Chapitre 3: Systèmes discrets, fonction de transfert discrète, analyse des systèmes discrets

Master 1: électrotechnique industrielle

Université de Djilali Bounaama Khemis Miliana

Table des matières

Définitions

1. Automatique

Ensemble des techniques qui permettent d'assurer le contrôle d'un système dynamique (procédé physique) sans intervention humaine.

2. Modélisation

Le principe de la modélisation est de développer un modèle qui imite le plus fidèlement possible la dynamique d'un système réel.

3. Identification

est utilisée pour obtenir une représentation approximative d'un système inconnu à l'aide d'un modèle mathématique.

4. Commande

L'objectif de la commande est d'agir sur les entrées d'un système afin de :

- maintenir la sortie du système constante : ‘mode en régulation' ;
- faire suivre à certaines sorties du système une consigne variable: ‘mode en asservissement'.

5. Commande en boucle ouverte (BO)

Le signal de commande est indépendant du signal de sortie.

6. Commande en boucle fermée (BF)

Le signal de commande dépend d'une façon ou d'une autre du signal de sortie.

7. Systèmes linéaire

Il répond au principe de superposition et de proportionnalité.

8. Systèmes monovariables

Il possède un seul signal d'entrée et un seul signal de sortie.

9. Systèmes continus

Un système est dit continu lorsque les grandeurs le caractérisant délivrent une information à chaque instant continu ‘t' .

10. Systèmes discrets

Un système est dit discret lorsque les grandeurs le caractérisant délivrent une information à chaque pas de discrétisation ‘KT'

11. Systèmes discrets invariants dans le temps

Un système discret est invariant dans le temps si un décalage temporel de l'impulsion unité appliquée à son entrée provoque le même décalage temporel de la sortie.

12. Systèmes échantillonnés

Un système est dit échantillonné s'il reçoit une information échantillonnée et délivre une information échantillonnée.

13. Systèmes numériques

Un système est dit numérique s'il reçoit une information numérique et délivre une information numérique.

14. Systèmes linéaires invariants dans le temps (LTI ‘Linear Time Invariant')

Un système est dit linéaire invariant dans le temps s'il est décrit par des équations différentielles (ou des équations récurrentes) linéaires à coefficients constants réels.

Boucles de commandes numériques

1. Structure générale d'un asservissement numérique d'un processus analogique

Les **C**onvertisseurs **A**nalogique-**N**umérique (**CAN**) et **N**umérique-**A**nalogique (**CNA**) sont indispensables au fonctionnement des systèmes asservis par **C**alculateur **N**umérique (**CN**). La liaison du calculateur avec son environnement externe est effectuée par ces convertisseurs. La figure suivante montre un système asservis par un calculateur numérique (**CN**). Il s'agit d'un asservissement numérique d'un processus analogique.

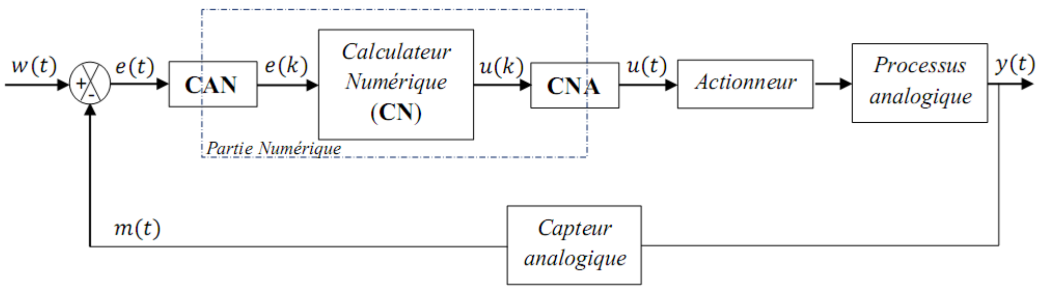


Figure (1) : Asservissement numérique d'un processus analogique

Dans cette structure, on distingue :

- Calculateur numérique (CN) : permettant d'effectuer des opérations arithmétiques ou analytiques (microprocesseur 'μp', un DSP ou bien un contrôleur numérique, comme : PID, RST etc. ;

- Un capteur analogique permettant la mesure de la grandeur de sortie.

- Un actionneur qui réalise la commande du système (un amplificateur de puissance, une vanne de régulation... etc).

- un convertisseur analogique-numérique (CAN) : un CAN permet de converti une grandeur analogique en grandeur numérique;

- Un convertisseur numérique-analogique (CNA) : permet de transformer une grandeur numérique en grandeur analogique;

- Un processus analogique : installation que l'on veut piloter. Exemples : robot, avion,...etc. ;

- Un comparateur : il permet de construire le signal d'erreur ;

-Une consigne continue w(t) : signal à poursuivre par la sortie du processus ;

- Une erreur continue e(t) : différence entre la consigne et la mesure

- Une commande continue u(t) : signal délivré par le CNA ;

- Une erreur numérique e(k) : est la version numérique de l'erreur e(t) ;

- Une commande numérique u(k) : signal délivré par le CN.

Les convertisseurs **CAN** et **CNA** peuvent être modélisés comme suit :

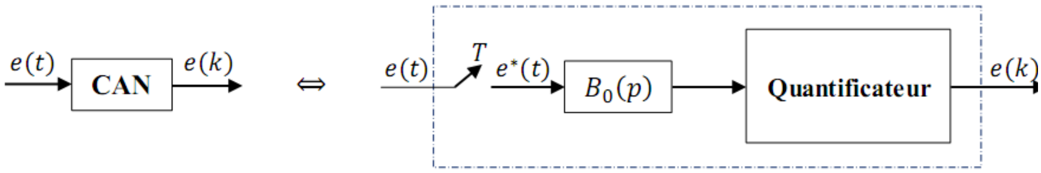


*Figure (2) : Modélisation d'un **C**onvertisseur **A**nalogique-**N**umérique (**CAN**)*

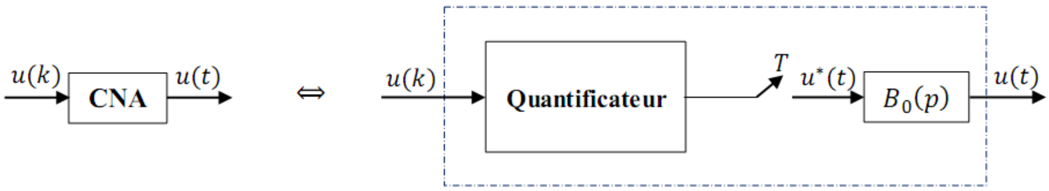


*Figure (3) Modélisation d'un **C**onvertisseur **N**umérique-**A**nalogique (**CNA**)*

2. Structure générale d'un asservissement échantillonné d'un processus analogique

Si on néglige l'effet de la quantification :

- le **CAN** devient un simple échantillonneur (interrupteur idéal), figure (4) ;
- le **CNA** devient un simple échantillonneur-bloqueur d'ordre zéro (**BOZ**), figure (5).

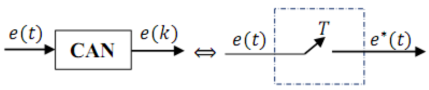


*Figure (4) : Modélisation d'un **CAN** usuel*

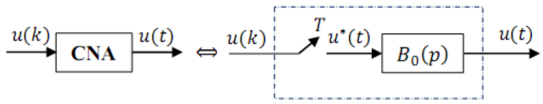


*Figure (5) : Modélisation d'un **CNA** usuel*

Par conséquent, la structure de la figure (1) devient sous la forme suivante :

