UDBKM- Khemis-Miliana

Département des sciences de la matière

Module : Géométrie différentielle

M1 : Physique Théorique

Courbes Paramétrées

Par Leila Slimane

Courbes paramétrées

Définition 1 : On appelle une courbe paramétrée de classe C^k (avec ≥ 0) un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ $(n = 2 \; ou \; 3)$ de la forme :

$$\Gamma = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^n \mid t \in I \subset \mathbb{R}\} = \gamma(I),$$

où I est un intervalle et l'application γ est de classe C^k.

Remarque :

- Si $n = 2$ la courbe est dite **plane**.
- Si $n = 3$ la courbe est dite **gauche**.
- Si la classe C^k n'est pas indiquée on suppose que la courbe est de classe $C^{\propto}$.

Notions :

- **Paramétrisation** de la courbe est l'application $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$.
- **Paramètre** est la variable $t \in I$.
- **Support (géométrique)** de γ est son image $supp\gamma = \gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$.
- **Orientation** de la courbe est le sens de parcours déterminé par $t \in I$ croissant**.**

Exemple :

- **Courbe cuspidale :** $\gamma(t) = (t^2, t^3, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.
- **Hélice circulaire :** $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t\,, ht)$, $t \in \mathbb{R}$ avec $r > 0 \; et \; h \in \mathbb{R}$.

Remarque : Un support géométrique peut admettre plusieurs paramétrisations différentes.

Exemple : les paramétrisations **:** $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$

et $\quad \beta:]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}^2, \ \beta(u) = (\cos u, \sin u)$

ont le même support : le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ privé du point (-1, 0).

Définition 2 : On dit que $\varphi: I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$ est un C^k-difféomorphisme si φ est une bijective de classe C^k et sa réciproque est de classe C^k.

Remarque :

Une fonction φ de classe C^1 est un difféomorphisme ssi $\varphi'(x) \neq 0, \forall x \in I$.

Exemple : la fonction $\varphi(x)$=x^3, $x \in \mathbb{R}$ n'est pas un difféomorphisme car $\varphi'(0) = 0$ (cela implique que son inverse $\varphi^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ n'est pas dérivable en $y = 0$).

Définition 3 : Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^k.

Un reparamétrage $\widetilde{\gamma}: J \to \mathbb{R}^n$ (ou reparamétrisation) de classe C^k de γ est une nouvelle paramétrisation telle que $\widetilde{\gamma} = \gamma o \varphi$ avec $\varphi: J \to I$ est un C^k-difféomorphisme.

Exemple : Pour le cercle privé d'un point $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \ \gamma(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$

et $\beta :]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}^2, \ \beta(u) = (\cos u, \sin u)$ on a β est un reparamétrage de γ car $\beta = \gamma o \varphi$ où $\varphi:]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}, \ \varphi(u) = tan\left(\frac{u}{2}\right)$ qui est un difféomorphisme. On note qu'on a utilisé les identités trigonométriques suivantes :

$$cos2a = \frac{1 - tan^2 a}{1 + tan^2 a}, \qquad sin2a = \frac{2tana}{1 + tan^2 a}.$$

Remarque : Le support d'une courbe γ coïncide avec son reparamétrage $\widetilde{\gamma}$ mais la réciproque n'est pas vraie toujours : si un support a deux paramétrisations, celles-ci ne sont pas nécessairement l'une un reparamétrage de l'autre.

<u>Courbes régulières et birégulière</u>

Définition 4: Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée.

- γ est **régulière** en $t_0 \in I$ si $\gamma'(t_0) \neq 0$;
- γ est **singulière** (ou non régulière) en $t_0 \in I$ si $\gamma'(t_0) = 0$;
- γ est **régulière** si elle est régulière en tout point $t \in I$, c'est-à-dire $\gamma'(t) \neq 0$, pour tout $t \in I$ (ce qui est équivalent à $\|\gamma'(t)\| \neq 0, \forall t \in I$.)

Exemple :

- La courbe $\beta:]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}^2$, $\beta(u) = (\cos u, \sin u)$ est régulière car $\beta'(u) = (-\sin u, \cos u) \neq (0,0), \forall u \in\ ]-\pi,\pi[$.
- La courbe $\gamma(\mathrm{t}) = (t^3, t^9)$, $t \in \mathbb{R}$ admet un point singulier (non régulier) $\gamma(0) = (0,0)$, car $\gamma'(\mathrm{t}) = (3t^2, 9t^8) = (0,0)$ si $t = 0$.

