$ relatives aux classes respectives C_1, C_2, C_3.

Sa table de caractères est

G	C_1	$2\,C_2$	$3C_3$
Γ^1	1	1	1

Γ^2	1	1	−1
Γ^3	2	−1	0

On note par χ^* le vecteur $\chi^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ des traces des représentations respectives $\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3$.

Soient χ^1, χ^2, χ^3 les vecteurs dont les coordonnées sont lignes respectifs de la table des caractères . $\chi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\chi^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\chi^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La décomposition de Jordan est donnée par

$$\Gamma = m_1\Gamma^1 \oplus m_2\Gamma^2 \oplus m_3\Gamma^3$$

$$m_i = \frac{1}{|G|}\sum_{j=1}^{3} n_j \ \chi_j^i . \ \chi_j^*$$

$$m_1 = \frac{1}{6}[n_1\chi_1^1\chi_1^* + n_2\chi_2^1\chi_2^* + n_3\chi_3^1\chi_3^*] = \frac{1}{6}[1\times 1\times 3 + 2\times 1\times 0 + 3\times 1\times 1] = 1,$$

$$m_2 = \frac{1}{6}[n_1\chi_1^2\chi_1^* + n_2\chi_2^2\chi_2^* + n_3\chi_3^2\chi_3^*] = \frac{1}{6}[1\times 1\times 3 + 2\times 1\times 0 + 3\times(-1)\times 1] = 0,$$

$$m_3 = \frac{1}{6}[n_1\chi_1^3\chi_1^* + n_2\chi_2^3\chi_2^* + n_3\chi_3^3\chi_3^*] = \frac{1}{6}[1\times 2\times 3 + 2\times(-1)\times 0 + 3\times 0\times 1] = 1,$$

$$\Gamma = 1\times\Gamma^1 \oplus 0\times\Gamma^2 \oplus 1\times\Gamma^3$$

$$\Gamma = \Gamma^1 \oplus \Gamma^3$$

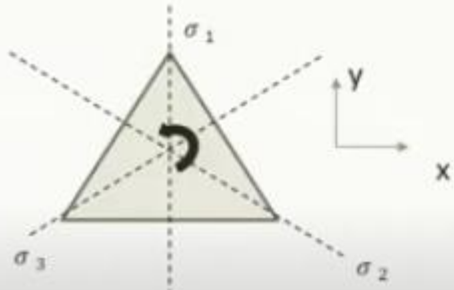
2.6. <u>Représentation regulière d'un groupe</u>

La représentation régulière d'un groupe consiste à associer à chaque élément $\mathbf{a} \in G$ une matrice

$$\Gamma_{reg}(a) = A = (a_{t,s}) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = ts^{-1} \\ 0 & \text{si } a \neq ts^{-1} \end{cases}$$

$a_{t,s}$ les coefficients de la matrice régulière. La définition de l'élément $a_{t,s}$ signifie que quand $a = ts^{-1}$ alors le coefficient qui se trouve dans la ligne $\mathbf{t}$ et la colonne $\mathbf{s}$ prend la valeur **1** et tous les autres coefficients de la même ligne prennent la valeur zéro. Donc la matrice de représentation régulière c'est une matrice qui ne contient que des **1 ou 0.**

Exemple : Représentation régulière du groupe de symétrie du triangle équilatéral



Triangle équilatéral

e^{-1} $(C_3)^{-1}$ $(C_3)^{-1}$ C_1^{-1} σ_1^{-1} σ_2^{-1}

	e	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
e	e	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
C_3	C_3	C_3^2	e	σ_2	σ_3	σ_1
C_3^2	C_3^2	e	C_3	σ_3	σ_1	σ_2
σ_1	σ_1	σ_3	σ_2	e	C_3^2	C_3
σ_2	σ_2	σ_1	σ_3	C_3	e	C_3^2
σ_3	σ_3	σ_2	σ_1	C_3^2	C_3	e

Pour déterminer la représentation régulière de l'élément $\mathbf{e}$ on procède comme suit

1. on commence par chercher le produit $\mathbf{ts^{-1}}$ qui me donne l'élément **e,**

2. on identifie le $\mathbf{s^{-1}}$ et une fois on connait le $\mathbf{s^{-1}}$ on détermine l'élément $\mathbf{s}$,

3. dans la ligne $\mathbf{t}$ et la colonne $\mathbf{s}$, on pose la valeur 1,

4. dans les autres cases de la même ligne on pose la valeur 0,

5. l'ordre de la matrice de représentation régulière est égale à l'ordre du groupe.

