

## Chapitre 3: Analyse des systèmes discrets et stabilité

### 1. Stabilité des asservissements échantillonnés

**Définition 1 :** Un système est dit stable si, écarté de sa position de repos, celui-ci revient à cette position lorsque la cause qui l'en a écarté cesse.

**Définition 2 :** Un système est dit stable si sa réponse à toute entrée bornée, la sortie est bornée.

#### 1.1. Critère mathématique de stabilité

La définition de la stabilité des systèmes discrets est similaire aux systèmes continus: à une entrée finie doit correspondre une sortie finie.

Dans l'étude des systèmes linéaires continus qu'un système est stable si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle négative. Ce théorème s'étend aussi aux systèmes échantillonnés par analogie entre les plans en  $p$  et en  $z$  puisque le demi plan gauche (domaine de stabilité) se ramène à l'intérieur du cercle unité du plan  $z$ . Si la fonction de transfert de la forme suivante :

$$H(p) = \frac{N(p)}{\prod_{i=1}^m (p - p_i)}$$

Avec  $p_i = \sigma_i + j\omega_i$

Donc le système est stable en continu si  $\sigma_i < 0$

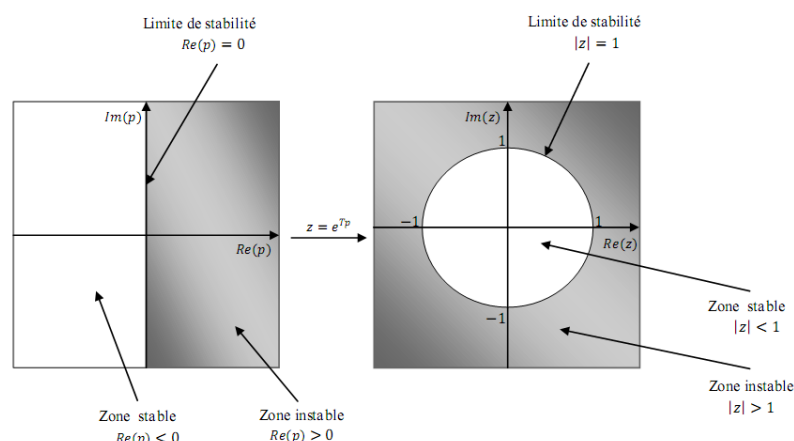
En appliquant la transformation  $z = e^{Tp}$ , on obtient :

$$z_i = e^{\sigma_i T} e^{j\omega_i T}$$

$\sigma_i < 0 \Rightarrow |z_i| = |e^{\sigma_i T}| < 1$

Donc, un système échantillonné est stable si et seulement si tous les pôles  $p_i$  de sa fonction de transfert sont  $|z_i| < 1$ .

Un système échantillonné, est stable si les pôles de sa fonction de transfert se trouvent à l'intérieur du cercle unité.



Domaine continu : Plan complexe

Domaine discret : Plan complexe

Figure 1. Correspondance entre le plan complexe et le plan complexe : Passage du domaine continu au domaine discret

#### Exemple :

##### a. Stabilité en boucle ouverte d'un système échantillonné du premier ordre

Soit un système régi, en boucle ouverte, par une équation de récurrence suivante :

$$s_k = be_k + as_{k-1}$$

En appliquant la transformée en  $z$ , on trouve :

$$S(z) = bE(z) + az^{-1}S(z)$$

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{b}{1 - az^{-1}}$$

L'unique pôle de la fonction de transfert est  $a$ . Donc, la condition de stabilité est :  $|a| < 1$

### b. Stabilité en boucle fermée d'un système échantillonné du premier ordre

Un système échantillonné de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(z)$  placé dans une boucle à retour unitaire (Figure.2)

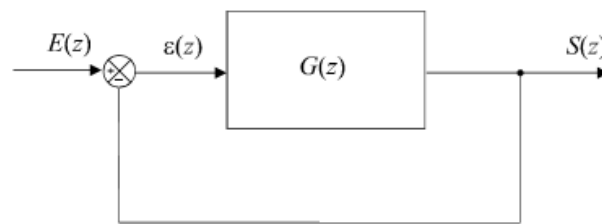


Figure 2. Schéma d'un asservissement échantillonné à retour unitaire.