Proposition : Si $\gamma : I \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ est une courbe paramétrée régulière, alors tout reparamétrage de γ est aussi régulier.

Définition 5 : Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ une courbe paramétrée régulière.

- γ est **birégulière** en $\mathrm{t}_0 \in \mathrm{I}$ si $\gamma'(\mathrm{t}_0)$ et $\gamma''(\mathrm{t}_0)$ sont linéairement indépendantes (si $n = 3$ ceci est équivalent à $\gamma'(\mathrm{t}_0) \wedge \gamma''(\mathrm{t}_0) \neq (0,0,0)$).
- γ est **birégulière** si elle est birégulière en tout point $\mathrm{t} \in \mathrm{I}$.

Le symbole $\wedge$ désigne le produit vectoriel entre deux vecteurs.

On note qu'une courbe birégulière ne peut être une droite. Si γ est **birégulière** en t_0 alors les deux vecteurs $\gamma'(\mathrm{t}_0)$ et $\gamma''(\mathrm{t}_0)$ engendrent un plan qui s'appelle **plan osculateur** en t_0.

Exemple : La courbe $\gamma(\mathrm{t}) = (t, t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$ est birégulière car les deux vecteurs

$$\gamma'(\mathrm{t}) = (1, 1, 2\mathrm{t}) \quad \text{et} \quad \gamma''(\mathrm{t}) = (0, 0, 2)$$

sont linéairement indépendants. En effet : $\gamma'(\mathrm{t}) \wedge \gamma''(\mathrm{t}) = (2, -2, 0) \neq (0, 0, 0)$.

<u>Longueur et Abscisse Curviligne</u>

Dans la suite $I = [a, b]$ ou $I =]a, b[$.

Définition 6: Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ une courbe paramétrée de classe C^1.

- La longueur de γ est la quantité : $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \leq +\propto$.
- L'abscisse curviligne est la fonction : $S: I \to \mathbb{R}$, $S(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du$.

Remarque : La longueur d'une courbe est invariante par changement de paramétrage.

Définition 7: On dit qu'une courbe est paramétrée par la longueur d'arc (ou paramétrée par l'abscisse curviligne ou encore courbe normale) si $\|\gamma'(t)\|$=1, $\forall t \in I$. Dans ce cas la longueur de la courbe est l'intervalle I vaut : $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = b - a$.

Exemple : Le cercle $\beta(u) = (a\cos\, bu, a\sin bu)$ est normale ssi $b = \frac{1}{a}$ car :

$\beta'(u) = (-ab\sin(bu), abcos(bu))$ donc $\|\beta'(u)\| = ab = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{a}$.

Proposition : Toute courbe régulière $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ admet un reparamétrage paramétré par longueur d'arc.

Procédure de déterminer un reparamétrage normale :

- **i)** Calculer $S(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du$.
- **ii)** Calculer $\varphi : \mathrm{J} = \mathrm{S}(I) \to I$ avec $\varphi(t) = S^{-1}(t)$.
- **iii)** Finalement calculer $\tilde{\gamma}$: $J \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{\gamma}$ (t) $=\gamma o \varphi(t)$ ($\tilde{\gamma}$ est le reparamétrage normale de γ *i.e.* $\|\tilde{\gamma}'(t)\|$=1).

Exemple : On considère $\gamma :]0, 1[\to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$.

On a : $\gamma'(t) = (1, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}) \Longrightarrow \|\gamma'(t)\|^2 = \frac{1}{1-t^2} \neq 1$. Donc la courbe n'est pas normale.

- **i)** Calculons l'abscisse curviligne :

$\mathrm{S}(t) = \int_a^t \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \arcsin t$. On a S: $]0,1[\to]0, \frac{\pi}{2}[$.

La fonction est bijective donc elle admet une fonction inverse.

- **ii)** On pose : $\varphi :]0, \frac{\pi}{2}[\to]0,1[$ avec $\varphi(t) = S^{-1}(t) = \sin t$.
- **iii)** Alors le reparamétrage normale est
  $\tilde{\gamma}$ (t) = $\gamma o \varphi(t) = \gamma(\sin t)$ = $(\sin t, \cos t)$.

Repère de Frenet, Courbure et Torsion

Définition 7 : Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière de classe C^2. On définit :

- **Vecteur tangent à γ en** t$\in$ I: le vecteur $T(t) := \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$;
- **Vecteur normal à γ en** t$\in$ I : le vecteur $N(t) \coloneqq \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma''(t)\|}$;

- **<u>Vecteur binormal à γ en</u>** <u>t∈ I :</u>
  le vecteur $B(t) \coloneqq T(t) \wedge N(t) = \frac{\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|}$.

