

**Série d'exercices N°1****Normes - Calcul différentiel**

**Exercice n°1** : Considérons la fonction  $f$  définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est continue en  $(0, 0)$ .
2. Calculer les dérivées directionnelles suivantes :  $D_{(0,1)}f(0)$ ,  $D_{(1,0)}f(0)$ ,  $D_{(1,1)}f(0)$ .
3. Déduire si  $f$  est différentiable en  $(0, 0)$ .

**Exercice n°2** : Considérons la fonction  $f$  définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1.  $f$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}^2$  ?
2.  $f$  est-elle de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  ?
3.  $f$  est-elle différentiable sur  $\mathbb{R}^2$  ?
4. Montrer que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ .