Notions de Base de la Théorie des Groupes

Introduction

La théorie des groupes est un outil mathématique essentiel en physique, notamment en physique quantique et en physique des particules. Elle permet de décrire et de comprendre les symétries fondamentales des lois physiques. Voici quelques points clés de la manière dont la théorie des groupes est utilisée en physique :

1. Symétries et invariance : Les groupes sont utilisés pour étudier les symétries des équations physiques. Les lois de la physique sont souvent invariantes sous certaines transformations, ce qui signifie que les propriétés physiques ne changent pas lorsque l'on effectue ces transformations. Par exemple, les lois de la physique sont invariantes sous les translations dans le temps et l'espace. Ces symétries sont souvent représentées par des groupes mathématiques spécifiques.

2. Classification des particules : La théorie des groupes est utilisée pour classer les particules subatomiques en fonction de leurs propriétés de symétrie. Par exemple, les particules subatomiques sont classées en bosons (qui suivent les statistiques de Bose-Einstein) et en fermions (qui suivent les statistiques de Fermi-Dirac), en fonction de leur spin, qui est lié aux propriétés de symétrie.

3. Théorie des groupes et interactions fondamentales : En physique des particules, la description des interactions fondamentales, telles que l'électromagnétisme, l'interaction forte et l'interaction faible, repose sur des groupes de symétrie spécifiques.

I. <u>Groupes</u>

1.1. <u>Généralités sur les groupes</u>

1.1.1. Définition: Soit G un ensemble non vide. On appelle loi de composition interne sur G notée $\star$(L.C.I) ou opération interne l'application définie comme suit :

$$G\times G \to G$$

$$(x,y)\ ) \longmapsto x\star y$$

Autrement dit, la composée de deux éléments de G donne un élément de G.

Une loi de composition interne peut être notée par : T,∇,Δ,*,+,×,.,o,…

Exemples

La loi + est une loi de composition interne sur $\mathbb{Z}$.

1.1.2. Propriétés

Soit ⋆ une L.C.I sur G

- On dit que ⋆ est commutative ssi pour tout x,y dans G : x⋆ y = y⋆ x.
- On dit que ⋆ est associative ssi pour tout x,y,z dans G : (x⋆ y) ⋆z = x⋆(y⋆ z).
- On dit que e est un élément neutre pour la loi ⋆ ssi x⋆ e = e⋆ x .
- On dit que l'élément x' de G est le symétrique de x dans G ssi x⋆ x' = x'⋆ x = e. On dit aussi que x' est l'inverse de x.

Remarque

- En notation multiplicative (.), l'élément neutre est noté 1.
- En notation additive (+) , l'élément neutre est noté 0.
- Lorsqu'il s'agit d'opération de composition de fonctions ou transformations , on utilise le symbole (o) ou (.) , et dans ce cas l'élément neutre est noté I ou E.

1.1.3. Définition d'un groupe

Soit ⋆ une opération interne sur un ensemble non vide G. On dit que le couple (G,⋆) est un groupe si la loi ⋆ est associative, admet un élément neutre et chaque élément de G admet un inverse dans G. Si de plus ⋆ est commutative, on dit que le groupe est commutatif ou Abélien.

exemple

($\mathbb{Z}$,+) est un groupe Abélien.

1.1.4. Ordre d'un groupe-Ordre d'un élément

Soit (G,.) un groupe. On dit que G est d'ordre fini n s'il contient n éléments et on écrit

|G| = n.

et dans ce cas on dit que $\boldsymbol{G}$ est **fini.** Si $\boldsymbol{G}$ est **infini** (continu ou discret),alors son ordre est **infini.**

L'ordre d'un élément $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{G}$ est le plus petit entier strictement positif $\boldsymbol{m}$ qui satisfait

$$\boldsymbol{g^m = 1,}$$

o`u **1** représente l'élément neutre du groupe en notation multiplicatif et

$$g^m = \underbrace{g.g.g.g \dots g}_{m\ fois}$$

Si un tel entier m n'existe pas, on dit que g est d'ordre **infini.**

Remarque: (.) ne signifie pas la multiplication usuelle mais il désigne l'opération définie sur G

$$G = \{g_1(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, , \dots \alpha_n\ ),\ \ g_2(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, , \dots \alpha_n\ ),\ g_3(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, , \dots \alpha_n\ ), \dots, \quad \}$$

1.1.4.1. Groupe fini- -groupe discret- Groupe continu

- Si l'ordre du groupe **G** est fini ,c.a.d., on peut compter le nombre des éléments de **G** on dit que **G** est fini ou un groupe **discret fini.**
- Un groupe **discret infini** est un groupe dont l'ensemble des éléments est infini et muni d'une topologie discrète. Une topologie discrète signifie que chaque élément est isolé, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de points limites dans l'ensemble.

Exemple: Le groupe des entiers relatifs (ℤ) avec l'opération d'addition est un exemple de groupe discret infini. Chaque entier est isolé et distinct des autres.

- Si les éléments de **G** sont des fonctions d'un ensemble de variables continues il est dit **groupe continu**
  $$G = \{g_1(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, , \dots \alpha_n\ ),\ \ g_2(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, , \dots \alpha_n\ ),\ g_3(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, , \dots \alpha_n\ ), \dots, \quad \}$$
- Les variables sont appelées paramètres du groupe continu. Quand l'ensemble des paramètres est fini on dit que le groupe continu est compact. Un groupe continu est forcément infini .

Dans un sens physique: Un groupe continu est un ensemble d'opérations ou de transformations qui peuvent être effectuées en douceur, comme si elles étaient un mouvement fluide. Par exemple, imaginez un cadran de montre que vous pouvez faire tourner à n'importe quel angle. Les rotations possibles forment un groupe continu car vous pouvez choisir n'importe quel angle, pas seulement des valeurs discrètes comme 30 degrés ou 60 degrés.

