IV.4. Travaux dirigés: Résolution numérique des équations différentielles ordinaires

<u>Exercice IV.1 :</u>

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y' = y + x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Calculer la solution approximative de cette en $x = 1$ à l'aide de la méthode d'Euler en subdivisant l'intervalle de travail en 10 parties égales.
2. Sachant que la solution exacte est : $y_{exacte} = -1 - x + 2e^{x}$, comparer le résultat obtenu avec la solution $y_{exacte}(1)$

<u>Exercice IV.2 :</u>

On donne l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y' = y + e^{2x} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Résoudre la solution exacte : $y_{exacte} = e^{x} + e^{2x}$.

1. On prend : $h = 0.1$, faire une itération de la méthode d'Euler-Cauchy (Euler modifiée) et calculer l'erreur commise sur $y(0.1)$ en comparant le résultat obtenu avec la solution exacte $y_{exacte}(0.1)$.
2. Pour $h = 0.05$, faire deux itérations de la méthode d'Euler-Cauchy et calculer l'erreur commise sur $y(0.1)$ en comparant le résultat obtenu avec la solution exacte $y_{exacte}(0.1)$.
3. Faire le rapport des erreurs commises en 1) et 2) et commenter les résultats obtenus.

Exercice IV.3 :

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y' = -y + x + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Calculer l'approximation de $y(0.2)$ en utilisant les deux méthodes d'Euler et de Runge-Kutta d'ordre 4, avec un pas : $h = 0.1$.
2. Pour chaque méthode, déterminer l'erreur commise en comparant le résultat trouvé avec la solution exacte $y_{exacte}(0.2) = 1.018730780$. Commenter les résultats obtenus.

   Note : Utiliser 9 chiffres significatifs après la virgule.

Exercice IV.4 :

Soit à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$M.\frac{dV}{dt} = -C.V^2 + M.g$$

Où : $\begin{cases} M = 70\ kg \\ g = 9.81\ N/Kg \\ C = 0.27\ kg/m \end{cases}$

1. Déterminer numériquement $V(t)$, en choisissant un pas de temps $h = 0.1\ s$, avec une condition initiale $V(t = 0) = 0$.
2. Tracer la solution de cette équation différentielle pour $0 \leq t \leq 20s$.