Généralités sur les Groupes de Symétrie en Physique

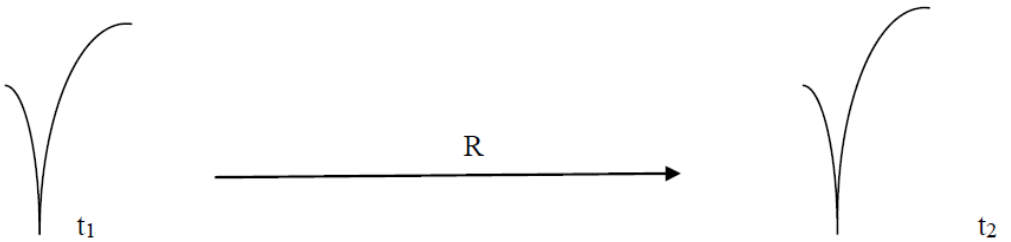
Introduction

Le concept d'un ensemble invariant fait référence à un ensemble de particules ou de systèmes qui possède une propriété ou une caractéristique particulière qui reste constante au fil du temps malgré les évolutions et les interactions entre les particules ou les systèmes individuels. Cette notion est souvent utilisée pour étudier la conservation de certaines quantités physiques fondamentales au sein d'un système ou d'un ensemble de systèmes. En physique, la symétrie est un concept fondamental qui fait référence à une caractéristique d'un système physique qui reste inchangée sous certaines transformations. La notion de symétrie joue un rôle essentiel dans la compréhension des lois de la physique et permet de simplifier les problèmes complexes en identifiant des propriétés invariables

I. Opérations de symétrie-Eléments de symétrie

1.1. Définition:

Une opération de symétrie (R) sur un objet (D) consiste à emmener cet objet dans une nouvelle configuration qui est indiscernable de celle de départ.



(Configuration initiale) (Nouvelle configuration)

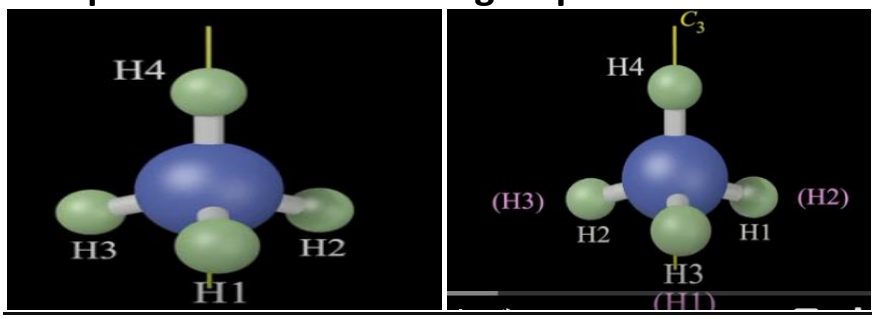
On voit bien que l'observateur est incapable de dire que l'objet a subi une transformation (nouvelle configuration et configuration initiale indiscernables).

1.2.Définition

Un élément de symétrie est une entité géométrique par rapport à laquelle s'effectue l'opération de symétrie(par rapport à un point, à une droite, un plan, etc.).

Nous allons définir les opérations de symétries des objets finis. Ces opérations transforme l'objet en un objet identique indiscernable de celui de départ. Ils sont au nombre de $\mathbf{5}$ L'identité , la rotation, l'inversion, la réflexion par rapport à un plan, la roto-réflexion.

