IV.5. Travaux dirigés: Résolution numérique des équations différentielles ordinaires (Solution)

Exercice IV.1 : (Solution)

1. **Calcul de la solution approchée par la méthode d'Euler, lorsque x=1**

On a : $f(x, y) = y + x$; $I = [0,1]$ et $n = 10$

Le pas h est : $h = \frac{1-0}{10} = 0.1$

La méthode d'Euler s'exprime comme suit : $y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$

On peut calculer successivement des approximations de $y(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$, $y(0.4)$, $y(0.5)$, $y(0.6)$, $y(0.7)$, $y(0.8)$, $y(0.9)$ et $y(1)$.

La première itération produit :

$$y(0.1) = y(0) + hf(0.1) = 1 + 0.1(1+0) = 1.1$$

La deuxième donne :

$$y(0.2) = y(0.1) + hf(0.1, 1.1) = 1.1 + 0.1(1.1 + 0.1) = 1.22$$

De manière similaire, la troisième itération donne :

$$y(0.3) = y(0.2) + hf(0.2, 1.22) = 1.22 + 0.1(1.22 + 0.2) = 1.362$$

Le tableau suivant regroupe les dix premères itérations :

x_n	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$y(x_n)$	1.0000	1.1000	1.2200	1.3620	1.5282	1.72102

0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
1.943122	2.1974342	2.48717762	2.815895382	3.1874849202

Donc la solution approchée de l'équation différentielle en : $x = 1$, est : 3.1874849202

2. **Comparaison du résultat obtenu avec la solution exacte :**

La solution exacte est donnée par : $y_{exacte} = -1 - x + 2e^x$

En : $x = 1 \Rightarrow y_{exacte} = -1 - 1 + 2e^1 = 3.4365636569$

Donc l'erreur commise est :
$E_e = |y_{exacte}(1) - y(1)| = |3.4365636569 - 3.1874849202| = 0.2490787367$

<u>Exercice IV.2</u> : (Solution)

On a : $\begin{cases} y' = y + e^{2x} \\ y(0) = 2 \end{cases}$

1. **Calcul de la première itération de la méthode d'Euler-Cauchy**

Le pas est : $h = 0.1$

De plus, on a $f(x, y) = y + e^{2x}$

On peut donc utiliser la méthode d'Euler-Cauchy :

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + \frac{h}{2}\left[f\left(x_n, y(x_n)\right) + \left(x_{n+1}, y_{n1}\right)\right]$$

Avec :

$$y_{n1} = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$$

La première itération donne l'approximation de $y(0,1)$

$y_{n1} = y(0) + hf(0,2) = 2 + 0.1\left(2 + e^{2.(0)}\right) = 2,3$ (Le méme résultats trouvé par la méthode d'Euler).

La deuxième étape produit :

$$y(0,1) \approx y(0) + \frac{h}{2}[f(0.2) + f(0.1, 2.3)] = 2 + \frac{0.1}{2}\left[2 + e^{2.(0)} + 2.3 + e^{2.(0.1)}\right]$$
$$= 2.326070138$$

Erreur commise

La solution exacte est : $y_{exacte}(x) = e^{x} + e^{2x}$

La solution exacte en $x = 0.1$ donne : $y_{exacte}(0.1) = e^{0.1} + e^{2(0.1)} = 2.326573676$

Donc , l'erreur commise est :

$$E_{ec(h=0.1)} = |y_{exacte}(0.1) - y(0.1)| = |2.326573676 - 2.326070138| = 0.000503538$$

2. **Calcul des deux premières itérations en utilisant la méthode d'Euler-Cauchy**

Le pas est : $h = 0.05$

On a : $f(x, y) = y + e^{2x}$

On peut donc utiliser la méthode d'Euler-Cauchy et trouver approximativement : $y(0.05)$ et $y(0.1)$.

La première itération donne :

$y_{n1} = y(0) + hf(0,2) = 2 + 0.05\left(2 + e^{2.(0)}\right) = 2{,}15$ (qui représnte le résultat obtenu par la méthode d'Euler).