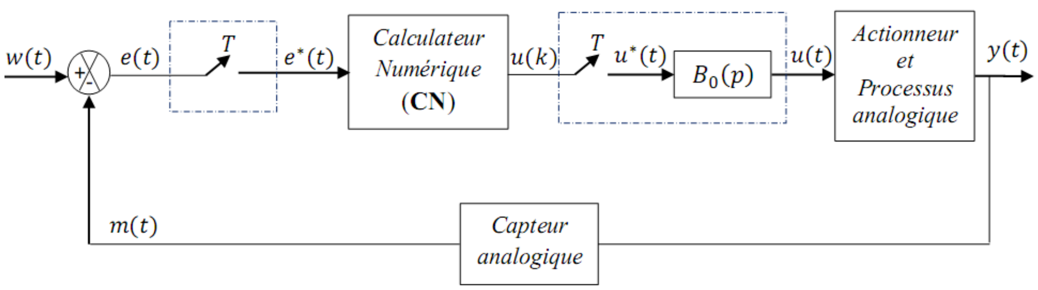


Figure (6) : Asservissement échantillonné d'un processus analogique

3. Structure générale d'un asservissement numérique d'un processus numérique

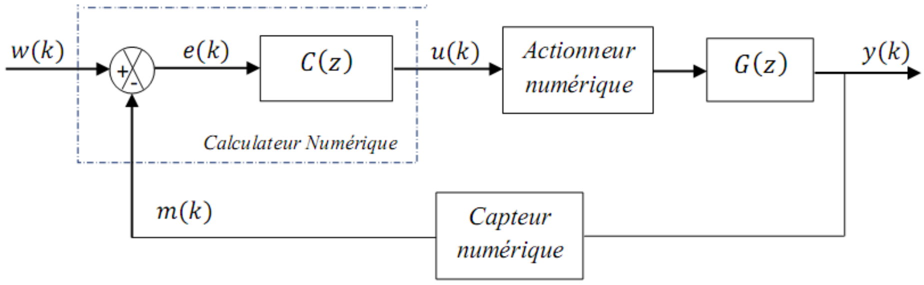


Figure (7) : Asservissement numérique d'un processus numérique

- le calculateur numérique assure à la fois le contrôle et la comparaison numérique.
- les signaux $w(k)$, $e(k)$, $u(k)$, $y(k)$ et $m(k)$ sont des signaux numériques. $C(z)$ et $G(z)$ sont respectivement les fonctions de transfert discrètes d'un régulateur numérique et d'un processus numérique.

Représentation des systèmes linéaires échantillonnés invariants dans le temps

III

Trois façons peuvent être utilisées pour représenter les systèmes linéaires échantillonnés invariants dans le temps, à savoir :

- fonctions de transfert discrètes ;

- équations aux différences (équations récurrentes) ;

- représentation par schéma-blocs.

1. Fonction de transfert discrète

On appelle fonction de transfert $G(z)$ du système (Figure (8)) le rapport entre la transformée en 'z', $Y(z)$, de la sortie et $X(z)$, celle de l'entrée. On obtient alors :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

En fait, la fonction de transfert $G(z)$ d'un système LTI discret est la transformée en 'z' de sa réponse impulsionnelle '$g(kT)$'.

D'un point de vue analytique, une fonction de transfert discrète d'un système linéaire invariant dans le temps 'LTI' discret peut être décrite au moyen des trois formes suivantes :

- forme polynomiale en 'z';
- forme polynomiale en'z^{-1}';
- forme zéro-pôle et gain.

1.1. Fonction de transfert discrète sous forme polynomiale en 'z'

Généralement, un système LTI discret peut être représenté par la fonction de transfert polynomiale en 'z'suivante :

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}$$

avec $N(z)$ et $D(z)$ représentent respectivement les polynômes numérateur ; et dénominateur de la fonction $G(z)$. Le polynôme dénominateur est appelé polynôme caractéristique du système.

On définit aussi:

Les racines du numérateur $N(z)$ de la fonction de transfert $G(z)$ représentent les zéros du système discret.

Les racines du dénominateur $D(z)$ de la fonction de transfert $G(z)$ représentent les pôles du système discret.

Le degré du dénominateur $N(z)$ est égal à l'ordre du système : 'n'.

En fait, les pôles et les zéros d'un système discret jouent un rôle important dans son comportement, et dans la conception d'une commande numérique.

1.2. Fonction de transfert discrète sous forme polynomiale en ‘z−1'

'

Un système LTI discret peut être aussi représenté par une fonction de transfert polynomiale en ‘z^{-1}’. En multipliant dénominateur et numérateur de la fonction de transfert, par le terme ‘z^{-n}’, et en posant ‘$d = n - m$’, on fait apparaître des puissances négative de 'z' comme suit:

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = z^{-d}\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

1.3. Fonction de transfert discrète sous forme zéro, pôle et gain

,

Une fonction de transfert d'un système LTI discret peut être représentée sous forme zéro, pôle et gain. Les formes factorisées suivantes, respectivement équivalentes aux équations précédentes, sont parfois utiles:

$$G(z) = b_0\frac{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_m)}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_n)} = b_0\frac{\prod_{j=1}(z-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(z-p_i)}$$

$$G(z) = b_0 z^{-d}\frac{(1-z_1z^{-1})\dots(1-z_mz^{-1})}{(1-p_1z^{-1})\dots(1-p_nz^{-1})} = b_0 z^{-d}\frac{\prod_{j=1}^{m}(1-z_jz^{-1})}{\prod_{i=1}^{n}(1-p_iz^{-1})}$$

où p_i, z_j et b_0 sont respectivement les pôles, les zéros et le gain (facteur d'Evans) du système LTI discret.