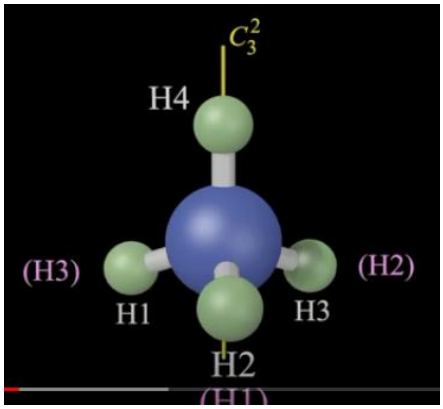
- **L'identité**
  C'est une opération qui consiste à ne rien faire. Elle joue un grand rôle dans les calculs sur les opérations de symétries. Elle est notée par **E**
- **La rotation** $\boldsymbol{C_n}$
  C'est une opération qui consiste à faire tourner un objet fini d'un angle $\frac{2\pi}{n}$ au tours d'un axe pour l'amener en coïncidence avec lui même. Prenons la molécule du Méthane comme exemple et considérons la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$,c.a.d, **120°** au tours de l'axe passant par l'atome de Carbone et par l'atome d'hydrogène $\boldsymbol{H_4}$.



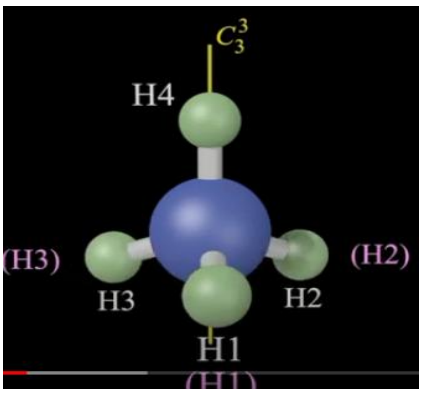
(1) **(2)**

(1): Position initiale **(2): position après l'action de rotation**

Ne prenons pas les labelles des atomes la molécule finale est indiscernable de la molécule initiale. Cette opération de symétrie rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ au tours d'un axe est notée $\boldsymbol{C_3}$. En générale une opération de symétrie rotation d'angle $\frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{n}}$ au tours d'un axe est notée $\boldsymbol{C_n}$ et $\boldsymbol{n}$ est appelée ordre de la rotation. L'axe de symétrie est l'élément de symétrie au tours duquel s'effectue l'opération de symétrie, il est lui aussi noté $\boldsymbol{C_n}$. On doit bien distingué l'opération de symétrie qui est une transformation d'un objet de l'élément de symétrie: un point, un axe ou un plan sur lequel on s'appui pour effectuer la transformation. En effectuant une autre rotation d'angle $\frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{3}}$ on trouve une autre orientation de la molécule de méthane toujours indiscernable de celle de départ , mais qui n'est pas encore celle de départ notée $\boldsymbol{C_3^2}$.



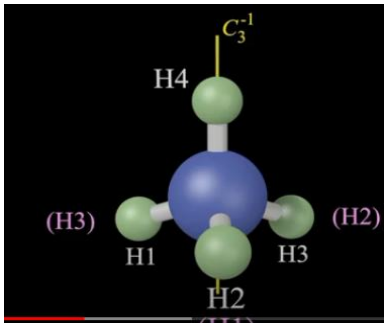
Effectuons une autre fois une rotation d'ordre $\boldsymbol{3}$, alors tous les atomes d'hydrogène regagnent leur position initiale et on obtient l'opération identité



$$C_3^3 = E$$

Lorsque l'opération se fait dans le sens inverse du sens trigonométrique elle est notée C_3^{-1} et on a

$$C_3^{-1} = C_3^2$$



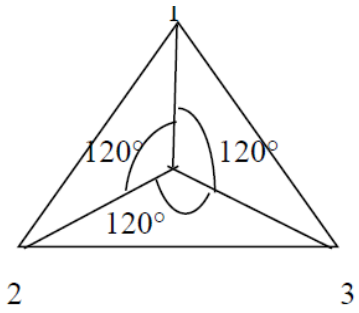
L'opération de rotation C_n est aussi notée $C_{(\alpha)}$.

C_n: ici n indique le nombre de fois que l'on tourne un objet avec un angle de rotation $\frac{2\pi}{n}$

$C_{(\alpha)}$: ici α indique l'angle de rotation.

