

## Chapitre II Calcul des pièces sollicitées en compression simple

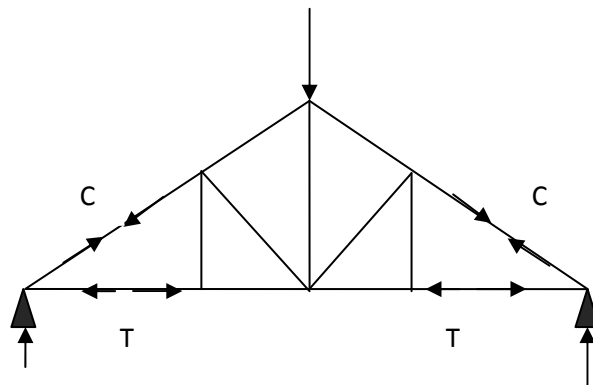
### I. Généralités:

Les pièces soumises à la compression simple sont généralement affectées par le flambement simple. La pièce comprimée est soumise uniformément à une contrainte normale :

$$\sigma = N/A$$

N : l'effort de compression appliqué à la barre

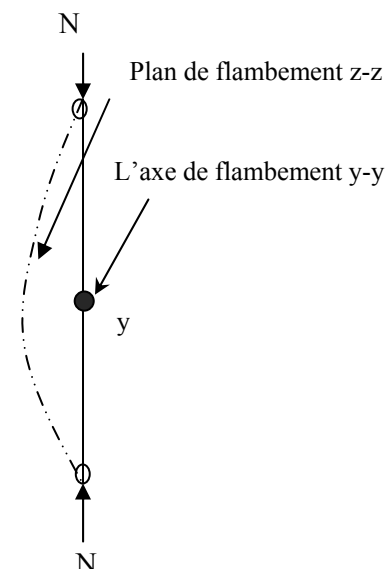
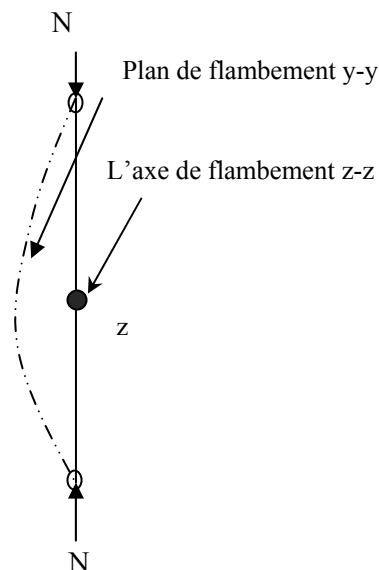
A ; section de la pièce comprimée



Plan de flambement ; le plan de flambement est en fonction d'un paramètre adimensionnel à savoir l'élanement  $\lambda$ . On donne :

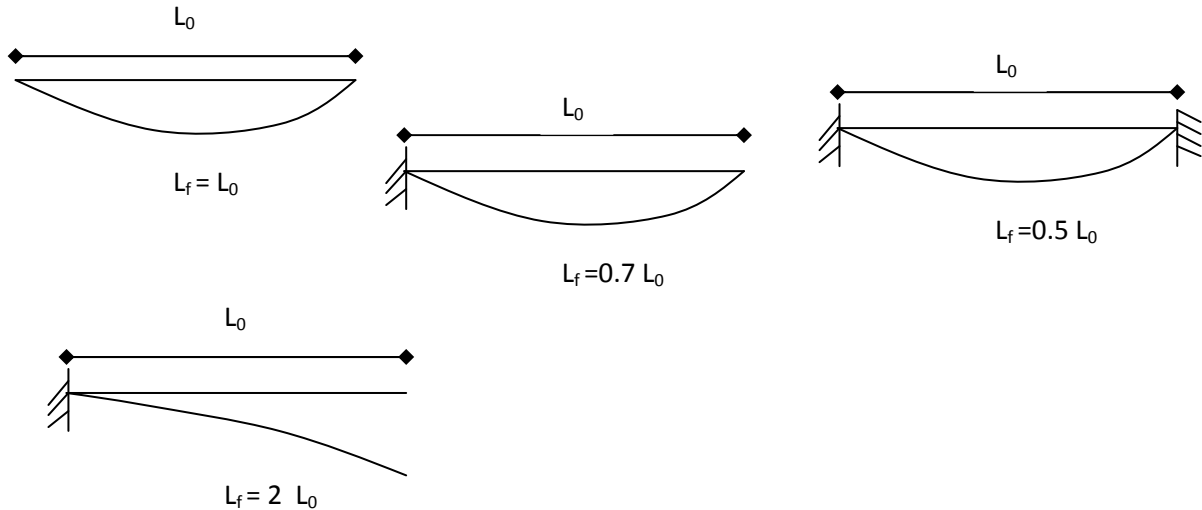
$$\begin{cases} \lambda_y = \frac{L_y}{i_y} \\ \lambda_z = \frac{L_z}{i_z} \end{cases} \text{ avec } i = \sqrt{I/A} ; \text{ rayon de giration}$$