On a alors:

$$\Gamma_{reg}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}(\boldsymbol{matrice\ identit}\text{é}).$$

Remarque

$$\boldsymbol{\chi}\left(\Gamma_{reg}(e)\right) = 6 = dim\ \left(\Gamma_{reg}(e)\right).$$

De la même manière on calcule les matrices régulières des autres éléments du groupe

$$\Gamma_{reg}(C_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque

$$\chi\left(\Gamma_{reg}(C_3)\right) = 0 \neq dim\left(\Gamma_{reg}(C_3)\right) = 6$$

Résultat important:

1. Si $a = e$ **alors** $\chi\left(\Gamma_{reg}(e)\right) = dim\left(\Gamma_{reg}(e)\right)$.

2. Si $a \neq e$ **alors** $\chi\left(\Gamma_{reg}(a)\right) = 0$.

2.7. Représentation unitaire

Soit K un espace vectoriel munit d'un produit scalaire noté $\langle . \rangle$,tel-que

1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle^*$,

2. $\langle x, x\rangle > 0$

$\langle y, x\rangle^*$ est le conjugué de $\langle x, y\rangle$

On rappelle que $A^* = com(A)^t$

2.7.1. Définition

Une représentation Γ d'un groupe G est dite **unitaire** si $\forall a \in G$ $\Gamma(\mathbf{a})$ est unitaire, c.a.d.,

$$\Gamma^{-1}(a) = \Gamma^*(a) = \Gamma(a^{-1})$$

$\Gamma^*(a)$ est la matrice adjointe de $\Gamma(a)$.

Une représentation unitaire conserve le produit scalaire et l'orthogonalité, c.a.d.,

Si $x' = \Gamma(\mathbf{a})$ **et** $y' = \Gamma(\mathbf{y})$ **alors** $\langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle$,

et si $\langle x, y\rangle = 0$ $alors$ $\langle x', y'\rangle = 0$.

Remarque

$\Gamma(\mathbf{a})$ est unitaire $\rightleftarrows \Gamma^*(a)\Gamma(a) = I$

2.7.2. Théorème

Toute représentation unitaire réductible est entièrement réductible

Ce théorème veut dire qu'on peut faire la décomposition de Jordan pour une matrice unitaire .

2.7.3. Théorème

Toute représentation $\boldsymbol{\Gamma}$ d'un groupe fini $\mathbf{G}$ dans un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est équivalente à une représentation unitaire, c.a.d., il existe une matrice $\mathbf{S}$ telle-que $\boldsymbol{\Gamma}' = \mathbf{S}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{S}^{-1}$.

2.7.4. Lemme de Shur et théorème associés

Théorème

Soient $\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Gamma}'$ deux représentation irréductible d'un groupe $\mathbf{G}$ dans deux espaces vectoriels $\mathbf{K}, \mathbf{K}'$ s'il existe une application $\mathbf{T}$: $\mathbf{K} \to \mathbf{K}'$ telle-que $\forall\, \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{\Gamma}'(\mathbf{a}).\mathbf{T} = \mathbf{T}.\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{a})$ **.** Alors, seules deux possibilités existent

1. $\mathbf{T} \equiv \mathbf{0}$ **et** $\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Gamma}'$ sont deux représentations différentes

2. $\mathbf{T} \neq \mathbf{0}$ **et** $\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Gamma}'$ sont deux représentations équivalentes: $\boldsymbol{\Gamma}' = \mathbf{T}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{T}^{-1}$ (avec $\det \mathbf{T} \neq \mathbf{0}$, **si non** $\mathbf{T}^{-1}$ **n'existe pas.**

2.7.5. Lemmes de Schur

Lemme1

Une matrice $\mathbf{T}$ qui commute avec l'ensemble des matrices d'une représentation irréductible est nécessairement un multiple de l'identité,c.a.d., si $\forall\, \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{a}).\mathbf{T} = \mathbf{T}.\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{a})$ **alors** $\mathbf{T} = \boldsymbol{\lambda I}, \boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R}$

Lemme2

Toutes les représentations irréductibles d'un groupe Abélien sont nécessairement de dimension $\mathbf{1}$

Remarque

Si une matrice $\mathbf{T}$ commute avec les matrices d'une représentation et que $\mathbf{T} \neq \boldsymbol{\lambda I}$ alors la représentation n'est pas irréductible elle est réductible. Autrement dit,

Représentation irréductible + $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{a}).\mathbf{T} = \mathbf{T}.\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{a}), \forall\, \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{G}$ **implique** $\mathbf{T} = \boldsymbol{\lambda I}, \boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R}$,

$\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{a}).\mathbf{T} = \mathbf{T}.\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{a}), \forall\, \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{G}$ ***et*** $\mathbf{T} = \boldsymbol{\lambda I}, \boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R}$ **implique la** Représentation $\boldsymbol{\Gamma}$ est irréductible.

III. Produit tensoriel et représentation

En physique, on a plus souvent affaire à des produit directs d'espaces vectoriels qu'a des espaces simples. Pour quelle raison?