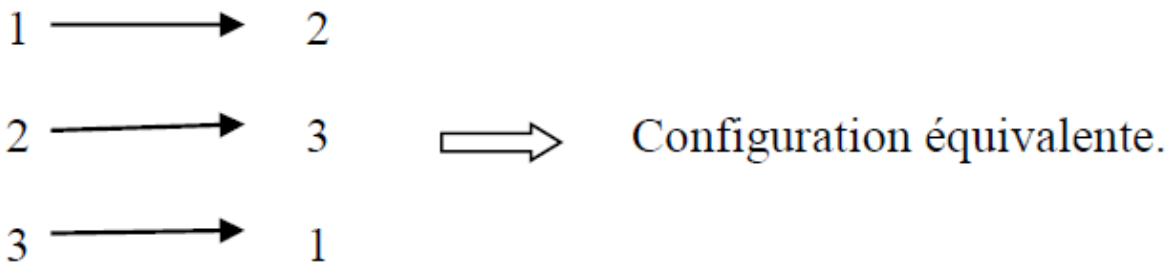
Exemple:

$$3\alpha = 2\pi \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

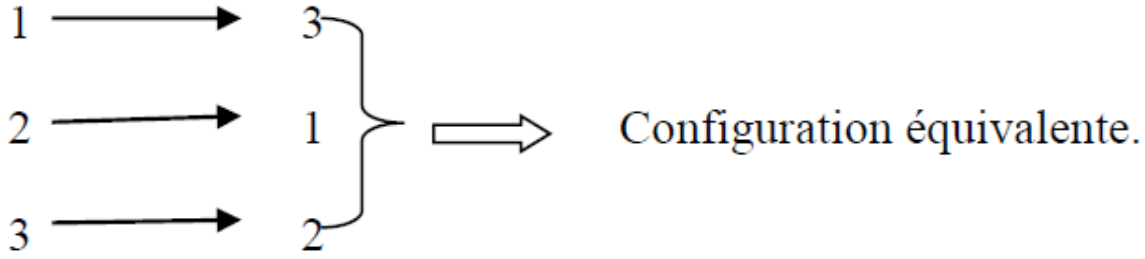


On tourne ce triangle 3 fois d'un angle de 120° pour retrouver la configuration initiale.

Si α = 120°, la configuration est équivalente à la configuration initiale mais elle est différente de celle ci.



Si α' =2α = 2×120° = 4π/3



On note la rotation : $C(\alpha) \equiv C_{\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \equiv C_n \Rightarrow$ rotation d'ordre n

C_n est appelée axe d'ordre n. Dans notre exemple, $n = 3 \Rightarrow C_3 \Rightarrow$ axe d'ordre 3

$C_3^1 \equiv (C_{\left(1\times\frac{2\pi}{3}\right)}) \equiv C_3$: *On tourne de* $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ ***une fois***

C_3^2: On tourne de $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ **deux fois**

$C_3^3 \equiv (E)$: On tourne de $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ **trois fois**

C_n^m: on tourne m fois la rotation d'un angle $\alpha = \frac{2\pi}{n} \equiv C_{\left(m\times\frac{2\pi}{n}\right)}$

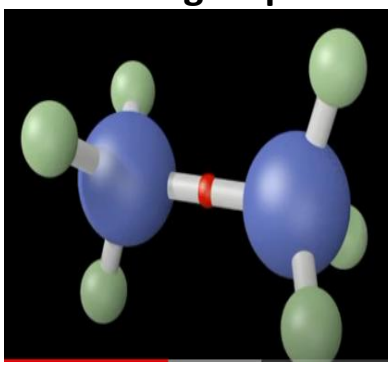
$C_n^n \equiv C_{\left(n\times\frac{2\pi}{n}\right)} \equiv C_{(2\pi)} \equiv$ (E): **On tourne n fois de** $\alpha = \frac{2\pi}{n}$

Remarque:

La rotation $C_{\left(m\times\frac{2\pi}{n}\right)}$ suivie de $C_{\left(l\times\frac{2\pi}{n}\right)} \equiv C_n^{l+m} = C_n^m . C_n^l$

- **L'inversion i**

  cette opération de symétrie consiste à inverser tous les points d'un objet fini par rapport à un point fixe centrale. Si la configuration résultante est indiscernable de la configuration initiale on dit que l'objet possède un centre d'inversion aussi appelé centre de symétrie.