1.1.5. Groupe monogène-Groupe cyclique

Définition:

Soit $(G,.)$ un groupe. On dit que (G G,.) est monogène s'il existe un $g \in G$ tel-que $\forall\, x \in G, \exists p \in N$: $x = g^p$. On note $G = \langle g \rangle$. On dit aussi que G est engendré par g, c.a.d., g est un générateur de $(G,.)$. Si de plus G un groupe fini d'ordre n , il est dit cyclique. Autrement dit ,

on dit que G est cyclique s'il peut être généré par un seul élément $g \in G$. En d'autres termes n'importe quel élément de G s'écrit comme une puissance de g: $g\!: \forall\, x \in G, \exists p \in N$: $x = g^p$**, et** $g^n = 1.$ Ce qui conduit à

$$G = \{g^1, g^2, g^3 g^4\, , \dots, g^n = 1\}$$

Un groupe cyclique est forcément Abélien car un élément commute avec ses puissances.

Exemple

$(\mathbb{Z},+)$ est un groupe monogène car $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$.. En effet , $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}$

$$\boldsymbol{n} = \underbrace{\mathbf{1+1+1+1 \ldots + 1}}_{n\, fois}$$

$$\mathbf{2 = 1 + 1}$$

1.1.6. Théorème de réarrangement

Soit G un groupe fini d'ordre $\boldsymbol{n}$ tel-que $\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{g_1}, \boldsymbol{g_2}, \boldsymbol{g_3}, \boldsymbol{g_4}, \ldots, \boldsymbol{g_n}\}$. La multiplication d'un élément $\boldsymbol{g_i} \in \boldsymbol{G}$ **(** $\mathbf{1 \le i \le \boldsymbol{n}}$**)** par $\boldsymbol{G}$ génère le groupe lui même. En d'autres termes

$$\{\boldsymbol{g_i g_1}, \boldsymbol{g_i g_2}, \boldsymbol{g_i g_3}, \boldsymbol{g_i g_4}, \ldots, \boldsymbol{g_i g_n}\} = \boldsymbol{G}$$

1.1.5. Table de Cayley

Soit G un groupe fini d'ordre n. La table de Cayley est une table de multiplication qui regroupe pour tous les éléments $\boldsymbol{g_i g_j}$ de $\boldsymbol{G}$, les résultats obtenus par l'opération de la multiplication (.). A l'intersection de la ligne de $\boldsymbol{g_i}$ avec la colonne $\boldsymbol{g_i}$ *se* trouve l'élément $\boldsymbol{g_i g_j}$ $\mathbf{(1 \le i, j \le \boldsymbol{n})}$

$\boldsymbol{G}$	$\boldsymbol{g_1}$	$\boldsymbol{g_2}$	…	$\boldsymbol{g_n}$
$\boldsymbol{g_1}$	$\boldsymbol{g_1 g_1}$	$\boldsymbol{g_1 g_2}$	…	$\boldsymbol{g_1 g_n}$
$\boldsymbol{g_2}$	$\boldsymbol{g_2 g_1}$	$\boldsymbol{g_2 g_2}$	…	$\boldsymbol{g_2 g_n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\boldsymbol{g_n}$	$\boldsymbol{g_n g_1}$	$\boldsymbol{g_n g_2}$	…	$\boldsymbol{g_n g_n}$

Attention: Dans le cas général, le produit n'est pas commutatif, c.a.d., $\boldsymbol{g_i g_j} \neq \boldsymbol{g_j g_i}$.

Exemples

Si un groupe ne contient que deux éléments $e, a,$ o`u e est l'élément neutre, alors on doit avoir $a.a = e$ (**Théorème de réarrangement**). Ce groupe est cyclique.

$\boldsymbol{G}$	e	a
e	$e\,e = e$	$e\,a{=}a$
a	$a\,e = a$	$a\,a = e$

1.1.6. Conséquence

Une conséquence directe de la définition ci dessus est que l'ensemble des opérations de symétrie définie un groupe lorsqu'il est muni du produit des opérations de symétrie noté **o ou (.).**

1.1.6. Groupes ponctuels de symétrie

On considère les groupes ponctuels de symétrie , ensembles des transformations qui laisse invariante les conformation et les propriétés physiques et chimiques.

1. Le Groupe de Symétrie C_3

Le groupe de symétrie C_3 connu aussi sous le nom de groupe cyclique d'ordre $\mathbf{3}$ décrit les opérations de symétrie d'un objet avec une symétrie axiale de $\frac{2\pi}{3}$
Il contient 3 opérations de symétrie

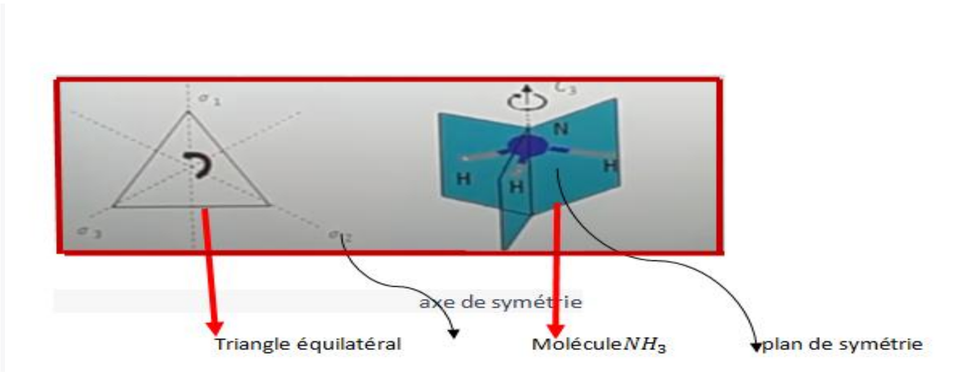
- L'identité E
- Deux rotations de $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ au tours de l'axe passant par le centre notées respectivement C_3^1 (ou C_3), C_3^2.
- $C_3 = \{E, C_3^1, C_3^2\}$
- **Table de Cayley de C_3**