La deuxième étape produit :

$$y(0,05) \approx y(0) + \frac{h}{2}[f(0.2) + f(0.05, 2.15)] = 2 + \frac{0.05}{2}\left[2 + e^{2.(0)} + 2.15 + e^{2.(0.05)}\right]$$
$$= 2.156379273$$

De la même façon, la deuxième itération produit :

$$y_{n1} = y(0.05) + hf(0.05, 2.156379273) = 2.15637973 + 0.05\left(2.15637973 + e^{2.(0.05)}\right) = 2.319456782$$

on a donc :

$$y(0,1) \approx y(0.05) + \frac{h}{2}[f(0.05{,}2.156379273) + f(0.1, 2.319456782)]$$
$$= 2.156379273 + \frac{0.05}{2}\left[2.156379273 + e^{2.(0.05)} + 2.319456782 + e^{2.(0.1)}\right]$$
$$= 2.326439516$$

Erreur commise

$$E_{ec(h=0.05)} = |y_{exacte}(0.1) - y(0.1)| = |2.326573676 - 2.326439516| = 0.00013416$$

3. **Rapport des erreurs**

$$R = \frac{E_{ec(h=0.1)}}{E_{ec(h=0.05)}} = 3.75 \approx 2^2$$

On voit bien que l'écart entre la solution exacte et la solution approximative diminue d'un facteur de: $3.75 \approx 2^2$, lorsque le pas est devisé par 2, ce qui confirme que la méthode d'Euler-Cauchy est d'ordre 2.

<u>**Exercice IV.3**</u> **: (Solution)**

On a le système suivant : $\begin{cases} y' = -y + x + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

1. **Calcul de l'approximation de $\mathbf{y(0.2)}$**

   On a la fonction suivante : $f(x) = -y + x + 1$

   Le pas h est : $h = 0.1$ et l'intervalle est $[0,0.2]$

a. **Méthode d'Euler**

La méthode d'Euler mène à : $y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$

La première itération donne :

$$y(0.1) \approx y(0) + hf(0.1) = 1 + 0.1(-1 + 0 + 1) = 1.$$

De manière similaire, la deuxième itération donne :

$$y(0.2) \approx y(0.1) + hf(0.1,1) = 1 + 0.1(-1 + 0.1 + 1) = 1.01$$

Donc : $y(0.2) \approx 0.01$

b. **Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4**

On peut donc utiliser la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

$$k_1 = hf(x_n, y(x_n))$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y(x_n) + + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y(x_n) + + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y(x_n) + k_3)$$

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

On cherche à présent les approximations successives $y(0.1)$ et $y(0.2)$.

La première itération donne :

$$k_1 = hf(0.1) = 0.1(-1 + 0 + 1) = 0$$

$$k_2 = hf\left(0 + \frac{0.1}{2}, 1 + \frac{0}{2}\right) = 0.1f(0.05,1) = (-1 + 0.05 + 1) = 0.05$$

$$k_3 = hf\left(0 + \frac{0.1}{2}, 1 + \frac{0.05}{2}\right) = 0.1f(0.05,1.0025) = 0.01(-1.0025 + 0.05 + 1)$$
$$= 0.00475$$

$$k_4 = hf(0 + 0.1, 1 + 0.00475) = 0.1f(0.1,1.00475) = 0.1(-1.00475 + 0.1 + 1)$$
$$= 0.009525$$

On obtient donc :

$$(0.1) \approx y(0) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$= 1 + \frac{1}{6}(0 + 2(0.005) + 2(0.00475) + 0.009525) = 1.0048375$$

La deuxième itération donne :

$$k_1 = hf(0.1,1.0048375) = 0.1(-1.0048375 + 0.1 + 1) = 0.00951625$$

$$k_2 = hf\left(0.1 + \frac{0.1}{2}, 1.0048375 + \frac{0.00951675}{2}\right) = 0.1f(0.15, 1.009595625)$$
$$= 0.1(-1.009595625 + 0.15 + 1) = 0.014040437$$

$$k_3 = hf\left(0.1 + \frac{0.1}{2}, 1.0048375 + \frac{0.014040437}{2}\right) = 0.1f(0.15, 1.011857718)$$
$$= 0.1(-1.011857718 + 0.15 + 1) = 0.013814228$$

$$k_4 = hf(0.1 + 0.1, 1.0048375 + 0.013814228) = 0.1f(0.2, 1.018651728)$$
$$= 0.1(-1.018651728 + 0.2 + 1) = 0.018134827$$

D'où :