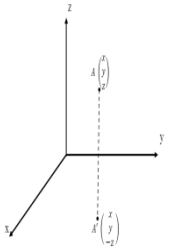
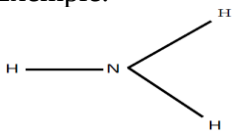
Le centre d'inversion noté i est coloré en rouge.

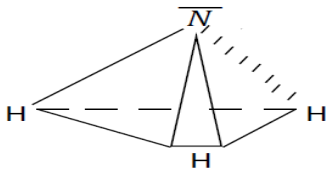
L'application de l'inversion deux fois est équivalente à ne rien faire

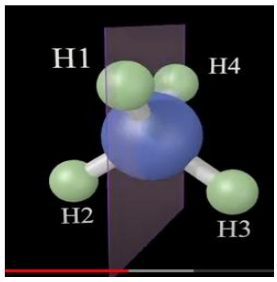
$$i^2 = E$$

- **Réflexion σ par rapport à un plan**

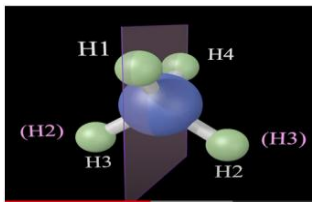
  Plans de symétrie

	Le plan de symétrie est souvent désigné par $\boldsymbol{\sigma}$. $\boldsymbol{\sigma_{(x,y)}}$: désigne la symétrie suivant le plan **(xoy).** $\boldsymbol{\sigma^n = E}$**: si** $\boldsymbol{n}$ **est pair** $\boldsymbol{\sigma^n = \sigma}$**: si** $\boldsymbol{n}$ **est impair**
plans horizontaux	Plans de symétrie perpendiculaires à l'axe de plus grande symétrie ou axe d'ordre le plus élevé ou axe principal. Notés $\boldsymbol{\sigma_h}$; peuvent contenir on non les points équivalents, les objets
plans verticaux Exemple:  L'axe principal $\boldsymbol{C_3}$, $\boldsymbol{n}$ est impair, donc tous les plans verticaux sont notés $\boldsymbol{\sigma_v}$ et on a $\boldsymbol{3\sigma_v}$	Plans contenant l'axe principal(d'ordre le plus élevé)$\boldsymbol{C_n}$**.** Ils sont notés $\boldsymbol{\sigma_v}$**.** On distingue deux sortes: • $\boldsymbol{\sigma_v}$ propres • Plans dièdres $\boldsymbol{\sigma_d}$**:** plans bissecteurs de deux axes $\boldsymbol{C_2}$ consécutifs Si $\boldsymbol{n}$ impair, tous les plans verticaux sont notés $\boldsymbol{\sigma_v}$

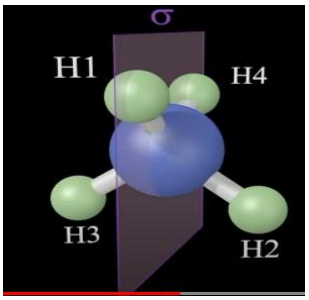
	Si $\boldsymbol{n}$ pair, $\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{\sigma_v}$ et $\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{\sigma_d}$ En l'absence de $\boldsymbol{C_n}$,il n'existe que des plans de symétrie appelés $\boldsymbol{\sigma}$



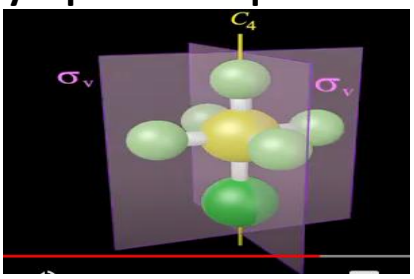
Cet atome présente un plan de symétrie qui passe par l'atome de carbone et les deux atomes d'hydrogène H_1, H_4. L'opération réflexion par rapport à un plan consiste à déplacer chaque atome perpendiculairement au plan à une position équidistante du plan du coté opposé au plan.