$$i_y = \sqrt{I_y/A}, \quad i_z = \sqrt{I_z/A}$$

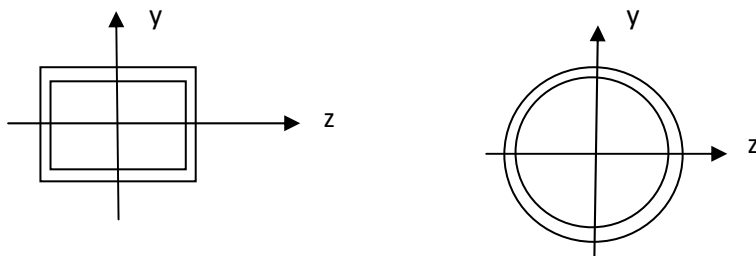


Si  $\lambda_z > \lambda_y$  le flambement autour de z-z et le plan de flambement est le plan y-y. les éléments comprimés d'une structure, sont sollicités par des charges à diminuer leur longueur. Les poteaux sont, généralement, sollicités en flambement simple ou composé

### Éléments isolés



Types des sections utilisées en compression simple



Bonne résistance en flambement  $I_z = I_y$

Profilé en HE bonne résistance en flambement

## II. Etude théorique du flambement

### II. 1. Théorie d'Euler

Soit une barre rectiligne soumise à un effort axial de compression  $N$ .



Lorsque  $N$  croît, à partir de zéro, l'état d'équilibre rectiligne initial évolue vers un état curviligne fléchi. D'après la résistance des matériaux, la loi fondamentale de la flexion est donnée comme suit :

$$M = -EI \frac{d^2Y}{dx^2}, \quad (1)$$

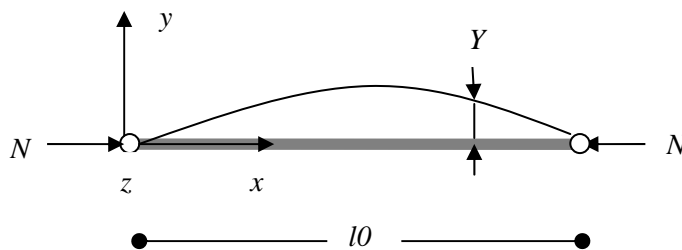
$M$  : moment fléchissant,  $E$  ; module d'élasticité du matériau utilisé,  $I$  : moment d'inertie de la section transversale de la barre comprimée.

En se basant sur l'équilibre des efforts, on trouve ;

$$M = N.Y, \quad (2)$$

En posant  $\alpha = \sqrt{(N/EI)}$  , L'Eq. 1 sera comme suit :

$$\frac{d^2Y}{dx^2} + \alpha^2 Y = 0, \quad (3)$$



La solution générale de l'équation différentielle, est de la forme :

$$Y = A.\sin(\alpha.x) + B.\cos(\alpha.x) \quad (4)$$

D'après le système de chargement, on peut déterminer les conditions aux limites suivantes :

Pour  $x = 0$ ,  $Y(0) = 0$ , Pour  $x = l_0$ ,  $Y(l_0) = 0$  (c'est-à-dire le déplacement suivant  $(y-y)$ , au niveau des extrémités de la poutre, est nul).

