UDBKM- Khemis-Miliana **Module : Géométrie différentielle**

Département des sciences de la matière **M1 : Physique Théorique**

Surfaces dans $\mathbb{R}^3$

Par Dr. Leila Slimane

1. Notions sur les surfaces :

On va présenter quelques concepts sur les surfaces dans $\mathbb{R}^3$. Les surfaces peuvent être définies par trois types d'équations.

Définition1. (Surface définie par une équation implicite)

La surface S est définie par une équation implicite s'il existe une fonction F de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ F(x, y, z) = 0\}$.

Exemple : La sphère unitaire est donnée par l'équation implicite :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Définition 2. (Surface définie par une équation explicite)

On dit qu'une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ est définie par une équation explicite, s'il existe une fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ z = g(x, y),\ \ (x, y) \in \Delta \subset \mathbb{R}^2\}$.

Exemple : La sphère unitaire est définie par l'union de deux surfaces explicites :

$$S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\ \ (x, y) \in \overline{B(0,1)}\right\},$$
$$S_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \ z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2},\ \ (x, y) \in \overline{B(0,1)}\right\}.$$

Définition 3. (Surface définie par ses équations paramétriques)

On dit qu'une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ est définie par ses équations paramétriques (ou une surface paramétrée), s'il existe une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$S = \{f(u, v) \in \mathbb{R}^3,\ \ (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2\}.$$

Exemple : La sphère unitaire est définie par ses équations paramétriques :

$$S = \{(\sin\varphi \cos\theta,\ \sin\varphi \sin\theta,\ \ \cos\varphi) \in \mathbb{R}^3,\ (\varphi, \theta) \in\ [0, \pi[\times [0, 2\pi[\ \}.$$

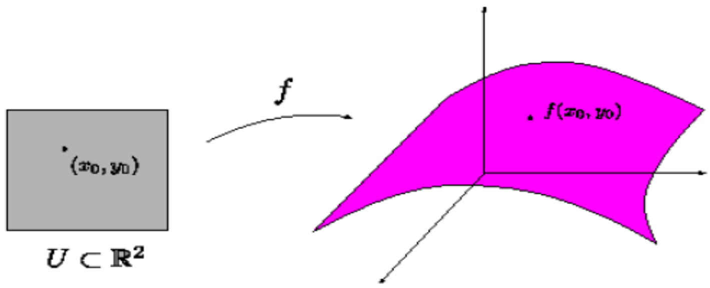

Figure 1. Surface paramétrée

2. Plan tangent et la droite normale à la surface

2.1 Le cas d'une surface définie par une équation implicite

Soit S une surface de classe C^1 définie implicitement : $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ F(x, y, z) = 0\}$. Le plan qui contient toutes les tangents des courbes sur S passant par le point $P \in S$ est appelé le plan tangent à la surface S au point P.

Soit $P = (x_0,\ y_0\ , z_0) \in S$. On rappelle que le gradient de la fonction F est donné par :

$$grad\ F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Alors l'équation du plan tangent $T_P S$ est donnée par :

$$T_P S :\ \langle (grad\ F(P))^t,\ \ (x - x_0, \quad y - y_0, \quad z - z_0)\ \rangle = 0$$

et l'équation de la droite normale (N) au point M est:

$$(N) = \left\{P + \lambda\big(grad\ F(P)\big)^t \in \mathbb{R}^3, \quad \lambda\ \in \mathbb{R}\right\},$$

et la normale unitaire est le vecteur : $n = \frac{(grad\ F(P))^t}{\|(grad\ F(P))^t\|}$.

Exemple : Considérons la sphère unitaire donnée par :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}.$$

Posons : $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.

Alors $\quad grad\ F(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}.$

l'équation du plan tangent $T_P S$ au point $P = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ est donnée par :

$$\langle (grad\ F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right))^t,\ \ (x - \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad y - \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad z - \frac{1}{\sqrt{3}})\ \rangle = 0$$

$$\langle \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right),\ \ (x - \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad y - \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad z - \frac{1}{\sqrt{3}})\ \rangle = 0$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{2}{\sqrt{3}}y+\frac{2}{\sqrt{3}}z-2=0.$$

2.2 Le cas d'une surface définie par une équation explicite :

Soit S une surface de classe C^1 définie explicitement par:

$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ z=\ g(x,y),\quad (x,y)\in\Delta\subset\mathbb{R}^2\}$.