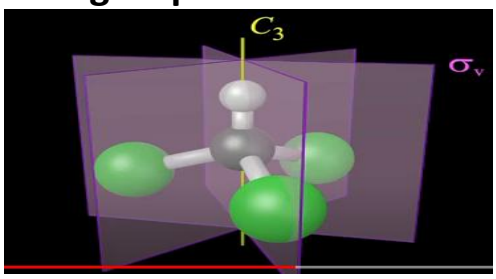


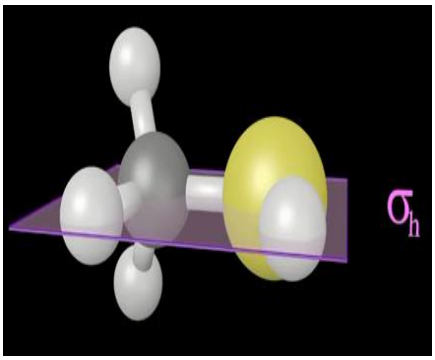
La configuration finale est indiscernable de celle du départ , on dit que la molécule présente un plan de réflexion comme élément de symétrie appelé miroir. L'opération réflexion par rapport à un plan est communément appelée opération miroir. L'opération de symétrie par rapport à un plan est noté $\boldsymbol{\sigma}$**.** Il en est de même pour l'élément de symétrie, c.a.d., le plan de réflexion.

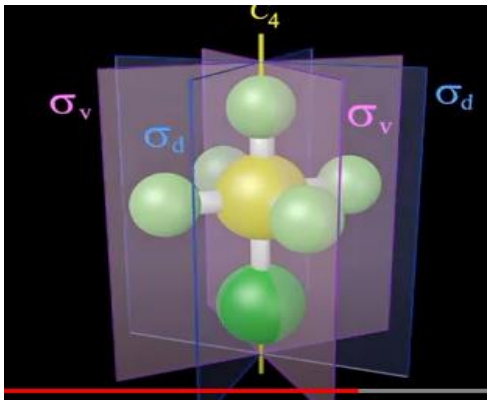


On distingue plusieurs types de miroir $\boldsymbol{\sigma}_h$, $\boldsymbol{\sigma}_v$, $\boldsymbol{\sigma}_d$, en fonction de leur positionnement par rapport à l'axe principal.



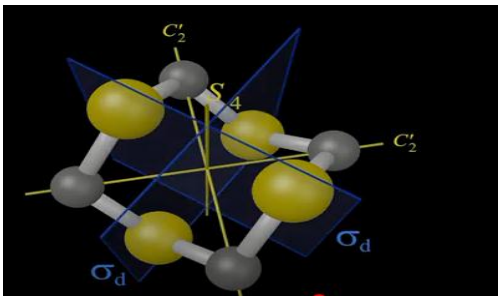


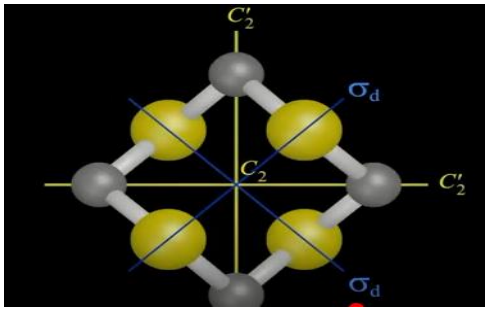




v: vrtical; h: horizontal, d:dièdre

$\boldsymbol{\sigma_d}$:plan miroir bissecteur par rapport au plan miroir $\boldsymbol{\sigma_v}$. Dans certain cas le plan miroir $\boldsymbol{\sigma_d}$ existe sans qu'il ait de plan miroir $\boldsymbol{\sigma_v}$