$y(0.2) \approx y(0.1) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$$= 1.0048375 + \frac{1}{6}(0.00951625 + 2(0.014040437) + 2(0.013814228) + 0.018134827)$$

$$= 1.018730901$$

Donc l'approximation de y(0.2) en utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est : y(0.2) $\approx$ 1.018730901

2. Erreur commise

La solution exacte est : $y_{exacte}(0.2) = 1.018730780$

a. Erreur commise par la méthode d'Euler

$$E_e = |y_{exacte}(0.2) - y(0.2)| = |1.018730780 - 1.01| = 0.008730780$$
$$= 0.873078\,.\,10^{-2}$$

b. Erreur commise par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

$$\boldsymbol{E_{RK4}} = |y_{exacte}(0.2) - y(0.2)| = |1.018730780 - 1.018730901| = 0.000000121$$
$$= 0.121.\,10^{-6}$$

On voit clairement que la méthode de Runge-Kutta est plus précise que celle d'Euler, il est donc souhaitable d'utiliser des méthodes d'ordre aussi élevé que possible.

<u>Exercice IV.4</u> : (Solution)

On a l'équation suivante : $M\frac{dV}{dt} = -C.V^2 + M.g$

La forme générale de ce type d'équation différentielle s'écrit : $V'(t) = f(y,t)$

Où $V(0) = 0$ et $f(y,t) = -\frac{C}{M}V^2 + g$

La solution de cette équation peut être effectuée par la méthode d'Euler, qui consiste à écrire :$V_{n+1} = V_n + hf(y,t)$

Le programme Matlab suivant permet la résolution numérique de cette équation :

```
%*******************************************%
% Résolution d'une équation différentielle  *
% par la méthode d'Euler à l'ordre 1        *
%*******************************************
clear all; close all; clc;
t=0;n=0;V=0;
C=0.27; M=70; g=9.81; h=0.5;
t_R(1)=t; V_R(1)=V;
while t<=20
```

```
plot(t_R,V_R,'b--o')
xlabel('Temps en (s)')
ylabel('Vitesse en (m/s)')
grid on
```

On obtient également une courbe (Fig VI.1), qui montre l'évolution de V(t) en fonction du temps :

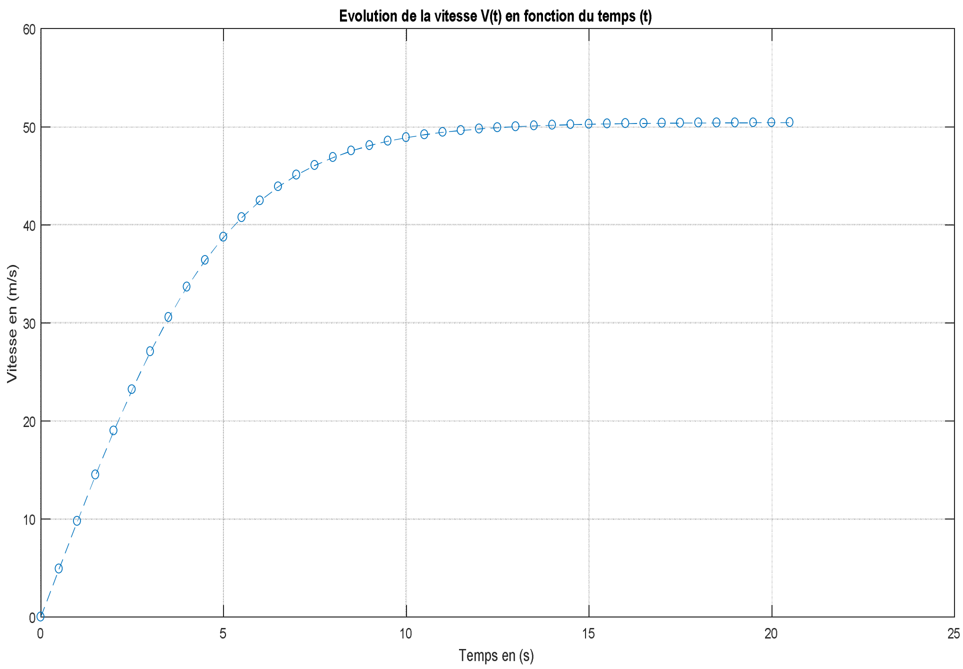

Figure IV.1 : Evolution de la vitesse en fonction du temps