Les trois vecteurs $(T(t),\ N(t), B(t))$ forment une base orthonormale directe de l'espace, centrée au point $\gamma(t)$, qui s'appelle le repère de Frenet .

Remarque :

- Si le support de γ est une droite le vecteur tangent forme un repère mobile.
- Si le support de γ n'est pas une droite le vecteur normale n'est pas nul.
- Si le support de γ est contenu dans un plan (courbe plane) les deux vecteurs $\big(T(t),\ N(t)\big)$ forment le repère de Frenet.

Définition 8 : Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière de classe C^k.

- **Courbure (géométrique) de γ en** t∈ I est le nombre positif

$$K(t) = \frac{\|T'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|} \quad \left(ou\ K(t) = \frac{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}\right).$$

- **Torsion de γ en** t∈ I est le nombre :

$$\tau(t) = \frac{\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\,,\ \ \gamma'''(t)\ \rangle}{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|^2} = \frac{\boldsymbol{det}(\gamma'(t),\ \gamma''(t)\,,\ \gamma'''(t))}{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|^2}$$

(le $\langle .\,,.\rangle$ symbole désigne le produit scalaire entre deux vecteurs).

Proposition : Si γ est paramétrée par la longueur d'arc (courbe normale) i.e. $\|\gamma'(t)\|=1$, $\forall t \in$ I on a :

$$K = \|\gamma''(t)\| \ \ et\ \ \tau(t) = \frac{\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t),\ \gamma'''(t)\ \rangle}{K^2}.$$

On note que la torsion est définie uniquement dans le cas des courbes **gauches**.

Exemple :

Soient $a\ et\ b$ deux réels avec $a, b > 0$. On considère la courbe paramétrée suivante

(Hélice circulaire) : γ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\qquad \gamma(t) = (a\cos t\,,\ a\sin t,\ \ bt)$.

On a : $\qquad \gamma'(t) = (-a\sin t\,,\ a\cos t,\ b) \Longrightarrow \|\gamma'(t)\|^2 = a^2 + b^2 \neq 0$.

Donc la courbe est bien régulière.

i) Le vecteur tangent est :

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t\,,\ a\cos \mathrm{t},\quad b).$$

ii) La Normale : $N(t) = \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma''(t)\|}$.

On a $\gamma''(t) = (-a\cos t\,, -a\sin t,\quad 0)$ donc $\|\gamma''(t)\|^2\ = a^2$. Alors : $N(t) = (-\cos t\,, -\sin t,\ \ 0)$.

iii) La binomiale : $B(t) = T(t) \wedge N(t)$ (ou $B(t) = \frac{\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|\|\gamma''(t)\|}$)

$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -\cos t & -\sin t & 0\end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin t\,\vec{\imath} + b\cos t\,\overrightarrow{\jmath + a k})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin t\,, -\mathrm{b}\cos t\,, a).$$

- La courbure : $K = \frac{\|T\prime(t)\|}{\|\gamma\prime(t)\|}$ $\left(\ ou\ K = \frac{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}\right)$

on a : $T'(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\cos t\,, -a\sin t,\quad 0)$, donc $\|T'(t)\| = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Comme : $\|\gamma'(t)\| \ = \sqrt{a^2+b^2}$ on obtient : $K\ = \frac{a}{a^2+b^2}$.

- **La Torsion :** $\tau(t) = \frac{\langle \gamma'(t)\wedge\gamma''(t), \gamma'''(t)\,\rangle}{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|^2}$

  On trouve **:**

$$\gamma'(t)\wedge\gamma''(t) = (ab\sin t\,, -\mathrm{abcos}\,t\,, a^2),$$

$$\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|^2 = \ a^2(a^2+b^2)$$

$\gamma'''(t) = (a\sin t, -a\cos\ t, 0)$ donc $\langle\gamma'(t)\wedge\gamma''(t),\ \gamma'''(t)\,\rangle = a^2 b$.

Alors : $\tau(t) = \frac{b}{a^2+b^2}$.

<u>Références :</u>

[1] A. Frabetti, Cours de Géométrie et Calcul différentiel, Université Claude Bernard Lyoun 1, (source http://math.univ-lyon1.fr/~frabetti/GeoL2/cours-geometrie-ch1.pdf)

[2] B. Thibert,Courbes et surfaces 2éme Année Maths, Université Joseph Fourier, Grenoble I, (source http ://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/cs/cs.pdf)