III.8. Travaux dirigés : Résolution numérique des équations non linéaires (Solution)

Exercice III. 01 : (Solution)

On a : $f(x) = x^3 - x - 1 = 0, x \in [1,2]$.

a. L'existence de la solution dans l'intervalle [1,2]

$$\left.\begin{array}{l}\text{La fonction f est un polynôme, alors} \\ \text{f est continue sur } \mathbb{R} \text{ et donc sur } [1,2] \\ \text{f}(1) = -1, \text{f}(2) = 5 \text{ donc f}(1).\text{f}(2) < 0\end{array}\right] \Rightarrow \exists c \in [1,2] \text{ tel que: f}(c) = 0.$$

b. L'unicité de la solution

$f'(x) = 3x^2 - 1 > 0 \ \forall x \in [1,2] \Rightarrow f$ est croissante

Donc f est monotne $\Rightarrow$ la solution c est unique

c. La Dichotomie

On applique maintenant la méthode de dichotomie avec $\varepsilon = 10^{-2}$ avec trois chiffres apères la virgule, on note que le nombre d'itérations n peut étre calculé au début par la formule :$n \geq \frac{Ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{Ln(2)} = \frac{Ln(10)^2}{Ln(2)} = 6.67 \Rightarrow 7$ itérations

n	*a*	*b*	$c = \frac{a+b}{2}$	*b-c*	*f(c)*
1	1.000	2.000	1.500	0.500	+0.875
2	1.000	1.500	1.250	0.250	-0.297
3	1.250	1.500	1.375	0.125	+0.225
4	1.250	1.375	1.312	0.063	-0.054
5	1.312	1.375	1.343	0.032	+0.079
6	1.312	1.343	1.327	0.016	+0.010
7	1.312	1.327	1.319	0.008	-0.024

$b - c = 1.327 - 1.319 = 0.008 \leq \varepsilon = 0.01$ donc on arréte les calculs et la solution est : $c \approx 1.319$

On peut écrire $c \approx 1.319 \mp 0.01$

<u>Exercice III. 02 :</u> (Solution)

On va calculer la solution approchée, en utilisant la méthode de dichotomie, de l'équation suivante :

$f(x) = 1 - e^x = 0$, où $x \in [0,1]$ et $\varepsilon = 10^{-3}$.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [0,1] \\ f(0) = 1, f(1) = -1.718 \text{ donc } f(0).f(1) < 0 \end{array}\right| \Rightarrow \exists c \in [0,1] \text{ tel que } f(c) = 0$$

De plus, $f'(x) = -e^x(1+x) < 0 \;\; \forall x \in [0,1] \Rightarrow f$ est décroissante

On calcule le nombre d'itérations comme suit (avec quatre chiffres après la virgule:

$$n \geq \frac{Ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{Ln(2)} = \frac{Ln(10)^3}{Ln(2)} = 9.97 \Rightarrow n = 10 \text{ itérations}$$

n	*a*	*b*	$c = \frac{a+b}{2}$	*b-c*	*f(c)*
1	0 .0000	1 .0000	0 .5000	0 .5000	+0 .1756
2	0 .5000	1 .0000	0 .7500	0 .2500	-0 .5877
3	0 .5000	0 .7500	0 .6250	0 .1250	-0 .1676
4	0 .5000	0 .6250	0 .5625	0 .6250	+0 .0128
5	0 .5625	0 .6250	0 .5937	0 .0313	-0 .0750
6	0 .5625	0 .5937	0 .5781	0 .0156	-0 .0305
7	0 .5625	0 .5781	0 .5703	0 .0078	-0 .0087
8	0 .5625	0 .5703	0 .5664	0 .0039	+0.0020
9	0 .5664	0 .5703	0 .5683	0 .0020	-0.0032
10	0 .5664	0 .5683	0 .5673	0 .0010	+0.0004

$b - c = 0.5683 - 0.5673 = 0.0010 \leq \varepsilon = 0.0010$ donc on arréte les calculs et la solution est : $c \approx 0.5673$, on peut écrire : $c \approx 0.5673 \mp 0.001$

<u>Exercice III. 03 :</u> (Solution)

$f(x) = x - 0.8 - 0.2\sin(x) = 0, x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], \varepsilon = 10^{-5}$ et $x_0 = \frac{\pi}{4}$

Etude de la convergence

La fonction f est définie sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que :

a. $\left.\begin{array}{r} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -0.16 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.57 \end{array}\right| \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right).f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$

b. $f'(x) = 1 - 0.2\cos(x)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 0.2\cos(x) \Rightarrow \cos(x) = 5$, impossible, car : cos(x) $\in [-1,1]$

Donc : $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

c. $f''(x) = 0.2\sin(x) \neq 0 \ \forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

La fonction f vérifie les trois conditions, donc la méthode de Newton-Raphson est convergente vers une solution unique.

La formule itérative de Newton-Raphson

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} - 0.8 - 0.2\sin(x_{n-1}) = 0}{1 - 0.2\cos(x_{n-1})}$$

n	x_n	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	$\frac{\pi}{4}$	___
1	0 .967120	0.181722
2	0 .964335	0 .002785
3	0 .964334	0.000001

$|x_{n+1} - x_n| = |0.964335 - 0.964334| = 0.000001 \leq \varepsilon = 10^{-5}$

La solution approchée est : $c = 0.964334$

<u>Exercice III. 04 :</u> (Solution)

1. **L'équation itérative de Newton-Raphson**

$$x = \sqrt{a} \Rightarrow x^2 - a = 0$$

On pose : $f(x) = x^2 - a = 0 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{{x^2}_{n-1} \quad - a}{2x_{n-1}} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{{x^2}_{n-1} \quad + a}{2x_{n-1}}$$