C_3	E	C_3^1	C_3^2
E	E	C_3^1	C_3^2
C_3^1	C_3^1	C_3^2	E
C_3^2	C_3^2	E	C_3^1

2. Le Groupe de Symétrie C_{3v}

L'ensemble des opérations de symétrie du triangle équilatéral forme un groupe noté C_{3v} et qui contient $\mathbf{6}$ éléments :

- l'identité E(ou **e**)
- Deux rotations de $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ au tours de l'axe passant par le centre
- 3 réflexions passants par chacun des sommets.
  Ces opérations laisse le triangle équilatéral invariant (configuration indiscernable de la configuration initiale).
  On a les même opérations de symétrie en $3D$ pour la molécule NH_3 , sauf qu'au lieu d'avoir des axes de symétrie on a des plans de symétrie passant par chacune des atomes d'hydrogène.
  - $C_{3v} = \{E, C_3^1, C_3^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$



Prenant un autre exemple de la molécule de phosphane PH_3 Cette molécule présente 6 opérations de symétrie l'identité E, deux rotation d'ordre 3: C_3^1, C_3^2, et trois plans de réflexion: $\boldsymbol{\sigma_v, \sigma'_v, \sigma''_v}$

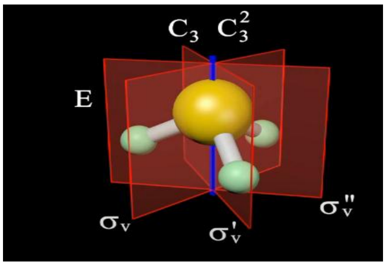


Table de Cayley de C_{3v}

	e	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
e	e	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
C_3	C_3	C_3^2	e	σ_2	σ_3	σ_1
C_3^2	C_3^2	e	C_3	σ_3	σ_1	σ_2
σ_1	σ_1	σ_3	σ_2	e	C_3^2	C_3
σ_2	σ_2	σ_1	σ_3	C_3	e	C_3^2
σ_3	σ_3	σ_2	σ_1	C_3^2	C_3	e

3. Le Groupe Diedral D_n

On appelle groupe diedral d'ordre n le groupe des isométries du plan Euclidien qui conservent un polygone régulier à n cotés. Il contient $2n$ éléments:

- n rotations de centre le milieu du polygone et d'angle $\boldsymbol{\frac{2k\pi}{n}}$ tel-que $\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{k} \leq n-1$,

- n réflexions. La nature des axes de réflexion est très différente, elle est donnée selon la valeur de n si elle est paire ou impaire.

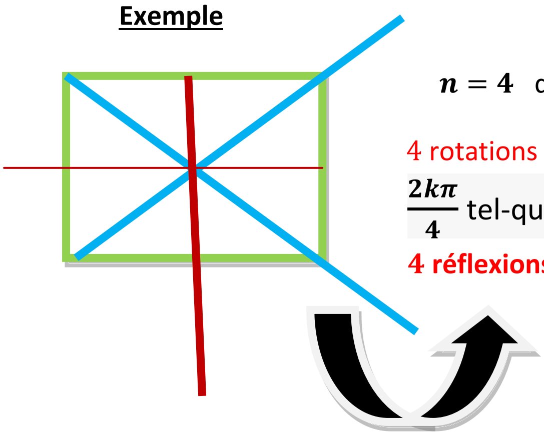
Si n est paire il ya deux familles de réflexions:

- celle dont l'axe joint un sommet au sommet opposé
- celle dont l'axe joint le milieu d'un coté avec celui du coté opposé.

Si n est impaire il ya une seule familles de réflexions:

- celle dont leurs axes joignent un sommet au milieu du coté opposé.

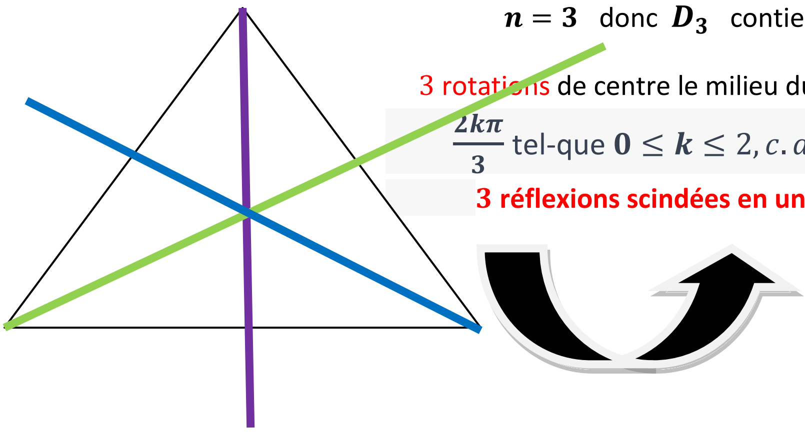
Exemple



$\boldsymbol{n=4}$ donc D_4 contient $2\times 4=8$ éléments

4 rotations de centre le milieu du carrée d'angles respectives $\frac{\mathbf{2k\pi}}{\mathbf{4}}$ tel-que $\mathbf{0}\le \boldsymbol{k}\le 3, c.a.d., 0, \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{4}}, \boldsymbol{\pi}, \frac{\mathbf{3\pi}}{\mathbf{2}},$