2. Equations aux différences (équations récurrentes)

'

une équation récurrente permet d'exprimer la sortie $y(k)$ à l'instant ‘k’ en fonction des échantillons passés de la sortie et de l'entrée. l'équation récurrente d'un système discret, décrit par l'équation, s'ecrit:

$$y(k) = \sum_{j=0}^{m} b_j x(k-d-j) - \sum_{i=1}^{n} a_i y(k-i)$$

Exemple

,

Soit la fonction de transfert discrète : $F(z) = \frac{0.2}{z-0.8}$. Déterminons l'équation récurrente correspondante :

exprimons $F(z)$ sous forme polynomiale en ‘z^{-1}’ : $F(z) = \frac{0.2}{z-0.8} = \frac{0.2}{z-0.8}.\frac{z^{-1}}{z^{-1}} = \frac{0.2z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}$

il vient : $Y(z) - 0.8z^{-1}Y(z) = 0.2z^{-1}X(z)$

Pour avoir $y(k)$, il suffit d'appliquer la transformée inverse en ‘z’:

$$Z^{-1}[Y(z) - 0.8z^{-1}Y(z)] = Z^{-1}[0.2z^{-1}X(z)]$$

l'équation récurrente correspondante est :

$$y(k) = 0.8y(k-1) + 0.2x(k-1)$$

prenons l'entrée $x(k)$ comme un échelon unité et $y(0) = 0$ comme condition initiale.

Puis, calculons les premiers échantillons de sortie $y(k)$

k	0	1	2	3	4	5
$x(k)$	1	1	1	1	1	1
$y(k)$	0	0.2	0.36	0.488	0.590	0.672

3. Représentation des systèmes LTI discrets par schéma-blocs

,

Afin de représenter un système LTI discret par un schéma-blocs, trois opérateurs élémentaires peuvent être utilisés, à savoir : multiplication par un scalaire, sommation algébrique et décalage temporel (retard).