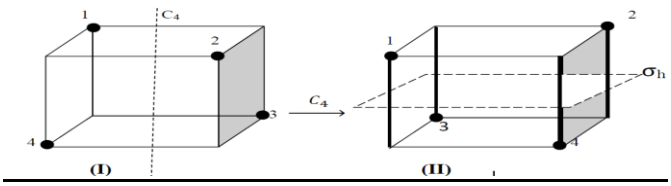


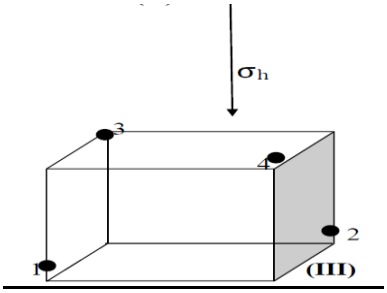


ici $\boldsymbol{\sigma_d}$ sont bissecteur des axes C'_2.

- **<u>La roto-réflexion</u>** $\boldsymbol{S_n}$

<u>Exemple</u>





(I) ≠ (II) ⇒ C_4 n'est pas une opération de symétrie.

(I) = (III) ⇒ C_4 suivie de σ_h est une opération de symétrie notée S_4

La roto-réflexion consiste en une rotation de $\frac{2\pi}{n}$ au tours d'un axe suivit d'une réflexion par rapport au plan perpendiculaire à cet axe. Si cette opération amène l'objet résultant en coïncidence avec lui même on dit que l'objet possède un axe de roto-réflexion d'ordre n comme élément de symétrie. L'opération de symétrie est notée S_n.

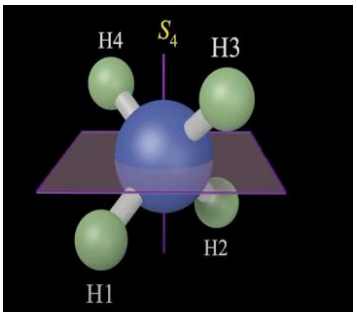
Remarque :

1) Chaque fois que n est pair, pour un axe impropre de rotation, il existe nécessairement l'axe propre $C_{\left(\frac{n}{2}\right)}$.

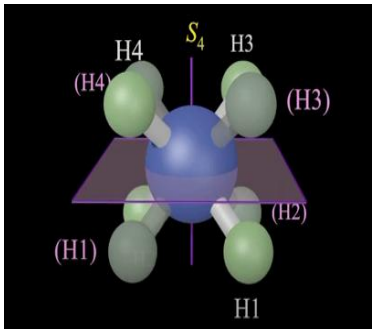
2) Si n est pair**:** S_n engendre une série d'opérations notées : S_n^1 ; S_n^2 ; S_n^3 ; …;S_n^n.

3) Si n est impair: S_n engendre une série d'opérations notées : S_n^1 ; S_n^2 ;… ; S_n^n ; …;S_n^{2n},**c.a.d,** $2n$ opérations de symétrie.

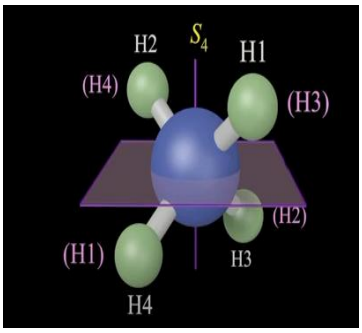
Dans l'exemple suivant, cette molécule possède un axe de symétrie et un plan de symétrie.



On effectue une rotation d'angle $\frac{2\pi}{4}$ au tours de l'axe S_4



Puis on réalise une réflexion par rapport au plan perpendiculaire à S_4



Si on néglige les notations des atomes d'hydrogènes on voit bien que le résultat donne une molécule indiscernable par rapport à celle de départ.