4 réflexions scindées en deux familles



$\boldsymbol{n=3}$ donc $\boldsymbol{D_3}$ contient $2\times 6=6$ éléments

3 rotations de centre le milieu du triangle d'angles respectives $\frac{\mathbf{2k\pi}}{\mathbf{3}}$ tel-que $\mathbf{0}\le \boldsymbol{k}\le 2, c.a.d., 0, \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{3}},$

3 réflexions scindées en une seule famille

4. Groupe de Symétrie $\mathbf{S_n}$

L'ensemble des permutations de l'ensemble$\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\dots,\boldsymbol{n}\}$ forme un groupe de symétrie qui est noté $\mathbf{S_n}$ et dont l'ordre est $|\mathbf{S_n}|$= n!. **Les éléments de $\mathbf{S_n}$sont notés $\boldsymbol{\sigma_1}$, $\boldsymbol{\sigma_2}$, $\boldsymbol{\sigma_3}$, …, $\boldsymbol{\sigma_n}$.**

Exemple

L'ensemble des permutations de l'ensemble $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$ est le groupe de symétrie

$$|S_2| = 2! = 2 \text{ et } S_2 = \{\sigma_1, \sigma_2\}$$

$\sigma_1 : \{a, b\} \longrightarrow \{a, b\}$

$\sigma_2 : \{a, b\} \longrightarrow \{b, a\}$

Il est clair que σ_1 c'est l'identité E car aucun élément n'a subit de permutation.

σ_2 a permuté entre a **et** b de sorte que a prend la place de b et vice versa.

II. Sous Groupes

2.1 Définition

Soient $(G,.)$ un groupe et H un sous ensemble non vide de G. On dit que H est un sous groupe de G si

- $\forall\, g_1, g_2 \in H : g_1.g_2 \in H,$
- $\forall\, g_1 \in H : {g_1}^{-1} \in H.$
- Le groupes $G, \{E\}$ sont les seuls sous groupes triviaux de G.

  Exemple

  le groupe $C_{3v} = \{E, C_3^1, C_3^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ admet les sous groupes suivants

  1. $H_1 = C_3 = \{E, C_3^1, C_3^1\}$
  2. $H_2 = \{E, \sigma_1\}$
  3. $H_3 = \{E, \sigma_2\}$
  4. $H_4 = \{E, \sigma_3\}$

2.2. Théorème de Lagrange

Soient $(G,.)$ un groupe et H un sous groupe de G. Si n, p sont des entiers qui représentent respectivement l'ordre de G et H alors p est un diviseur de n.

Exemple

On reprend l'exemple précédent.

$C_{3v} = \{E, C_3^1, C_3^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ est d'ordre **6.** D'après le théorème de Lagrange, l'ordre d'un sous groupe de C_{3v} est un diviseur de **6** c.a.d., **1, 2, 3, 6 .**

- Si l'ordre est **1**ou **6** le sous groupe est trivial : $\{E\}$ ou C_{3v}.
- si l'ordre est **3** on a le sous groupe $H_1 = C_3 = \{E, C_3^1, C_3^2\}$.
- si l'ordre est **2** on a les sous groupes $H_2 = \{E, \sigma_1\}$, $H_3 = \{E, \sigma_2\}$, $H_4 = \{E, \sigma_3\}$.

2.3. Propriétés

1. Un groupe G doit être au moins d'ordre 4 pour pouvoir avoir un sous groupe non-trivial.

2. Si l'ordre de G est un nombre premier alors G n'a pas de sous groupes non-triviaux.

3. Un sous groupe H un sous groupe de G peut etre Abélien meme si G ne l'est pas.

Dans l'exemple précédent, $C_3 = \{E, C_3^1, C_3^2\}$ est un sous groupe de C_{3v}. On sait déjà que C_3 est Abélien mais C_{3v} ne l'est pas.

2. Si $g \in G$ et H un sous groupe de G. On appelle complexe associé à gauche noté gH *l'ensemble* $gH = \{gh_1, gh_2, \dots, gh_p\}$ o`u $h_1, h_2, h_3, \dots, h_p \in H$. On distingue deux cas:

- **si** $g \in H$ alors $gH = H$
- $g \notin H$ alors gH n'est pas un groupe car $gE = g \notin H$ et donc $E \notin gH$.

2.4. Sous Groupes conjugués-Quotient - Classes

2.4.1 Classe

Définition

- Deux élément g_1, g_2 d'un groupe G sont dit conjugués l'un de l'autre s'il existe un élément g de G tel-que $g_2 = g g_1 g^{-1}$(g n'est pas unique, il peut y avoir plusieurs)
- On appelle classe l'ensemble des éléments conjugués l'un à l'autre.
- On note la classe d'un élément g de G par $\dot{g}$ ou $\bar{g}$.

Propriétés

1. Un élément d'un groupe appartient à une et une seule classe
2. Deux éléments d'une même classe ont nécessairement le même ordre
3. l'élément neutre e d'un groupe G forme une classe avec lui même car

$$\forall g \in G : geg^{-1} = e$$

4. Si G est un groupe Abélien chaque élément forme une classe avec lui même.
En effet, $\forall\, g_1, g_2 \in G$: $g_1.g_2 = g_2, g_1$, en multipliant de part et d'autre par g_1^{-1}on obtient $g_1^{-1}\, g_1.g_2 = g_1^{-1}\, g_2.g_1$, c.a.d., $g_2 = g_1^{-1}\, g_2.g$, donc g_2 et le conjugué de lui même. Il en est de même pour g_1.