3.1. Multiplication par un scalaire

$y(k) = C.x(k) \quad \Leftrightarrow$

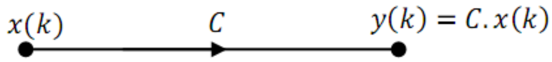


Figure (9) Symbole représentant l'opération de la multiplication par un scalaire

3.2. Sommation algébrique

$y(k) = x_1(k) - x_2(k) + x_3(k) \quad \Leftrightarrow$

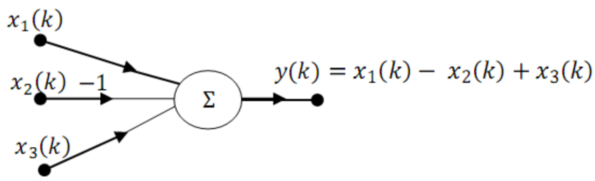


Figure (10) : Symbole représentant l'opération de la sommation algébrique

3.3. Décalage temporel (retard)

$y(k) = x(k-m) \quad \Leftrightarrow$

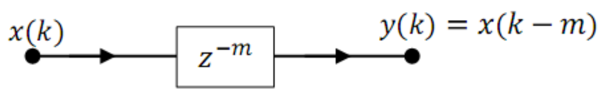
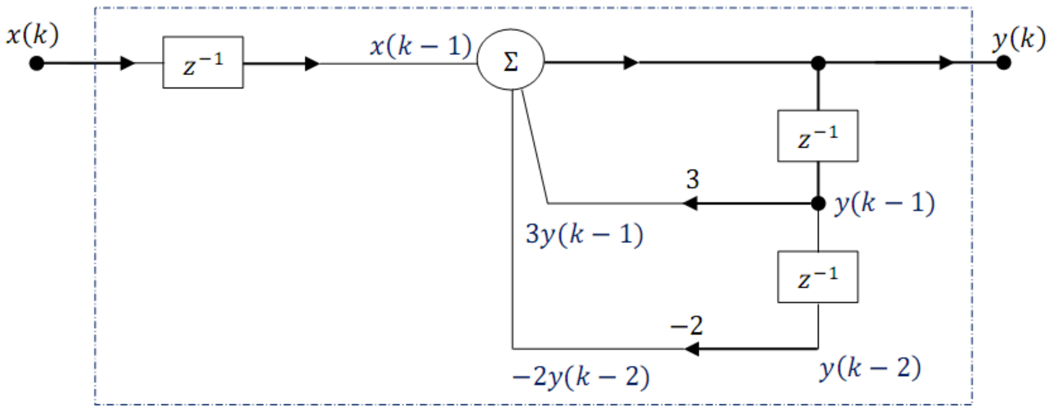


Figure (11) : Symbole représentant le décalage temporel (retard)

Exemple

Soit un système LTI discret défini par le schéma-blocs suivant :



A partir du schéma-blocs , on peut tirer l'équation récurrente

$$y(k) = x(k-1) + 3y(k-1) - 2y(k-2)$$

la fonction de transfert discrète correspondante :

$$\mathcal{Z}[y(k)] = \mathcal{Z}[x(k-1) + 3y(k-1) - 2y(k-2)]$$

$$Y(z) = z^{-1}X(z) + 3z^{-1}Y(z) - 2z^{-2}Y(z)$$

$$F(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}} = \frac{z}{z^2-3z+2}$$

Discrétisation des systèmes LTI monovariables continus

IV

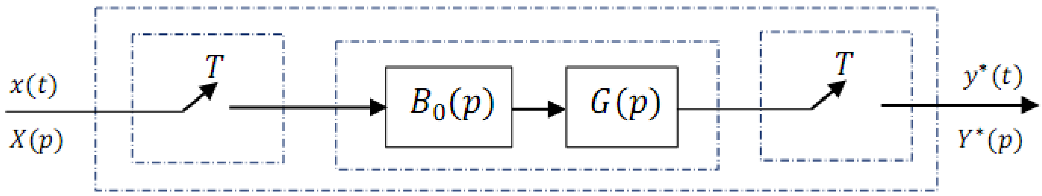
Soit un système LTI monovariable continu défini par une fonction de transfert continue G(p), telle que :

$$X(p) \longrightarrow \boxed{G(p)} \longrightarrow Y(p)$$

Plusieurs méthodes de discrétisation peuvent être utilisées afin de numériser ce système LTI monovariable continu G(p), parmi elles on trouve :

1. Discrétisation par un bloqueur d'ordre zéro (BOZ)

La fonction de transfert discrète du système G peut être obtenue par la discrétisation de la fonction de transfert continue G(p) en utilisant un bloqueur d'ordre zéro (BOZ) :

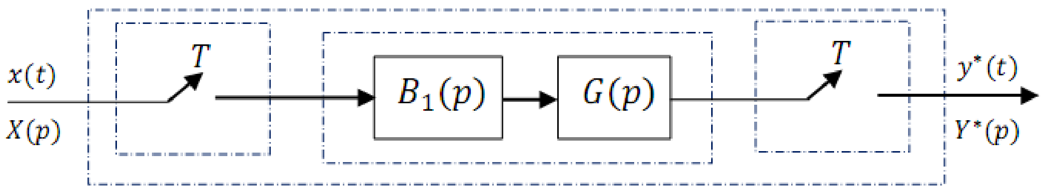


La fonction de transfert discrète obtenue par le **BOZ** est donnée par :

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G(p)}{p}\right]$$

2. Discrétisation par un bloqueur d'ordre un (BOU)

La version discrète de la fonction de transfert continue G(p) peut être obtenue en la discrétisant par un bloqueur d'ordre un (BOU) est :