On pose : $F(x,y,z)=g(x,y)-z$. Soit $P=(x_0,\ y_0,\ z_0)\in S$. Dans ce cas le gradient de la fonction F est donné par : $grad\ F=\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,\ y),\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,\ y),-1\right)^t$. Alors l'équation du plan tangent T_PS est donnée par :

$$T_PS:\ \left\langle\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,\ y_0),\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,\ y_0),-1\right),\ \ (x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)\right\rangle=0\ ,$$

et l'équation de la droite normale (N) au point P est:

$$(N)=\left\{P+\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,\ y_0),\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,\ y_{0)},-1\right)\in\mathbb{R}^3,\ \lambda\ \in\mathbb{R}\quad\right\},$$

et la normale unitaire est le vecteur : $n=\frac{\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0),\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_{0)},\ -1\right)}{\left\|\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0),\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_{0)},\ -1\right)\right\|}$.

Exemple : Considérons la surface (paraboloïde elliptique) définie par : $z=2x^2+y^2$ et le point $P=(1,1,3)$.

Posons : $g(x,y)=2x^2+y^2$ alors $\frac{\partial g}{\partial x}(x,\ y)=4x$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x,\ y)=2y$.

Par la suite : $\frac{\partial g}{\partial x}(1,\ 1)=4$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(1,\ 1)=2$.

L'équation du plan tangent à la surface au point P est donnée par :

$$\langle(4,\ 2,\ -1),\ (x-1,\ y-1,\ z-3)\rangle=0\Leftrightarrow 4(x-1)+2(y-1)-(z-3)=0$$

Donc $T_PS:\ \ z=4x+2y-3$.

Le vecteur normal unitaire est $n=\frac{\left(\frac{\partial g}{\partial x}(1,1),\ \frac{\partial g}{\partial y}(1,1),\ -1\right)}{\left\|\left(\frac{\partial g}{\partial x}(1,1),\ \frac{\partial g}{\partial y}(1,1),\ -1\right)\right\|}=\frac{(4,2,-1)}{\|(4,2,-1)\|}=\frac{1}{\sqrt{21}}(4,2,-1)$.

2.3 Le cas d'une surface paramétrée:

On commence par donner la définition d'une surface régulière.

Définition 4. Soit S une surface paramétrée de classe C^1 définie par :

$S=\{f(u,v)\in\mathbb{R}^3,\quad (u,v)\in D\subset\mathbb{R}^2\}$. On dit que la surface S est :

- **Régulière en** $(u_0,v_0)\in D$ si les vecteurs de dérivées partielles de f en (u_0,v_0) qu'on note $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0)\ \ et\ \ \frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)$ sont linéairement indépendants (et donc non nuls) *i.e.* leur produit vectoriel est non nul :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \ \wedge\ \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \neq 0 \text{ (ou } \left\|\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \ \wedge\ \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\right\| \neq 0).$$

- **Singulière en** $(u_0, v_0) \in D$ si les vecteurs de dérivées partielles de f en (u_0, v_0) sont linéairement dépendants *i.e.* leur produit vectoriel est nul :
$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \ \wedge\ \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) = 0 \text{ (ou } \left\|\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \ \wedge\ \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\right\| = 0).$$
- **Régulière** si elle est régulière en tout point de D.

Exemple : La surface paramétrée par :

$S = \{f(u,v) = (u^2, v^2, uv) \in \mathbb{R}^3, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2\}$ est singulière en (0,0).

En effet on a:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = (2u, 0, v), \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = (0, 2v, u), \text{ ce qui donne :}$$
$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = (-2v^2, 2u^2, 4uv).$$

Donc le vecteur $\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$ s'annule en (0,0).

Définition 5. Soit S une surface de classe C^1 paramétrée par :

$$f : D \to \mathbb{R}^3, \quad \text{avec } f(u,v) = \big(f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v)\big), \qquad D \subset \mathbb{R}^2$$

et $P = f(u_0,\ v_0)$ un point régulier de S (*i.e.* la surface est régulière en (u_0, v_0)). On appelle :

- **Plan tangent** à S au point P est le plan engendré par les deux vecteurs $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$ et passant par P :
$$T_P S = P + Vect\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\right)$$
$$= \left\{f(u_0,\ v_0) + \lambda \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) + \mu \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

L'équation du plan tangent $T_P S$ est donnée par :

$$\langle \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0), \big(x - f_1(u_0, v_0), y - f_2(u_0, v_0), z - f_3(u_0, v_0)\big)\rangle = 0$$

- **Vecteur normale unitaire** de S en P est le vecteur :

$$n(u_0, v_0) = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \ \wedge\ \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)}{\left\|\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \ \wedge\ \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\right\|}.$$

Par définition les trois vecteurs $\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0), n(u_0, v_0)\right)$ forment une base directe de l'espace au-dessus du point de la surface (c'est-à- dire un repère mobile). Mais cette bas n'est ni orthogonale ni normale.