Exemple

On considère le groupe $C_{3v} = \{E, C_3^1, C_3^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$

on cherche la classe de E

d'après la propriétés 3, on trouve immédiatement : $\bar{e} = \{e\}$

$\overline{C_3^1} = \{g \in C_{3v}\ tq\ \exists x \in C_{3v}\ et\ \ x C_3^1 x^{-1} = g\}$

$= \{g \in C_{3v}\ tq\ \exists x \in C_{3v}\ et\ \ x C_3^1 = gx\}$

en utilisant la table de Cayley on trouve

$\overline{C_3^1} = \{C_3^1, C_3^2\}$

on trouve aussi $\overline{\sigma_1} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$

Deux éléments de types différents appartiennent à des classes différentes. Les rotations sont dans une classe et les réflexions dans une autre classe.

5. Si $\mathbf{H}$ est un sous groupe de $\boldsymbol{G}$ alors $\boldsymbol{g}\mathbf{H}\,\boldsymbol{g}^{-1}$ est aussi un sous groupe de $\boldsymbol{G}$

6. Si pour tout $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{G}$ on a $\boldsymbol{g}\mathbf{H}\,\boldsymbol{g}^{-1} = \mathbf{H}$ alors $\mathbf{H}$ est appelé sous groupe **invariant** ou **diviseur normalisé**.

6. $\mathbf{G}$ est dit un groupe simple si son seul sous groupe invariant est l'identité $\{\boldsymbol{e}\}$.

7. $\mathbf{G}$ est dit un groupe semi simple si son seul sous groupe Abélien invariant est l'identité $\{\boldsymbol{e}\}$.

2.4.2. Groupe Quotient

Soit $\mathbf{H}$ un sous groupe invariant de $\boldsymbol{G}$ et soient $\boldsymbol{g_1}\,\mathbf{H}, \boldsymbol{g_2}\mathbf{H}, \boldsymbol{g_3}\mathbf{H}, \ldots\, \boldsymbol{g_n}\mathbf{H}$, **ses** complexes associées où $\boldsymbol{g_1}, \boldsymbol{g_2}, \boldsymbol{g_3}, \ldots \boldsymbol{g_n} \in \mathbf{G}$.

L'ensemble $\{\boldsymbol{H},\ \boldsymbol{g_1}\,\mathbf{H},\ \boldsymbol{g_2}\,\mathbf{H},\ \boldsymbol{g_3}\,\mathbf{H}, \ldots, \boldsymbol{g_n}\,\mathbf{H}\}$ forme lui même un groupe pour lequel $\boldsymbol{H}$ joue le rôle de l'élément neutre. Ce groupe s'appelle le groupe quotient et on le note $\boldsymbol{G}\,/\mathbf{H}$ **.**

- Il est important de retenir que chaque élément de $\boldsymbol{G}\,/\mathbf{H}$ **contient** $\boldsymbol{p}$ **éléments** où $\boldsymbol{p}$ est l'ordre de $\mathbf{H}$.
- $\mathbf{H}$ est un groupe mais $\boldsymbol{g_1}\,\mathbf{H}, \boldsymbol{g_2}\,\mathbf{H}, \boldsymbol{g_3}\,\mathbf{H}, \ldots\, \boldsymbol{g_n}\,\mathbf{H}$ ne sont pas des groupes.

III. Isomorphisme -Homomorphisme

3.1. Définition

Soient $(\boldsymbol{G}, .)$ et $(\boldsymbol{G'}, \blacksquare)$ deux groupes et f une application de $\mathbf{G}$ dans $\mathbf{G'}$.

- On dit que $\boldsymbol{f}$ est un homomorphisme de groupe **ssi**

  $\forall\, \boldsymbol{g_1}, \boldsymbol{g_2} \in \boldsymbol{G}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g_1}.\boldsymbol{g_2}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g_1}) \blacksquare \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g_2})$.

Si $\boldsymbol{f}$ est un homomorphisme de groupe, on dit que $\mathbf{G}$ et $\mathbf{G'}$ sont **homomorphe** et on écrit $\boldsymbol{G} \sim \boldsymbol{G'}$

Par un abus de notation on remplace $\blacksquare$ par l'opération **(.)** et on écrit

$\forall\, \boldsymbol{g_1}, \boldsymbol{g_2} \in \boldsymbol{G}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g_1}.\boldsymbol{g_2}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g_1}) . \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g_2})$.

Si de plus, $\boldsymbol{f}$ est bijective on dit que $\boldsymbol{f}$ est un **isomorphisme** et on écrit $\boldsymbol{G} \approx \boldsymbol{G'}$ pour exprimer que $\mathbf{G}$ et $\mathbf{G'}$ sont isomorphe.

- Un **endomorphisme** de groupe $\boldsymbol{f}$ est un **homomorphisme** du groupe $\mathbf{G}$ dans **lui même.**
- Un **automorphisme** de groupe est un **isomorphisme** du groupe **G dans lui même.**

  Exemple

  1. $\boldsymbol{f}$: $(\mathbf{R}, +) \longrightarrow (\mathbf{R}, \times)$ telle-que $\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}}$.

  $\boldsymbol{f}$ est un **isomorphisme** de groupe plus précisément c'est un **automorphisme** de groupe.

  2. $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{C_{3v}}$, $\boldsymbol{G'} = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$, $\boldsymbol{f}$: $(\boldsymbol{G}, .) \longrightarrow (\boldsymbol{G'}, .)$ **tel-que**

  $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{C_3^1}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{C_3^2}) = \mathbf{1}$ **et** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma_1}) = \boldsymbol{f}(, \boldsymbol{\sigma_2}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma_3}) = -\mathbf{1}$

  on peut montrer que f est un homomorphisme de groupe en testant **tous les éléments de** $\boldsymbol{C_{3v}}$ comme suit

$f(EC_3^1) = f(C_3^1) = 1$ et $f(E) \times f(C_3^1) = 1$

$f(\sigma C_3^1) = f(\sigma_3) = -1$ et $f(C_3^1) \times f(\sigma_3) = -1$

IV. Produit directe-semi directe de groupes

4.1. Produit directe

Soients G , G' deux groupes. On considère le produit Cartésien

$$G \times G' = \{(g, g')/g \in G, g' \in G'\}$$

munit de la loi de composition suivante

$$(g_1, g'_1).(g_2, g'_2) = (g_1 g_2, g'_1 g'_2)$$

$g_1 g_2$ est le produit dans G et $g'_1 g'_2$ est le produit dans G'.