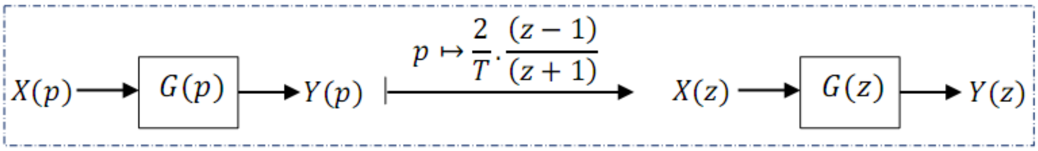


La fonction de transfert discrète obtenue par le **BOU** est donnée par :

$$G(z) = (1 - z^{-1})^2\mathcal{Z}\left[\frac{1+Tp}{Tp^2}G(p)\right]$$

3. Discrétisation par approximation de Tustin

Il est également possible d'obtenir la version discrète du système G(p) en utilisant l'approximation de 'Tustin'



Il s'agit de remplacer la variable complexe de Laplace 'p' par $\frac{2}{T} . \frac{(z-1)}{(z+1)}$, par conséquent, dans ce cas la fonction de transfert discrète s'obtient comme suit :

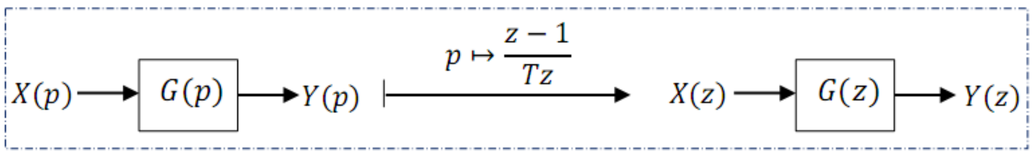
$$G(z) = G(p)|_{p=\frac{2}{T} . \frac{(z-1)}{(z+1)}}$$

4. Discrétisation par approximation d'Euler

Cette approche consiste à approximer la dérivée continue entre deux instants d'échantillonnage (principe d'Euler). Deux approximations sont considérées : discrétisation arrière et discrétisation avant.

4.1. Discrétisation arrière

,

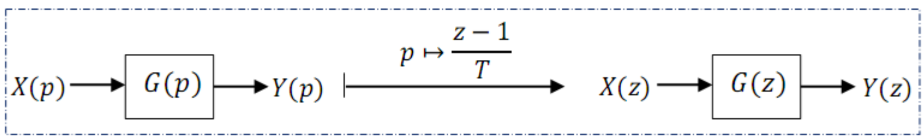


la fonction de transfert discrète est obtenue comme suit : $G(z) = G(p)|_{p=\frac{z-1}{Tz}}$

4.2. Discrétisation avant

,

Cette discrétisation est représentée par la figure suivante :



la fonction de transfert discrète est : $G(z) = G(p)|_{p=\frac{z-1}{T}}$

Exemple

On considère un système continu de premier ordre Gc(p). En utilisant la discrétisation par un bloqueur d'ordre zéro (BOZ), La version discrète de Gc(p) est :

$$G_c(p) = \frac{1}{1+10p}$$

$$G_d(z) = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{G_c(p)}{p}\right]$$

Formons $\frac{G_c(p)}{p}$: $\frac{G_c(p)}{p} = \frac{1}{p(1+10p)} = \frac{1/10}{p(p+1/10)}$

Décomposons $\frac{G_c(p)}{p}$ en éléments simples : $\frac{G_c(p)}{p} = \frac{1/10}{p(p+1/10)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+1/10}$.

Calculons les coefficients a et b: $a = p\left.\frac{1/10}{p(p+1/10)}\right|_{p=0} = 1$ $\quad b = (p+1/10)\left.\frac{1/10}{p(p+1/10)}\right|_{z=-1/10} = -1$

$$Z\left[\frac{G_c(p)}{p}\right] = Z\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1/10}\right] = Z\left[\frac{1}{p}\right] - Z\left[\frac{1}{p+1/10}\right] = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-1}z^{-1}}$$

la version discrète : $G_d(z) = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{G_c(p)}{p}\right] = (1 - z^{-1})\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-1}z^{-1}}\right)$

Association des systèmes discrets

1. Deux systèmes montés en série

Montage en série

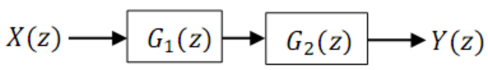
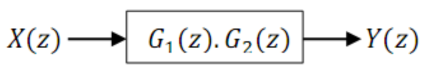