Dès qu'un système contient plusieurs degrés , chacun va s'abattre dans un espace qui lui est propre et le système entier sera décrit dans un grand espace espace produit des petits espaces correspondant à chacun des degrés de libertés

3.1. Définition

1. Soient $(V_1, \mathbf{\Gamma}^1)$,$(V_2, \mathbf{\Gamma}^2)$ deux représentations des deux groupes, G_1, G_2 sur les espaces vectoriels V_1, V_2 . La représentation $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^1 \otimes \mathbf{\Gamma}^2$ est la représentation de $G_1 \times G_2$ sur l'espace $V_1 \times V_2$ dite le produit tensoriel des deux représentations $\mathbf{\Gamma}^1, \mathbf{\Gamma}^2$

où $\mathbf{\Gamma}(g, g') = \mathbf{\Gamma}^1(g) \otimes \mathbf{\Gamma}^2(g')$, $(g, g') \in G_1 \times G_2$

2. Si G_1= G_2=G La représentation $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^1 \otimes \mathbf{\Gamma}^2$ est la représentation de $G \times G$ sur l'espace $V_1 \times V_2$ dite le produit tensoriel extérieur des deux représentations $\mathbf{\Gamma}^1, \mathbf{\Gamma}^2$ où $\mathbf{\Gamma}(g, g') = \mathbf{\Gamma}^1(g) \otimes \mathbf{\Gamma}^2(g')$, $(g, g') \in G \times G$ avec g différent de g' en général.

3. Soit $G' = \{(g, g), g \in G\}$. $G \cong G' \subset G \times G$. La restriction de $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^1 \otimes \mathbf{\Gamma}^2$ sur G' s'appelle le produit tensoriel intérieur de G sur $V_1 \times V_2$.

Remarque

Dans le cas G_1= G_2=G

Produit tensoriel extérieur : $\mathbf{\Gamma}(g, g') = \mathbf{\Gamma}^1(g) \otimes \mathbf{\Gamma}^2(g')$, $g \in G, g' \in G$.

Produit tensoriel intérieur : $\mathbf{\Gamma}(g, g) = \mathbf{\Gamma}^1(g) \otimes \mathbf{\Gamma}^2(g)$, $g \in G$.

3.2. Proposition

Soient $(V_1, \mathbf{\Gamma}^1)$,$(V_2, \mathbf{\Gamma}^2)$ deux représentations irréductibles des deux groupes, G_1, G_2 sur les espaces vectoriels V_1, V_2 de dimensions finies alors $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^1 \otimes \mathbf{\Gamma}^2$ est une représentation irréductible de $G \times G$ sur l'espace $V_1 \times V_2$.

Remarque importante

Même si le produit tensoriel extérieur est une représentation irréductible de $G \times G$, le produit tensoriel intérieur est en général réductible.

La réduction du produit tensoriel intérieur en représentation irréductible s'appelle décomposition Clebsch-Gordan.

3.3. Définition

Soit $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^1 \otimes \mathbf{\Gamma}^2$ est une représentation irréductible de $G \times G$ sur l'espace $V_1 \times V_2$.

Les caractères du produit tensoriel des représentations est égale aux produit des caractères de chacune des deux représentations: $\boldsymbol{\chi}\,(\boldsymbol{\Gamma}(g,g)) = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\Gamma}^1(g))\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\Gamma}^2(g)),\ g \in G$.

Si $\boldsymbol{\Gamma}^1, \boldsymbol{\Gamma}^2$ sont deux représentations irréductibles de G de dimension respectives $\boldsymbol{n_1}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{n_2}$ **alors**

$dim(\boldsymbol{\Gamma}(g,g)) = dim(\boldsymbol{\Gamma}^1(g)) \times dim(\boldsymbol{\Gamma}^2(g)) = \boldsymbol{n_1} \times \boldsymbol{n_2}\ ,\ g \in G$.

3.3. Décomposition Clebsch-Gordan

Le produit tensoriel intérieur $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}^1 \otimes \boldsymbol{\Gamma}^2$ est une représentation réductible du groupe $G \cong G'$ et sa réduction en représentation irréductible de G s'appelle décomposition Clebsch-Gordan.

$$\boldsymbol{\Gamma}^1 \otimes \boldsymbol{\Gamma}^2(g,g) = \bigoplus a_{\mathbf{i}} \boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{i}}(g)$$

où $a_{\mathbf{i}} = \frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{G}|} \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{n_j}\ \ \chi_j^i .\ \chi_j^*$

$$\chi = \chi^{(1,2)} = \chi^1 \times \chi^2$$

$$\chi^i = \chi^{(1,2),i} = \chi^{1,i} \times \chi^{2,i}$$

χ^* est le vecteur dont les composantes sont les traces des représentations du groupe $\boldsymbol{G}$

3.4. Exercice d'application

On considère le groupe $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{C_{3v}}$

1. Donner la décomposition Clebsch-Gordan de $\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{D}$ **où** $\boldsymbol{D}$ est la représentation de Jordan

2. Donner la décomposition de Clebsch-Gordan des produit tensoriel interne des représentations du groupe $\boldsymbol{G}$.