*Le couple $(G \times G', .)$ est un groupe d'élément neutre $(e_G, e_{G'})$ et l'*inverse de $g.g'$ est $(g, g')^{-1} = (g^{-1}, g'^{-1})$

L'ensemble $G \times G'$ munit de cette opération s'appelle **le produit directe** de G et G' ou produit **directe externe.**

Si G , G' sont finis alors l'ordre du groupe $G \times G'$ est donner par

$$|G \times G'| = |G| \times |G'|$$

Exemple

On considère les deux groupe $(R, .)$ et $(\mathbb{Z}, +)$*. Dans le groupe $(R \times \mathbb{Z}, \nabla)$ on a*

$$(x, y)\, \nabla (x', y') = (x x', \; y + y')$$

$$(1, -3)\, \nabla (2, 1) = (2, \; 2)$$

$$(1, -3)\, \nabla (2, 3) = (3, \; 0).$$

4.2. Produit semi directe

Soients G , G' deux groupes et $\varphi : G \to Aut(G')$ telle-que

$$g \to \varphi(g) : G' \to G'$$

$$g' \to \varphi(g)\,.\,g'$$

où $Aut(G')$ est l'ensemble de tous les isomorphisme de G' dans G'.

On définit l'application $\tilde{\varphi}$ **par**

$\tilde{\varphi} : G \times G' \to G'$

$(g, g') \to \tilde{\varphi}(g, g') = \varphi(g)\,.\,g'$

L'ensemble $G \times G'$ est munit de la loi de composition interne définie par

$$(g, g') \circledast (g_1, g'_1) = (g.g_1, \; g'.\tilde{\varphi}(g, g'_1)) = (g.g_1, \; g'.\varphi(g).\; g'_1)$$

opération dans G **opération dans G'**

L'ensemble $G \times G'$ munit de la loi de composition interne ⊛ est le groupe produit semi directe noté $G \times_{\varphi} G'$

Exemples

- Si $\varphi(g).\ g' =\ \ gg'g^{-1}$ **on a alors** $\varphi(g).\ g'_1 =\ gg'_1g^{-1}$

$$(g, g')\circledast(g_1, g'_1) = (g.g_1, g'.(gg'_1g^{-1})).$$

- $\star$: $G \times G' \rightarrow G'$
- $(g, g') \rightarrow g \star g' =\ g.g'.g$ on dit que G agit sur G' par conjugaison.

V. <u>Application au groupe des permutations</u> $\mathbf{S_n}$

1. Sot **Ɛ** un ensemble fini de n éléments. On représente une permutation des éléments de **Ɛ** par un tableau à deux lignes. Le nombre de colonnes de la permutation c'est le nombre d'éléments de **Ɛ**.

Exemple

Ɛ$=\{1, 2, 3\}$

$|S_3|$**= 3!= 6, c.a.d.,** on peut permuter les éléments de **Ɛ** avec **6** manière différentes. les permutations sont notées σ_i avec $1 \leq i \leq 6 = |S_3|$.

σ_1: $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}$ $\sigma_1 = E$ **(identité)** , $\sigma_1(1) = 1, \sigma_1(2) = 2, \sigma_1(3) = 3$

σ_2: $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix}$ $\sigma_2(1) = 2, \sigma_2(2) = 3, \sigma_2(3) = 1$

σ_3: $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix}$ $\sigma_3(1) = 3, \sigma_3(2) = 1, \sigma_3(3) = 2$

- σ_2 **,** σ_2 **sont des cycles.**

σ_4: $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix}$ $\sigma_4(1) = 1, \sigma_4(2) = 3,\ \sigma_4(3) = 2$

σ_5: $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix}$ $\sigma_5(1) = 3, \sigma_5(2) = 2,\ \sigma_5(3) = 1$

σ_6: $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix}$ $\sigma_6(1) = 2, \sigma_6(2) = 1,\ \sigma_6(3) = 3$

- σ_4 **,** σ_5 **,** σ_6 **sont des transpositions.**

2. Produit de permutations

1. Le produit de deux permutations est une permutation, mais il n'est pas toujours commutatif (voir table de Cayley de $\mathbf{S_3}$).

Remarque: pour calculer le produit de permutations on commence toujours par la dernière permutation dans le produit et en revient à chaque fois en arrière jusqu'a l'épuisement de toutes les permutations

Exercice: Calculer dans S_7 le produit $(34)(45)(56)\ (45)\ (34)$

Résultat $(34)(45)(56)\ (45)\ (34) = (36)$

2. *Si* $\boldsymbol{x}$ *est un élément* de **Ɛ** et $\boldsymbol{\sigma}$ une permutation d'éléments de **Ɛ** telle-que $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$, alors $\boldsymbol{x}$ s'appelle élément fixe de $\boldsymbol{\sigma}$.

3. le support de $\boldsymbol{\sigma}$ noté **supp($\boldsymbol{\sigma}$)** est l'ensemble des éléments $\boldsymbol{x}$ qui ne sont pas fixes . **supp** $(\boldsymbol{\sigma})$= $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Ɛ} / \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{x}\} = \boldsymbol{Ɛ} - \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Ɛ} / \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\}$

Exemple

supp(σ_1)= $\emptyset$, supp(σ_2)= supp(σ_3)= Ɛ, supp(σ_4) $= \{2, 3\}$.