La fonction de transfert (selon l'exemple 1) est donnée par :

$$G(z) = \frac{b}{1 - az^{-1}} = \frac{bz}{z - a}$$

Les paramètres  $b$  et  $a$  sont positifs. On supposera que  $a < 1$ .

La fonction de transfert en boucle fermée:

$$H(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{\frac{bz}{z - a}}{1 + \frac{bz}{z - a}} = \frac{bz}{(b + 1)z - a}$$

L'unique pôle de la fonction de transfert est :  $\frac{a}{b+1}$

Le système est stable en boucle fermée si l'unique pôle de cette fonction de transfert est inférieur à

$$1 : \frac{a}{b+1} < 1$$

### 1.2.Critère algébrique de Jury

Il n'est pas possible d'utiliser le critère mathématique pour les systèmes d'ordre élevé ou ayant des paramètres variables. Un critère algébrique existe, dit de Jury permet de diagnostiquer la stabilité d'un système sans avoir à calculer ses pôles. Ce critère s'applique directement sur le polynôme caractéristique du système.

Soit un système discret dont la fonction de transfert est la suivante:

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Le polynôme caractéristique du système est donné comme suit:

$$D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  sont des coefficients réels et avec  $a_0 > 0$ .

Les coefficients de  $D(z)$  permettent de construire la table de Jury formée de  $(2n-3)$  lignes de la manière suivante :

Ligne	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$	...	$z^{n-2}$	$z^{n-1}$	$z^n$
1	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$a_{n-3}$	...	$a_2$	$a_1$	$a_0$
2	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	...	$a_{n-2}$	$a_{n-1}$	$a_n$
3	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$b_{n-3}$	$b_{n-4}$	...	$b_1$	$b_0$	
4	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	...	$b_{n-2}$	$b_{n-1}$	
5	$c_{n-2}$	$c_{n-3}$	$c_{n-4}$	$c_{n-5}$	...	$c_0$		
6	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	...	$c_{n-2}$		
.	.							
.	.							
.	.							
$2n-5$	$p_3$	$p_2$	$p_1$	$p_0$				
$2n-4$	$p_0$	$p_1$	$p_2$	$p_3$				
$2n-3$	$q_2$	$q_1$	$q_0$					

Avec :

avec

$$b_i = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1-i} \\ a_0 & a_{i+1} \end{vmatrix} \text{ pour } i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$$

$$c_i = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-2-i} \\ b_0 & b_{i+1} \end{vmatrix} \text{ pour } i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-2$$

.

.

.

$$q_i = \begin{vmatrix} p_3 & p_{2-i} \\ p_0 & p_{i+1} \end{vmatrix} \text{ pour } i = 0, 1, 2$$

### Enoncé :

Un système ayant une équation caractéristique  $D(z)$  est stable si toutes les conditions suivantes sont satisfaites :

1.  $|a_n| < a_0$
2.  $D(1) > 0$
3.  $(-1)^n D(-1) > 0$
4.  $|b_{n-1}| > |b_0|$   
 $|c_{n-2}| > |c_0|$
- .
- .
- .
- $|q_2| > |q_0|$

**Exemple :**

Soit le polynôme caractéristique :

$$D(z) = z^2 + z + 0,21$$

$$a_0 = 1, a_1 = 1 \text{ et } a_2 = 0,21$$

Dan ce cas, le tableau de Jury a  $2n - 3 = 1$  ligne (car  $n = 2$ ). Il faut donc vérifier les trois premières conditions de Jury :

- Première condition:  $|a_2 = 0,21| < a_0 = 1$  ;
- Deuxième condition :  $D(1) = 1 + 1 + 0,21 = 2,21 > 0$  ;
- Troisième condition :  $(-1)^2 D(-1) = 1(1 - 1 + 0,21) = 0,21 > 0$  .