Exemple : Considérons la surface paramétrée par :

$S = \{f(u,v) = (u^2, v^2, u+2v) \in \mathbb{R}^3, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2\}$ et le point $P = (1,1,3)$

$(i.e. \quad u = 1 \; et \; v = 1)$. On a: $\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = (2u, 0,1)$, $\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = (0, 2v, 2)$, ce qui donne :

$\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = (-2v, 2-4v, 4\mathrm{uv})$ et $\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = (-2,-4,4)$.

L'équation de la tangente est donnée par : $\langle \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}\ (1,1), (x-1, y-1, z-3)\rangle = 0$

$$\langle(-2,-4,4),(x-1,y-1,z-3)\rangle = 0 \text{ ce qui donne: } x + 2y - 2z + 3 = 0.$$

Le vecteur normal unitaire est donné par la formule : $n(u_0, v_0) = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)}{\left\|\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)\right\|}$.

Donc $n(1,1) = \frac{\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(1,1)}{\left\|\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(1,1)\right\|} = \frac{(2,-4,4)}{\|(-2,-4,4)\|} = \frac{1}{3}(1,-2,2)$.

3. Aire d'une surface

Soit S une surface de classe C^1. Dans le cas où la surface est paramétrée par $f: D \to \mathbb{R}^3$, avec $D \subset \mathbb{R}^2$ alors l'aire de S est donnée par la formule :

$$Aire(S) = \iint_D \left\|\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right\| dudv.$$

Si S est définie par l'équation explicite :

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z = g(x,y), \quad (x,y) \in \Delta \subset \mathbb{R}^2\},$$

alors l'aire de S est donnée par : $Aire(S) = \iint_\Delta \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)^2 + 1}dxdy$.

Exemple : Soit r un réel positif. Considérons la surface (cylindre) paramétrée par :

$S = \left\{f(u,v) = (r\cos u,\ r\sin u, v) \in \mathbb{R}^3, \quad u \in [0, 2\pi[,\ \ v \in [a,b] \subset \mathbb{R}\ \right\}$.

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = (-r\sin u, r\cos u\ , 0)\ , \ \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = (0,0,\ 1),$$

ce qui donne :

$\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = (r\cos u, -r\sin u, 0)$ et $\left\|\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right\| = r$.

L'aire du cylindre est donnée par :

$$Aire(S) = \int_a^b\int_0^{2\pi} \left\|\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right\| dudv = \int_a^b\int_0^{2\pi} r dudv = 2\pi r(b-a).$$

4. Première forme fondamentale :

Le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$ induit naturellement un produit scalaire sur les plans T_PS à une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ paramétrée régulière de classe C^1. Alors les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\ et\ \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$ forment une base de l'espace tangent T_PS au point $P = f(u,v)$. Tout vecteur de T_PS s'exprime donc dans cette base :

$$\forall X \in T_PS,\ \ \exists (X_u, X_v) \in \mathbb{R}^2: \quad X = X_u \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) + X_v \frac{\partial f}{\partial v}(u,v).$$

Soit $X, Y \in T_PS$, alors $\exists (X_u, X_v) \in \mathbb{R}^2\ et\ \exists (Y_u, Y_v) \in \mathbb{R}^2\ \ tels\ que$:

$$X = X_u \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) + X_v \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \text{ et } Y = Y_u \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) + Y_v \frac{\partial f}{\partial v}(u,v).$$

Alors on a : $\langle X, Y\rangle = \langle X_u \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) + X_v \frac{\partial f}{\partial v}(u,v),\ Y_u \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) + Y_v \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \rangle$

$$= X_u Y_u \langle \frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\rangle + (X_u Y_v + Y_u X_v)\langle \frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\rangle + X_v Y_v \langle \frac{\partial f}{\partial v}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\rangle.$$

On pose : $E = \langle \frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\rangle$, $G = \langle \frac{\partial f}{\partial v}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\rangle$ $\ et\ F = \langle \frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\rangle$.

Définition 6. On appelle Première Forme Fondamentale et on note $I_P(.,.)$ la forme bilinéaire définie sur T_PS qui est la restriction à T_PS du produit scalaire $\langle .,. \rangle\ de\ \mathbb{R}^3$. Autrement dit :

$$\forall X, Y \in T_PS,\ I_P(X,Y) := \langle X, Y\rangle = X_u Y_u E + (X_u Y_v + Y_u X_v) F + X_v Y_v G.$$

Définition 7. Les fonctions E, F est G sont appelés les coefficients de la première forme fondamentale dans la base $\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right)$.