4. *Si* $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}'$ *sont deux permutations telles-que* **supp($\boldsymbol{\sigma}$)** $\cap$ $\mathbf{supp}(\boldsymbol{\sigma}')$= $\emptyset$, **alors** $\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}'.\boldsymbol{\sigma}$

3 . Puissance d'une permutation

- ***Soit*** $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{N}$ ***et*** $\boldsymbol{\sigma}$ une permutation d'éléments de **Ɛ.**
  Si $\boldsymbol{p} = \mathbf{0}$ *alors* $\boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{E}$ **(identité)**
  Si $\boldsymbol{p} \geq \mathbf{1}$ *alors* $\boldsymbol{\sigma}^p = \underbrace{\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\sigma} \ldots \boldsymbol{\sigma}}_{p\ fois}$
  Si $\boldsymbol{p} \in \mathbb{Z}^-$ ***,c.a.d.,*** $\boldsymbol{p} = -\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m} \in \boldsymbol{N}$ ***alors*** $\boldsymbol{\sigma}^p = (\boldsymbol{\sigma}^{-1})^m$ *où* $(\boldsymbol{\sigma}^{-1})$*est la permutation inverse de* $\boldsymbol{\sigma}$.
- $\boldsymbol{\sigma}^{m+p} = \boldsymbol{\sigma}^m \boldsymbol{\sigma}^p$
- $(\boldsymbol{\sigma}^m)^p = (\boldsymbol{\sigma}^p)^m = \boldsymbol{\sigma}^{pm}$, ***m,p*** $\in \mathbb{Z}$.
- ***Définitions***

1. *Soient* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Ɛ}$ ***et*** $\boldsymbol{\sigma}$ *une permutation d'éléments de Ɛ. On dit que* $\boldsymbol{x}$ *est* $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{equivalent}$ ***à*** *y s'il existe* $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}$ *tel-que* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{y})$.

2. *Une classe d'équivalence pour la relation* $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{equivalence}$ *est appelée* $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{orbite}$.

Exemple

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \\ \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{7} \end{matrix}$$

trouver la $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{orbite}$ *de* $\mathbf{1}$, $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{orbite}$ *de* $\mathbf{5}$

La $\sigma -$ *orbite de* $\mathbf{1}$ *est la classe d'équivalence de* $\mathbf{1}$ *elle est notée* $\bar{\mathbf{1}}$.

$$\bar{\mathbf{1}} = \{y \in E \ \ et \ \ y \quad est\ \sigma - equivalent\ à\ 1\ \}$$

$\boldsymbol{y}$ *est* $\boldsymbol{\sigma - equivalent\ à\ 1} \Rightarrow \exists\, \boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}$ *tel-que* $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\sigma^m(1)}$

Eneffet:

$\boldsymbol{\sigma(1) = 6, \sigma^2(1) = \sigma(6) = 3, \sigma^3(1) = \sigma(3) = 1, \sigma^4(1) = 1}$

$\bar{\mathbf{1}} = \{1,3,6\}$
$\boldsymbol{\sigma(5)}=5$,$\bar{\mathbf{5}} = \{5\}$

4 . Cycle et décomposition d'une permutation

- *L'ordre d'une permutation* $\boldsymbol{\sigma}$ ***est le plus petit entier*** $\boldsymbol{k}$ ***non nul*** *qui satisfait* $\boldsymbol{\sigma^k = E}$.
  Si $\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{x\_1}\ ,\ \boldsymbol{x\_2}, \boldsymbol{x\_3}, \dots ,\ \boldsymbol{x\_k}\ ) \in \mathbf{S_n}$ tels-que $\boldsymbol{\sigma(x_1) = x_2}$, $\boldsymbol{\sigma(x_2) = x_3, \dots \sigma(x_{k-1}) = x_k, \sigma(x_k) = x_1}$. Alors $\boldsymbol{\sigma}$ *est dite un* $\boldsymbol{k}$ ***- cycle ou un cycle de longueur*** $\boldsymbol{k}$ *avec* $\boldsymbol{k}$ *est l'ordre de* $\boldsymbol{\sigma}$*. . La longueur* $\boldsymbol{k}$ *d'un cycle vérifie* $\boldsymbol{k \leq n}$ *où* $\boldsymbol{n = card}$**E**.

  Exemple
- $\boldsymbol{\sigma_2} \begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{matrix}$
  $\boldsymbol{\sigma_2\{1,2,3\}} = \boldsymbol{(123)}$
  $\boldsymbol{\sigma_2(1) = 2, \sigma_2(2) = 3, \sigma_2(3) = 1}$
  $\boldsymbol{\sigma_2}$ ***est un*** $\mathbf{3}$ ***−cycle***
- *Dans le cas général si* $\boldsymbol{\sigma}$ *est un* $\boldsymbol{k}$ ***- cycle*** *alors* supp($\boldsymbol{\sigma}$)= $\{\boldsymbol{x\_1}\ ,$ $\boldsymbol{x\_2}, \boldsymbol{x\_3}, \dots ,\ \boldsymbol{x\_k}\}$ tels-que $\boldsymbol{\sigma(x_1) = x_2, \sigma(x_2) = x_3, \dots \sigma(x_{k-1}) = x_k, \sigma(x_k) = x_1}$.
- L'ordre d'un cycle est égale à la longueur du cycle.
- Cependant il ya des permutations qui ne sont pas des cycles

$$\begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \end{matrix}$$

on a $\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2} \rightarrow \mathbf{1}$ ***ce qui donne la transposition*** $\boldsymbol{(12)}$*,*

on a $\mathbf{3} \rightarrow \mathbf{4} \rightarrow \mathbf{3}$ ***ce qui donne la transposition*** $\boldsymbol{(34)}$.