2. **a=7 et l'intervalle de définition est [1,4]**
   a. **Etude de la convergence**

Pour a=7 on aura $f(x) = x^2 - 7 = 0$. Il est calir que $f(x)$ est définie sur [1,4] **.**

En plus : $\left. \begin{matrix} f(1) = -6 \\ f(4) = 9 \end{matrix} \right| \Rightarrow f(1).f(4) < 0$

Et $f'(x) = 2x > 0 \qquad \forall \in [1,4]$ donc $f'(x) \neq 0 \qquad \forall \in [1,4]$

$f'(x) = 2 \neq 0$

On voit que les conditions de convergence sont vérifiées, donc la méthode de newton-Raphson converge vers une solution unique dans [1,4]

   b. **Calcul des quatre premières itérations**

On a : $x_n = \frac{{x^2}_{n-1} \quad +7}{2x_{n-1}}$

Pour $x_0 = 1$		Pour $x_0 = 3$	
n	x_n	n	x_n
0	1.0000	0	3.0000
1	4.0000	1	2.6667
2	2.8750	2	2.6458
3	2.6549	3	2.6457

4	2.6458	4	2.6457

Exercice III. 05 : (correction)

On a l'équation : $f(x) = \cos(x) - x = 0$

1. **L'existence d'une solution dans $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$**

$f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, 1]$

$f(0) = 1, f(1) = -0.46 \Rightarrow f(0).f(1) < 0$, donc $\exists c \in [0.1]$ tel que $f(c) = 0$.

On a encore $f'(x) = -(\sin(x) + 1) < 0 \;\; \forall\, x \in [0, 1]$ donc $f(x)$ est décroissante.

D'où $f(x)$ est monotone qui veut dire que la racine c est unique.

2. **g(x) qui assure la convergence du point fixe**

$f(x) = \cos(x) - x = 0 \Rightarrow \cos(x) = x$

On prend g(x)=cos(x) et on vérifie les conditions qui assurent la convergence de la méthode du point fixe.

a. **On vérifie si $\boldsymbol{g}([\mathbf{0}, \mathbf{1}]) \subset [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$**

La fonction g(x) est continue sur $[0, 1]$

$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \cos(x) \leq 1$, donc g$\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \subset [0, 1]$ et comme $[0, 1] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on déduit donc que g$([0, 1]) \subset [0, 1]$.

b. **On vérifie si $|\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})| < k < 1$**

On sait que $k = Max|g'(x)|$ lorsque $x \in [0,1]$

$g'(x) = -\sin(x)$ donc $|g'(x)| = \sin(x)$ car $x \in [0,1]$

$(\sin(x))' = \cos(x) > 0$ lorsque $x \in [0,1]$ donc sin(x) est croissante qui veut dire que $|g'(x)|$ est croissante et qui attenit son Max en x=1

Alors $k = \sin(1) = 0.84 \Rightarrow |g'(x)| \leq k = 0.84 < 1$.

Les conditions a) et b) sont vérifiées donc la méthode du point fixe converge. La suite est définie par la méthode formule récursive suivante :

$x_k = g(x_{k-1}) = \cos(x_{k-1})$

3. **Calcul de la solution approximative avec un $\boldsymbol{\varepsilon = 10^{-2}}$ et $\boldsymbol{x_0 = 0.5}$**

k	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	0 .500	------------
1	0.878	0.378
2	0.639	0.239
3	0.803	0.164
4	0.694	0.109
5	0.769	0.075
6	0.719	0.050
7	0.752	0.033
8	0.730	0.022
9	0.745	0.015
10	0.735	0.010

La solution recherchée est c=0.735

<u>**Exercice III. 06 :**</u> **(Solution)**

On a : $f(x) = x^3 - x - 1 = 0, x \in [1,2]$

1. **Conditions de convergence**

On vérifie les deux conditions suivantes pour : $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$:

a. $\boldsymbol{g[1,2] \subset [1,2]}$

Il est clair que $g(x)$ est définie et continue sur $[1,2]$

$g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} > 0 \ \forall x \in [1,2]$ donc g est croissante

$g(1) = 1.26 \ \in [1,2]$

$g(2) = 1.44 \ \in [1,2]$

On voit bien que : $\forall x \in [1,2]\ \ 1.26 \leq g(1) \leq 1.44 \Rightarrow g[1,2] \subset [1,2]$.

b. $|\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})| \leq \boldsymbol{k} < 1\ \forall \boldsymbol{x} \in [\mathbf{1}, \mathbf{2}]$

$$g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} \Rightarrow |g'(x)| = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

$$\forall x_1 \in [1,2], \forall x_2 \in [1,2] \text{ si } x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{(x_1+1)^2}} > \frac{1}{3\sqrt[3]{(x_2+1)^2}}$$

$\Rightarrow |g'(x_1)| > |g'(x_2)| \Rightarrow |g'(x)|$ est décroissante

Donc $|g'(x)| \leq |g'(1)| = k = 0?21 < 1$

Les deux conditions précedentes sont vérifiées qui singnfie que point fixe converge.

La suite est définie par la formule récursive suivante : $x_k = g(x_{k-1}) = \sqrt[3]{x_{k-1} + 1}$

2. La solution approximative

n	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$
0	1.500	-----
1	1.357	0.143
2	1.331	0.019
3	1.326	0.005

La solution approchée est donc : $cc \approx 1.326$

3. Comparaison et conclusion

Le nombre des itérations obtenu la méthode du point fixe est n=3, il est inférieur à celui obtenu par la méthode de la Bissection, n=7 (Exercice III-01).

On conclue que la méthode du point fixe converge plu srapidment que celle de la Bissection