Remarque.

- La matrice de I_P dans la base $\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right)$ est donc $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$:
$$I_P(X,Y) = (X_u, X_v) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_u \\ X_v \end{pmatrix}.$$
- La forme bilinéaire I_P est symétrique comme sa matrice est symétrique.

On cherche maintenant à exprimer l'aire de la surface en fonctions de E, F et G. Soit θ l'angle entre les deux vecteurs $\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\ et\ \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$. Alors on a :

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right\|^2 = \left\|\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\right\|^2 \left\|\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right\|^2 sin^2\theta$$

$$= \left\|\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\right\|^2 \left\|\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right\|^2 (1 - cos^2\theta)$$

$$= \left\|\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\right\|^2 \left\|\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right\|^2 - \left\|\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\right\|^2 \left\|\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right\|^2 \cos^2\theta$$

$$= \left\|\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\right\|^2 \left\|\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right\|^2 - \langle\frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\rangle^2$$

$$= \langle\frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\rangle \langle\frac{\partial f}{\partial v}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\rangle - \langle\frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\rangle^2.$$

Comme : $E = \langle\frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\rangle$, $G = \langle\frac{\partial f}{\partial v}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\rangle$ $et\ F = \langle\frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\rangle$.

Alors : $\left\|\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right\| = \sqrt{EG - F^2}$

$$= \sqrt{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}}.$$

On obtient : $Aire(S) = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,dudv.$

Remarque. On rappelle que I_P est définie positive si et seulement si $E > 0$ et $EG - F^2 > 0$. Donc la forme bilinéaire I_P est définie positive car on a bien :

$$E = \left\|\frac{\partial f}{\partial u}\right\|^2 > 0 \text{ et } EG - F^2 = \left\|\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}\right\|^2 > 0.$$

Exemple : Considérons la surface paramétrée par :

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(u,v) = (u, v, (u^2 + v^2))$. Les première dérivées partielles sont égales à :

$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = (1, 0, 2u)$, $\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = (0, 1, 2v)$.

Donc les coefficients de la première forme fondamentale sont :

$$E = \left\|\frac{\partial f}{\partial u}\right\|^2 = 1 + 4u^2, \qquad F = \langle\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\rangle = 4uv, \qquad G = \left\|\frac{\partial f}{\partial v}\right\|^2 = 1 + 4v^2.$$

5. Deuxième forme fondamentale:

Définition 8. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière de classe C^2 paramétrée $f: D \to \mathbb{R}^3$, avec $D \subset \mathbb{R}^2$. La deuxième forme fondamentale II_P au point $P = f(u,v)$ est la forme quadratique sur l'espace tangent $T_P S$ définie par:

$$\forall\, X = X_u \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) + X_v \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \in T_M S : \quad II_P(X) = {X_u}^2 L + 2X_u X_v M + {X_v}^2 N,$$

où :

$$L = \langle\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v), n(u,v)\rangle, \qquad M = \langle\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u,v), n(u,v)\rangle, \qquad et\ N = \langle\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v), n(u,v)\rangle$$

et $n(u,v) = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)}{\left\|\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right\|}$ est le vecteur normale unitaire. $L, M,$ et N sont appelés coefficients de la deuxième forme fondamentale.

Définition 9.

1. Un point sur une surface est dit elliptique si en ce point : $LN - M^2 > 0$. La surface ressemble localement (au voisinage de ce point) à un bol ou un bol reversé.
2. Un point sur une surface est dit hyperbolique si: $LN - M^2 < 0$. La surface ressemble localement à une selle de cheval.
3. Un point sur une surface est dit parabolique si: $LN - M^2 = 0$ et $L^2 + M^2 + N^2 \neq 0$. La surface est localement cylindrique.
4. Un point est dit planaire si en ce point : $LN - M^2 = 0 \; et \; L^2 + M^2 + N^2 = 0$. (Ceci est équivalent à $L = M = N = 0$).

Exemple. La paraboloïde elliptique qui est définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$ (ou

$f(u,v) = (u, v, -(u^2 + v^2))$ est elliptique en tout point de cette surface puisque

$LN - M^2 = \frac{4}{1+4(u^2+v^2)} > 0$.

Car on a:

$\frac{\partial f}{\partial u} = (1, 0, 2u)$, $\quad \frac{\partial f}{\partial v} = (0, 1, \; 2v)$, $\quad \frac{\partial \; f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} = (-2u, -2v, 1)$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = (0, \; 0, 2)$, $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = (0, \; 0, 2)$, $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \; (u,v) = (0, 0, 0)$.