Schéma équivalent



2. Deux systèmes montés en parallèle

Montage en parallèle

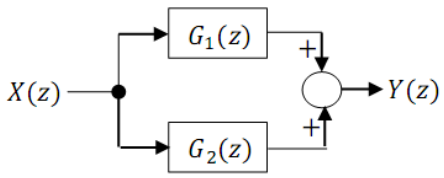
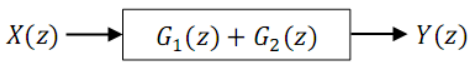


Schéma équivalent



3. Deux systèmes montés en rétroaction

Montage à rétroaction

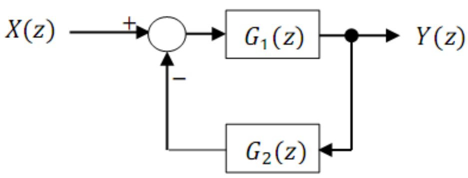
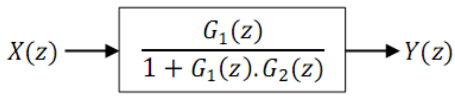
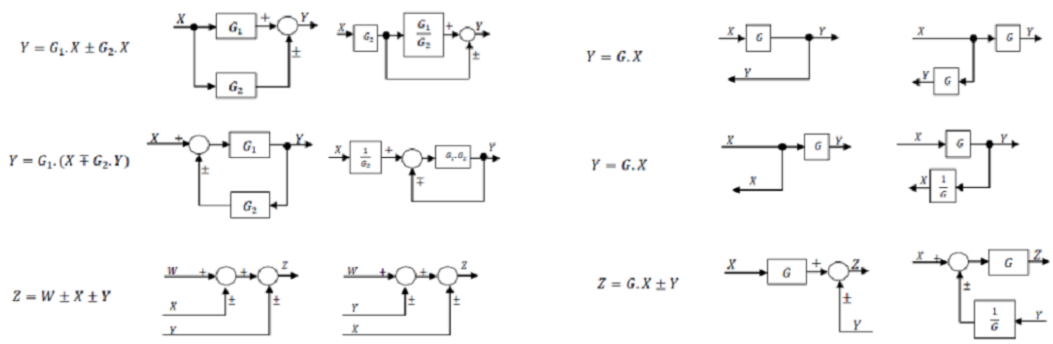


Schéma équivalent



4. Transformation des schémas blocs

On peut simplifier les schémas de systèmes de commande numérique compliqués. Les figures suivantes présentent quelques règles de transformations pour effectuer la simplification :



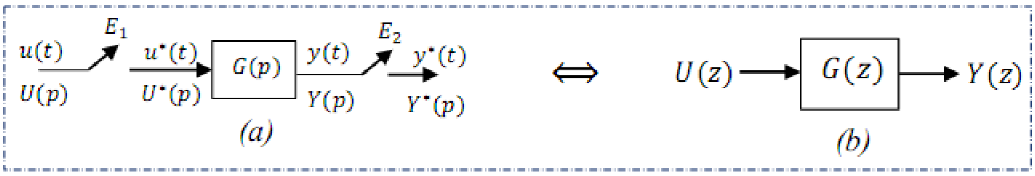
VI

Fonctions de transfert échantillonnées des systèmes complexes

Il s'agit de calculer la fonction de transfert échantillonnée équivalente d'un système résultant de l'association de systèmes élémentaires regroupés pour former, soit des commandes en boucle ouverte, soit en boucle fermée. La fonction de transfert échantillonnée équivalente dépend essentiellement au nombre d'échantillonneurs et leurs positions dans la boucle.

1. Systèmes en boucle ouverte (BO)

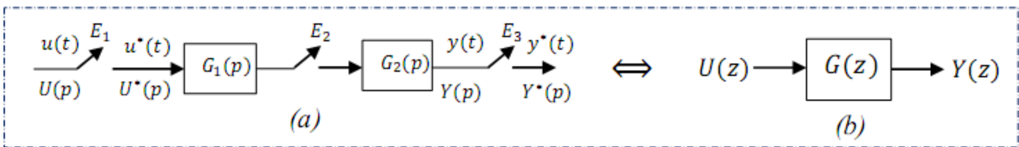
1.1. Cas d'un système encadré par deux échantillonneurs



$$\begin{aligned} Y^*(p) = [Y(p)]^* &= [U^*(p).G(p)]^* \\ &= U^*(p).[G(p)]^* \\ &= U^*(p).G^*(p) \overset{z = e^{Tp}}{\longmapsto} Y(z) = U(z).G(z) \end{aligned}$$

$$Y(z) = U(z).G(z) \Leftrightarrow G(z) = \frac{\mathcal{Z}[Y(p)]}{\mathcal{Z}[U(p)]} = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathcal{Z}[G(p)]$$