En se basant sur les conditions aux limites et l'Eq.4, on obtient ce qui suit :

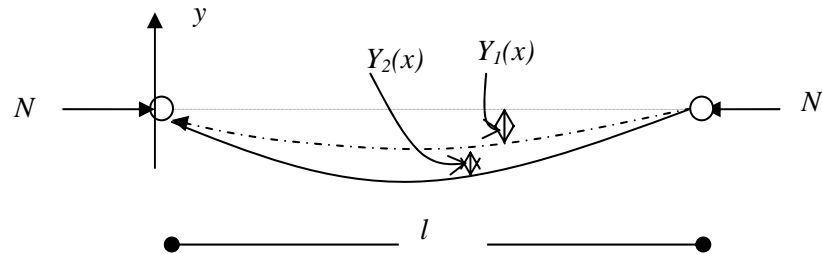
$$\alpha = \frac{k.\pi}{l_0} = \sqrt{(N/EI)}$$

d'où  $N = \frac{k^2.\pi^2.EI}{l_0^2}$ , la force critique s'obtient pour  $k = 1$ , donc :

$$N = \frac{\pi^2.EI}{l_0^2}, N : \text{la force critique d'Euler.}$$

## II. 2. Equilibre en compression centrée d'une barre

En général, les pièces présentent des imperfections (engendrée par la réalisation) qui peuvent être équivalentes aux imperfections géométriques.



Dans le domaine des petites déformations, la déformation de la barre est donnée par :

$$Y_1(x) = e_1 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (5)$$

L'application de l'effort  $N$ , nous donne la déformation suivante :

$$Y(x) = Y_1(x) + Y_2(x) \quad (6)$$

En substituant l'Eq.6 dans l'Eq.3, on trouve :

$$EI \frac{d^2 Y_2(x)}{dx^2} + N(Y_1(x) + Y_2(x)) = 0 \quad (7)$$

Cette dernière expression est une équation différentielle ayant la solution suivante :

$$Y_2(x) = e_2 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (8)$$

En substituant l'Eq.5 et l'Eq.8 dans l'Eq. 7, on aura :

$$-e_2 EI \frac{\pi^2}{l^2} + N(e_1 + e_2) = 0 \quad (9)$$

Par suite :

$$e = e_1 + e_2 = e_1 \frac{N_{cr}}{N_{cr} - N} \quad (10)$$

Finalement, la flèche totale peut s'amplifier par le coefficient  $\delta = [1 + N_{cr}/(N_{cr} - N)]$ .

### III. Vérification au flambement simple (selon l'Eurocode 3)

Selon l'eurocode 3, pour les sections 1, 2 et 3, l'effort de compression  $N_{sd}$  doit rester inférieur ou égal à l'effort résistant  $N_{pl,rd}$  on a :

$$N_{sd} \leq N_{pl,rd} = \chi \cdot A \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M1}}$$

A : section transversale de l'élément considéré

$f_y$  : limite élastique de l'acier

$\gamma_{M1}$  : Coefficient de réduction pour le mode de flambement à considérer

#### III. 1. Coefficient de réduction $\chi$

Conformément à l'eurocode 3, le coefficient de réduction  $\chi$  est donné par la formule suivante :

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \quad \text{avec} \quad \chi \leq 1$$