- *Une permutation qui n'est pas un **k - cycle** se décompose en produit de cycles*

Exemple

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 1 & 2 & 5 & 3 & 8 & 9 & 7 \end{matrix} = (\mathbf{163})(\mathbf{24})(\mathbf{789})$$

On remarque que les supports des nouvelles permutations sont deux à deux disjoints.

Théorème

- *Toute permutation de $\mathbf{S_n}$ est un produit de cycle à support deux à deux disjoints.*

Théorème

Soit $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\delta_1\delta_2\delta_3} \; \dots \boldsymbol{\delta_p}$ une permutation de $\mathbf{S_n}$ produit de p cycle à support deux à deux disjoints $|\boldsymbol{\delta_i}| = k_i, \quad 1 \le i \le p$. L'ordre de $\boldsymbol{\sigma}$ est donné par

$$\boldsymbol{ord(\sigma) = ppmc(k_1, k_2, k_3, \dots k_p)}$$

***Remarque**: Attention le théorème n'est pas valide si les supports de cycles ne sont pas deux à deux disjoints*

Exemple

- $\boldsymbol{\sigma = (1456)(789)}$

$\boldsymbol{k_1 = |(1456)|}$***=4,*** $\boldsymbol{k_2 = |(789)|}$***=3***

$\boldsymbol{|\sigma| = ord(\sigma)}$***= pp*** $\boldsymbol{ppmc(4,3)}$***=12***

- $\boldsymbol{\sigma' = (1468)(789)}$

$\boldsymbol{supp(1468) \cap supp(789) = \{8\} \neq \emptyset}$

Dans ce cas le théorème ne s'applique pas

Que faire dans un cas pareil?

On peut suivre l'une des deux techniques suivantes:

1. *On calcule le produit des cycle puis on calcule l'ordre de la permutation résultante*

2. *On décompose chaque cycle en produit de transposition**(paragraphe suivant)***

Proposition

- *Pour $n \geq 2$ toute permutation de $\mathbf{S_n}$ est un produit de transpositions. On se restreint au transpositions de la forme $(1, i)$,$2 \leq i \leq n$ où $(i, i+1)$, $1 \leq i \leq n-1$.*
- *Tout cycle est un produit de transpositions.*
- $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) = (\mathbf{1}, \boldsymbol{j})(\mathbf{1}, \boldsymbol{i})(\mathbf{1}, \boldsymbol{j})$

En effet,

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k) = (x_1, x_k)(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{k-1})$

$= (x_1, x_k)(x_1, x_{k-1})\,)(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{k-2}) = (x_1, x_k)(x_1, x_{k-1})\,(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{k-2}) =$
$=(x_1, x_k)(x_1, x_{k-1}) \dots (x_1, x_2)$

<u>Exemple</u>

$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{matrix} =$
$(23)(456)=(23)(46)(45)=(13)(12)(13)(16)(14)(16)(15)(14)(15)$

5. <u>Inversion-Signature</u>

- *Une **inversion** d'une permutation $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{S_n}$ est un couple $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ tel-que $\mathbf{1} \leq \boldsymbol{i} < j \leq n$ et $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{i}) > \sigma(j)$. Le nombre d'inversions de $\boldsymbol{\sigma}$ est noté $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\sigma})$.*
- *La signature de la permutation σ est le nombre:* $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma})=(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{I}(\sigma)}$
- *Si $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma})$**=1,** on dit que la permutation est **paire***
- *Si $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma})$**=-1,** on dit que la permutation est **impaire***
- *Si $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\sigma})$**=0** alors $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E}$. Autrement dit, l'identité n'a aucune inversion.*
- $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{E})=(-\mathbf{1})^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$.
- L'application $\boldsymbol{\varepsilon}: \ \mathbf{S_n} \to \{-\mathbf{1}, \mathbf{1}\}$
  $\boldsymbol{\sigma} \to \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma})$

est un morphisme de groupe,c.a.d.**,** $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}') = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma})\,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}')$

- $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$**=-1**
  On a $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) = \boldsymbol{\varepsilon}[(\mathbf{1}, \boldsymbol{j})(\mathbf{1}, \boldsymbol{i})(\mathbf{1}, \boldsymbol{j})\,]$

<u>Exercice</u>

Etudier la parité de la permutation suivante

$$\sigma = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 8 & 2 & 4 & 1 & 7 & 9 & 3 & 5 \end{matrix}$$

<u>Solution</u>

$\boldsymbol{\sigma\sigma} = (\mathbf{1679})(\mathbf{283}) = (\mathbf{15})(\mathbf{19})(\mathbf{17})(\mathbf{16})(\mathbf{23})(\mathbf{28})$
$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}) = (-\mathbf{1})^{\mathbf{6}}$***=1***
$\boldsymbol{\sigma}$ est paire

6. <u>Théorème de Cayley</u>

Tout groupe fini d'ordre $\boldsymbol{n}$ *est isomorphe à un sous groupe de* $\boldsymbol{S_n}$

Exemple

$\boldsymbol{G = \{I, a, a^2\}}$ ***avec*** $\boldsymbol{a^3 = I}$

$$\boldsymbol{G \approx C_3 \ \cong \ \{E, \sigma_1, \sigma_2\} < S_3}$$

6. <u>Groupe Alterné</u> $\boldsymbol{A_n}$

$\boldsymbol{A_n = \{\sigma \in \ S_n \ avec\ \varepsilon(\sigma) = 1 \ \}}$