1.2. Cas d'un échantillonneur intermédiaire dans la chaîne

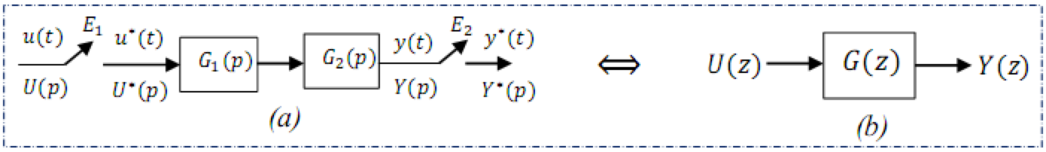


$$G(z) = \frac{\mathcal{Z}[Y(p)]}{\mathcal{Z}[U(p)]} = \mathcal{Z}[G_1^*(p)].\mathcal{Z}[G_2^*(p)]$$

$$G(z) = G_1(z).G_2(z)$$

1.3. Cas sans échantillonneur intermédiaire dans la chaîne

'

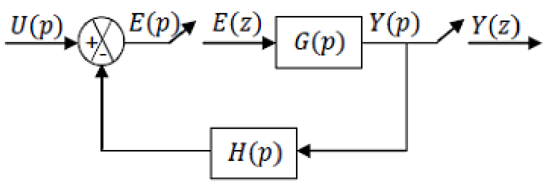


$$G(z) = \frac{\mathcal{Z}[Y(p)]}{\mathcal{Z}[U(p)]} = \mathcal{Z}[G_1(p).G_2(p)]$$

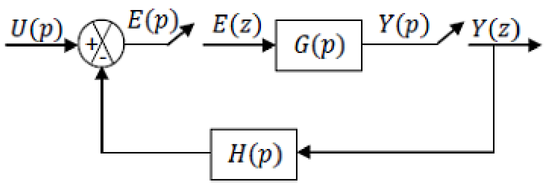
$$G(z) = G_1G_2(z)$$

2. Systèmes en boucle fermée : systèmes bouclés (BF)

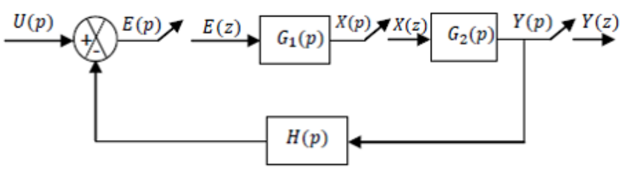
Le figures suivantes résume quelques configurations de systèmes de commande discrets en boucle fermée :



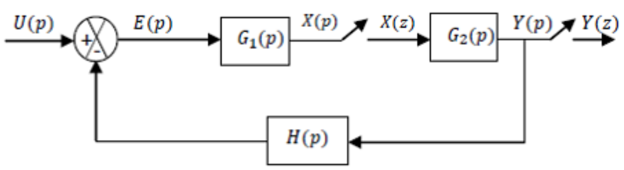
$$Y(z) = \frac{G(z)U(z)}{1 + GH(z)}$$



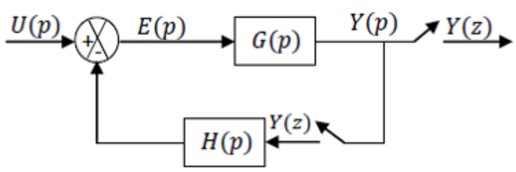
$$Y(z) = \frac{G(z)U(z)}{1 + G(z)H(z)}$$



$$Y(z) = \frac{G_1(z)G_2(z)U(z)}{1 + G_1(z)G_2H(z)}$$



$$Y(z) = \frac{G_2(z)G_1U(z)}{1 + G_1G_2H(z)}$$



$$Y(z) = \frac{GU(z)}{1 + GH(z)}$$