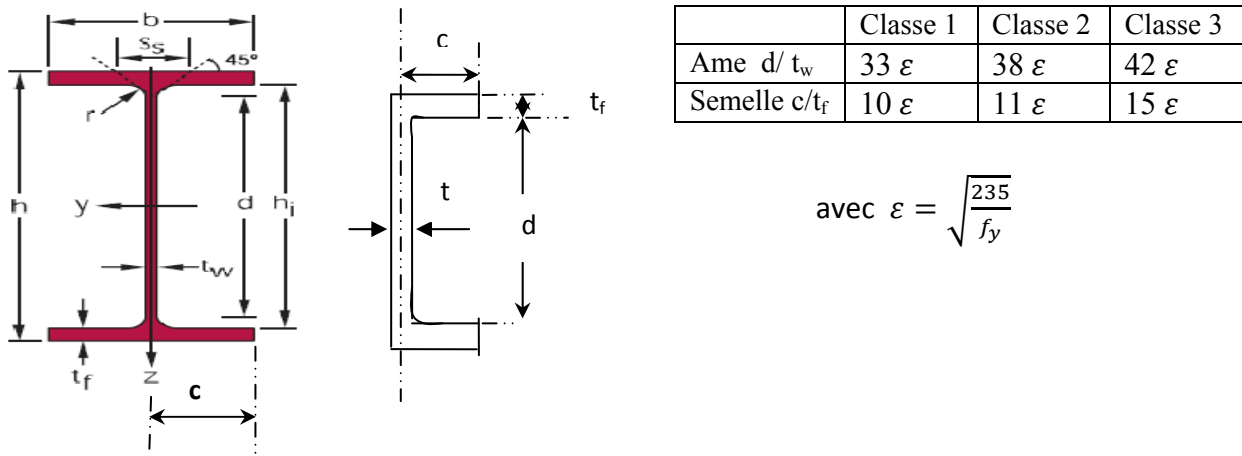
$$\bar{\lambda} = \max \begin{cases} \bar{\lambda}_y = \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \\ \bar{\lambda}_z = \frac{\lambda_z}{\lambda_1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \phi = 0.5 \left[ 1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0.2) + \bar{\lambda}^2 \right] \quad \text{et} \quad \lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

$\alpha$  : est un facteur d'imperfection donné en fonction de la courbe de flambement (voir tableau)

Courbe de flambement	A	B	c	d
Facteur d'imperfection $\alpha$	0.21	0.34	0.49	0.76

La courbe de flambement dépend de l'axe de flambement ainsi que les caractéristiques adimensionnelles des profilés. Le choix de la courbe de flambement est fait selon le tableau 1 (voir annexe).

### III. 2. Classes de profilés utilisés en compression simple



### IV. Dimensionnement des pièces soumises au flambement simple

#### 1) Poteaux ; travaillant à la compression simple

- 1) On choisit  $\lambda = 60 - 80 \rightarrow \bar{\lambda} = 0.6 - 0.8$
- 2) On détermine  $\chi$  (d'après la formule ou le tableau)
- 3) on calcule  $A \geq \frac{Y_{M1} \times N_{sd}}{\chi \times f_y} \rightarrow$  on tire le profilé.  $\rightarrow$  On vérifie.

#### 2) Les barres de ferme

Longueur de flambement ; 1) dans le plan de la ferme  $L_f = 0.9 L_0$

2) Dans le plan perpendiculaire au plan de la ferme  $L_f = L_0$

L'élancement limite  $\lambda_{limite}$

l'élément	compression	Traction
Membrure et diagonale près de l'appui	120	200
autres barres	150	350

#### - Dimensionnement et vérification

- 1) On choisit  $\lambda = 80 - 100 \rightarrow \bar{\lambda} = 0.8 - 1$
- 2) On détermine  $\chi$  (d'après la formule ou le tableau)
- 3) on calcule  $A \geq \frac{Y_{M1} \times N_{sd}}{\chi \times f_y} \rightarrow$  on tire le profilé.