Le vecteur normale unitaire $n(u,v) = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)}{\left\|\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right\|} = \frac{1}{\sqrt{1+4(u^2+v^2)}}(-2u, -2v, 1)$.

Les coefficients de la deuxième forme fondamentale :

$$L = \langle \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \; , n \rangle = \frac{2}{\sqrt{1 + 4(u^2 + v^2)}} \; , \quad M = \langle \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \; , n \rangle = 0, \quad N = \langle \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \; , n \rangle = \frac{2}{\sqrt{1 + 4(u^2 + v^2)}}$$

Alors $LN - M^2 = \frac{4}{\sqrt{1+4(u^2+v^2)}} > 0$ pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

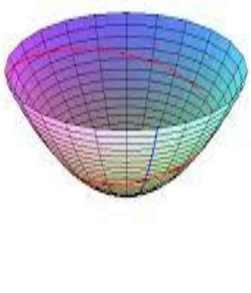

Figure 2. Paraboloïde elliptique

Exemple. La paraboloïde hyperbolique qui est définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$ est hyperbolique en tout point de cette surface car $LN - M^2 = \frac{-4}{1+4(u^2+v^2)} < 0$.

Les calculs sont laissés au lecteur comme un petit exercice.

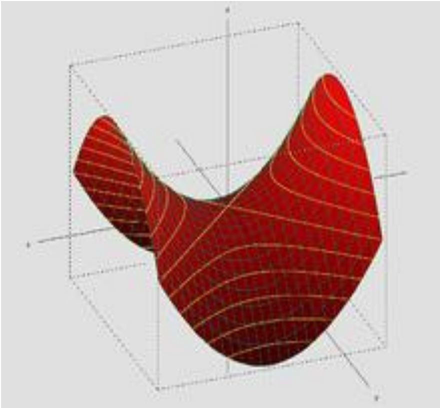

Figure 3. Paraboloïde hyperbolique

Exemple. La surface appelée selle de singe est paramétrée par :

$f(u,v) = (u, v, u(u^2 - 3v^2)), \ (u,v) \in \mathbb{R}^2$.

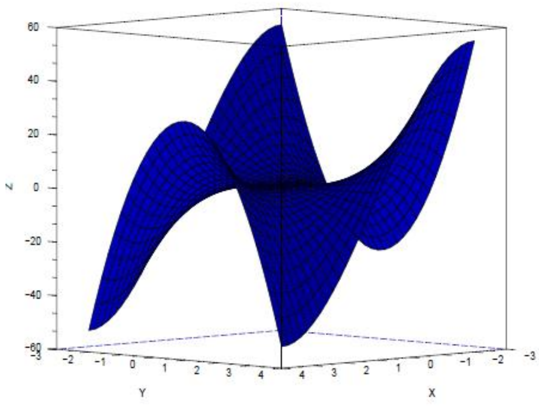

Figure 4. Selle de singe

On a :

$\frac{\partial f}{\partial u} = (1, 0, \ 3u^2 - 3v^2), \quad \frac{\partial f}{\partial v} = (0, 1, -6uv), \ \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} = (3(u^2 - v^2), 6uv, 1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = (0,0,6u), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = (0,0,-6u), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u,v) = (0,0,-6v).$$

Le vecteur normale unitaire est donné par : $n(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1+9(u^2+v^2)}}(3(u^2-v^2),\ 6uv,\ 1)$,

et les coefficients de la seconde forme fondamentale sont :

$$L = \frac{6u}{\sqrt{1+9(u^2+v^2)}}, \quad M = \frac{-6v}{\sqrt{1+9(u^2+v^2)}}, \qquad N = \frac{-6u}{\sqrt{1+9(u^2+v^2)}}.$$

Ces coefficients s'annulent tous si $u = v = 0$. Donc le point $f(0,0) = (0,0,0)$ est un point planaire.

Références :

[1] A. Frabetti, Cours de Géométrie et Calcul différentiel, Université Claude Bernard Lyon 1, (source http://math.univ-lyon1.fr/~frabetti/GeoL2/cours-geometrie-ch2.pdf

[2] B. Thibert, Courbes et surfaces 2éme Année Maths, Université Joseph Fourier, Grenoble I, (source http ://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/cs/cs.pdf)

CspoyL3.pdf page 75

Je vous encourage à faire des dessins le plus souvent possible et à utiliser
galement l'un des nombreux sites qui recensent les propriétés remarquables
les courbes et des surfaces tels http ://www.mathcurve.com/