Cette opération de symétrie est une combinaison de deux opération de symétrie que nous avons déjà : une rotation $\boldsymbol{C_4}$ suivit d'une réflexion $\boldsymbol{\sigma_h}$. Le résultat est une roto-réflexion d'ordre $\boldsymbol{4}$ notée et on écrit $\boldsymbol{S_4 = \sigma_h o C_4}$.

1.3. Tableau récapitulatif

Elément de symétrie	Opération de symétrie
Axe de rotation (propre)	Rotation autour de cet axe
Centre de Symétrie (ou d'inversion)	Inversion ($\boldsymbol{i}$) de tous les points
Plan	Réflexion dans ce plan
Axe de rotation impropre	Rotation suivie d'une réflexion dans un plan perpendiculaire à cet axe

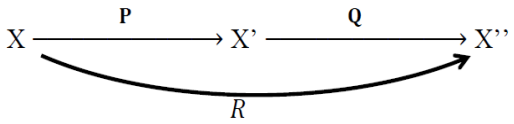
II. Produit de symétrie

2.1. Produit de deux opérations de symétrie

Soient $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ deux opérations de symétrie quelconques. L'opération $\boldsymbol{R}$ telle- que

$$\boldsymbol{R = QP}$$

est produit des deux opérations $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ définit comme suit



et qui consiste à appliquer l'opération $\boldsymbol{P}$ puis l'opération $\boldsymbol{Q}$.

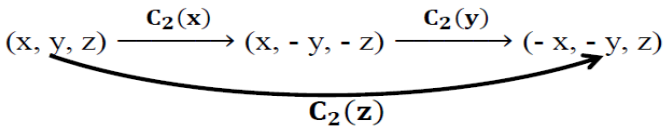
Remarque: Dans le cas général $\boldsymbol{PQ \neq QP}$.

2.1.1. Propriétés

1. Le produit de deux opérations de symétrie est une opération de symétrie (propriété de **fermeture**).

2. Si $\boldsymbol{P\,Q} = \boldsymbol{QP}$ on dit que le produit est **commutatif**

Exemple:



$C_2(z) = C_2(y).C_2(x)$

On remarque que : $C_2(y).C_2(x) = C_2(x).C_2(y) \Longrightarrow$ produit commutatif.

Le produit de deux rotations autour du même axe est commutatif.

Remarque: le produit de deux rotations autour de deux axes différents n'est pas commutatif.

2.2. Produit de trois opérations de symétrie

Soient $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ et $\boldsymbol{T}$ trois opérations de symétries. On définit le produit de ces trois opérations comme suit :

$$\boldsymbol{P\,Q\,T = P(Q\,T) = (P\,Q)\,T}$$

On dit que le produit est **associatif.**

2.3. Opération inverse

Soit $\boldsymbol{T}$ une opération de symétrie sur un objet $\boldsymbol{D}$. L'opération de symétrie qui rend $\boldsymbol{D}$ à sa position initiale s'appelle l'opération inverse de $\boldsymbol{T}$, elle est notée $\boldsymbol{T^{-1}}$ et on a

$$\boldsymbol{TT^{-1} = T^{-1}\,T = E.}$$

2.3.1. Propriétés

- Soient $\boldsymbol{T}$ **et** $\boldsymbol{F}$ deux opérations de symétrie

$$\boldsymbol{(TF)^{-1} = F^{-1}T^{-1}}$$

On peut facilement montrer cette propriété en utilisant l'associativité

$\boldsymbol{(TF)F^{-1}T^{-1} = T(F^{-1}F)T^{-1} = T\,ET^{-1} = TT^{-1} = E}$.

Par la définition de l'opération inverse on en déduit que

$$\boldsymbol{(TF)^{-1} = F^{-1}T^{-1}}$$

III. Groupe de symétrie

Soit $\boldsymbol{G}$ l'ensemble des symétrie d'un objet $\boldsymbol{D}$ cette ensemble possède une structure mathématique dite groupe et il est appelé groupe de symétrie. Cette structure mathématique sera étudier dans le second chapitre.