On vérifie  $N_{sd} \leq \chi \times A \times \frac{f_y}{\gamma_{M1}}$  et  $\lambda \leq \lambda_{lim}$

**3) Les barres de contreventement** (les diagonale, palées de stabilité)

Longueur de flambement ; 1) dans le plan de la ferme  $L_f = 0.9 L_0$

2) Dans le plan perpendiculaire au plan de la ferme  $L_f = L_0$

L'élanement limite  $\lambda_{limite}$

l'élément	compression	Traction
$\Lambda$	130	350

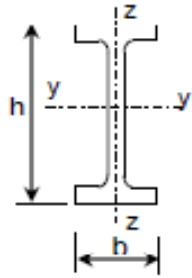
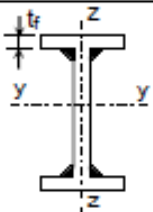
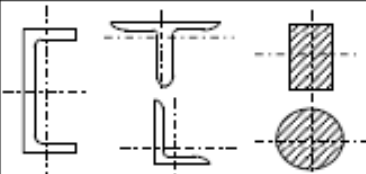
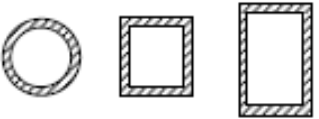
**- Dimensionnement et vérification**

1) on calcule  $i \geq \frac{l_f}{\lambda_{lim}}$  → on choisit le profilé.

On vérifie  $N_{sd} \leq \chi \times A \times \frac{f_y}{\gamma_{M1}}$  et  $\lambda = \frac{l_f}{i} \leq \lambda_{lim}$

**Annexe**

**Tableau 1** ; Choix de la courbe de flambement correspondant à une section

Section	Limites	Axe de flambement	Courbe de flambement
Sections en I ou H laminées 	$h/b > 1,2$ : $t_f \leq 40$ mm  $40$ mm $<$ $t_f <$ $100$ mm	y - y z - z  y - y z - z	a b  b c
	$h/b \leq 1,2$ : $t_f \leq 100$ mm  $t_f > 100$ mm	y - y z - z  y - y z - z	b c  d d
Section en I soudées 	$t_f \leq 40$ mm  $t_f > 40$ mm	y - y z - z  y - y z - z	b c  c d
Sections en U , L , T et sections pleines 		Quel qu'il soit	c
Sections creuses 	Laminées à chaud	Quel qu'il soit	a



**Tableau 2** ; valeur de  $x$  pour la courbe de flambement.

$\bar{\lambda}$	Valeurs de $\chi$ pour la courbe de flambement			
	a	b	c	d
0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,3	0,9775	0,9641	0,9491	0,9235
0,4	0,9528	0,9261	0,8973	0,8504
0,5	0,9243	0,8842	0,8430	0,7793
0,6	0,8900	0,8371	0,7854	0,7100
0,7	0,8477	0,7837	0,7247	0,6431
0,8	0,7957	0,7245	0,6622	0,5797
0,9	0,7339	0,6612	0,5998	0,5208
1,0	0,6656	0,5970	0,5399	0,4671
1,1	0,5960	0,5352	0,4842	0,4189
1,2	0,5300	0,4781	0,4338	0,3762
1,3	0,4703	0,4269	0,3888	0,3385
1,4	0,4179	0,3817	0,3492	0,3055
1,5	0,3724	0,3422	0,3145	0,2766
1,6	0,3332	0,3079	0,2842	0,2512
1,7	0,2994	0,2781	0,2577	0,2289
1,8	0,2702	0,2521	0,2345	0,2093
1,9	0,2449	0,2294	0,2141	0,1920
2,0	0,2229	0,2095	0,1962	0,1766
2,1	0,2036	0,1920	0,1803	0,1630
2,2	0,1867	0,1765	0,1662	0,1508
2,3	0,1717	0,1628	0,1537	0,1399
2,4	0,1585	0,1506	0,1425	0,1302
2,5	0,1467	0,1397	0,1325	0,1214
2,6	0,1362	0,1299	0,1234	0,1134
2,7	0,1267	0,1211	0,1153	0,1062
2,8	0,1182	0,1132	0,1079	0,0997
2,9	0,1105	0,1060	0,1012	0,0937
3,0	0,1036	0,0994	0,0951	0,0882