Comme les trois conditions sont satisfaites, donc les racines du polynôme  $D(z)$  sont à l'intérieur du cercle unité, et par conséquent, et d'après Jury, le système associé est stable.

**Remarque:** Si  $a_0 < 0$  :

- d'abord, on construit un autre polynôme :  $D_1(z) = -D(z)$  ;
- puis, on traite le nouveau polynôme  $D_1(z)$  par le critère de Jury.

**1.3. Influence de la fréquence d'échantillonnage sur la stabilité**

Le choix de la période d'échantillonnage peut être influencée sur la stabilité d'un système échantillonné. Soit un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  placé dans une boucle à retour unitaire avec :

$$G(p) = \frac{K}{1 + T_p p}$$

Le système échantillonné asservi qui possédera le même fonctionnement aura pour fonction de transfert (Figure 5):

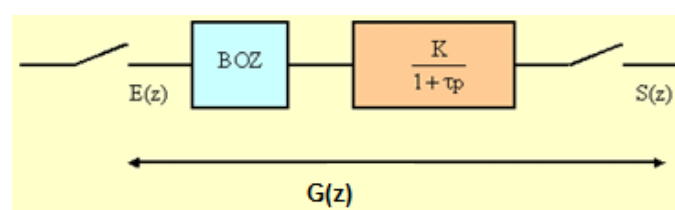


Figure 5 : système asservis échantillonné premier ordre

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)}$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z} \left[ \frac{K}{p(1+\tau p)} \right] = \frac{K \left( 1 - e^{-\frac{T_e}{T}} \right)}{z - e^{-\frac{T_e}{T}}}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{K \left( 1 - e^{-\frac{T_e}{T}} \right)}{z - e^{-\frac{T_e}{T}} + K \left( 1 - e^{-\frac{T_e}{T}} \right)}$$

H(z) possède un pôle donné par :

$$p_1 = K \left( e^{\frac{T_e}{T}} - 1 \right) + e^{-\frac{T_e}{T}}$$

Le système échantillonné sera stable si et seulement si :

$$\left| K \left( e^{\frac{T_e}{T}} - 1 \right) + e^{-\frac{T_e}{T}} \right| < 1$$

Donc :

$$K \left( e^{\frac{T_e}{T}} - 1 \right) + e^{-\frac{T_e}{T}} < 1 \Rightarrow K > -1$$

Ou bien :

$$K - (1+K)e^{-\frac{T_e}{T}} < 1 \Rightarrow K < \frac{1+e^{-\frac{T_e}{T}}}{1+e^{\frac{T_e}{T}}}$$

Donc, il existe une limite supérieure du gain statique qui délimite le domaine stable.

Si le gain statique qui est fixé, on a:

$$K - (1+K)e^{-\frac{T_e}{T}} < 1 \Rightarrow -(1+K)e^{-\frac{T_e}{T}} < 1-K$$

$$e^{-\frac{T_e}{T}} > \frac{1-K}{1+K} \Rightarrow -\frac{T_e}{T} > \ln \frac{1-K}{1+K} \Rightarrow T_e < T \ln \frac{1-K}{1+K}$$

La période d'échantillonnage doit donc être inférieure à une valeur qui dépend des paramètres du système c.à.d. la fréquence d'échantillonnage doit être supérieure à un certain seuil.

**Remarque :** la fréquence d'échantillonnage n'est pas uniquement dictée par le théorème de Shannon (d'ailleurs il n'est pas toujours possible de connaître a priori les spectres des signaux dans le système) mais aussi par les caractéristiques du système.

### Choix de la fréquence d'échantillonnage

Pour choisir la fréquence d'échantillonnage, d'abord il faut évaluer la bande passante  $f_{pas}$  du système asservi et de choisir une fréquence d'échantillonnage telle que :

$$6 f_{pas} < f_e < 25 f_{pas}$$