II.9. Travaux dirigés: Intégration numérique (Solution)

Exercice II-1 : (Solution)

1. **Calcul de l'intégrale en utilisant la méthode des Trapèzes**

$$\int_a^b f(x)dx = J_T \approx (b-a)\left[\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)\right]$$

$$\int_0^2 \sqrt{x}dx = J_T \approx (2-0)\left[\frac{1}{2}\sqrt{0} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right] \approx 1.4142$$

2. **Calcul de l'intégrale en utilisant la méthode de Simpson**

$$\int_a^b f(x)dx = J_S \approx (b-a)\left[\frac{1}{6}f(a) + \frac{4}{6}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6}f(b)\right]$$

$$\int_0^2 \sqrt{x}dx = J_S \approx (2-0)\left[\frac{1}{6}\sqrt{0} + \frac{4}{6}\sqrt{1} + \frac{1}{6}\sqrt{2}\right] \approx 1.8047$$

3. **Comparaison**

$$J_{exacte} = \int_0^2 \sqrt{x}dx = \int_a^b (x)^{1/2}dx = \left[\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{2}{3}\left[\sqrt{x^3}\right]_0^2 = \frac{2}{3}\left[\sqrt{2^3} - 0\right] = 1.8856$$

$$|J_{exacte} - J_T| = |1.8856 - 1.4142| = 0.4714$$
$$|J_{exacte} - J_S| = |1.8856 - 1.8856| = 0.0809$$

On peut donc remarquer que l'approximation de l'intégrale donnée par laméthode de Simpson est meilleure que celle obtenue par la méthode des Trapèzes

Exercice II-2: (Solution)

1. **Calcul de l'intégrale en utilisant la méthode des Trapèzes généralisée**
   a. **Avec 5 petits intervalles**

$$J = \int_0^\pi \sin\sin(x)^2\, dx$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi - 0}{5} = \frac{\pi}{5}$$

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = \pi/5$	$x_2 = 2\pi/5$	$x_3 = 3\pi/5$	$x_4 = 4\pi/5$	$x_5 = \pi$
$f(x_i)$	0.0000	0.3846	1.0000	-0.3999	0.0333	-0.4303

$$\int_a^b f(x)dx = J_{TG_5} = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_5) + 2\big(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)\big)\right]$$

$$J_{TG_5} = \frac{\pi}{10}[0.0000 - 0.4303 + 2(0.3846 + 1.0000 + -0.3999 + 0.0333)] = 0.5044$$

b. Avec 10 petits intervalles

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi - 0}{10} = \frac{\pi}{10}$$

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = \pi/5$	$x_2 = 2\pi/5$	$x_3 = 3\pi/5$	$x_4 = 4\pi/5$
$f(x_i)$	0.0000	0.0985	0.3846	0.7760	1.0000

$x_5 = \pi$	$x_6 = 0$	$x_7 = \pi/5$	$x_8 = 2\pi/5$	$x_9 = 3\pi/5$	$x_{10} = 4\pi/5$
0.6243	-0.3999	-0.9924	0.0333	0.9902	-0.4303

$$\int_a^b f(x)dx \approx J_{TG_S}$$

Avec :

$$J_{TG_{10}} = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_{10}) +$$
$$2\big(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_6) + f(x_7) + f(x_8) + f(x_9)\big)]$$

$$J_{TG_{10}} = \frac{\pi}{20}[0.0000 - 0.4303 +$$
$$2(0.0985 + 0.3846 + 0.7760 + 1.0000 + 0.6243 - 0.3999 - 0.9924 + 0.0333 + 0.9902)]$$

Donc : $J_{TG_{10}} = 0.7224$

2. Comparaison

$$J_{exacte} = 0.7726$$

$$\left|J_{exacte} - J_{TG_S}\right| = |0.7726 - 0.5044| = 0.2682$$

$$\left|J_{exacte} - J_{TG_S}\right| = |0.7726 - 0.7224| = 0.0502$$

Pour le cas n=5, l'erreur absolue est 0.2682 par rapport à la solution exacte. Pour le cas N=10 , l'erreur absolue a été réduite à 0.0502, on voit bien que cette erreur est environ 5 fois plus petite que celle calculée avec 5 intervalles

Exercice II-3: (Solution)

1. **Calcul de l'intégrale J en utilisant la méthode Simpson généralisée.**
   a) Avec 4 petits intervalles

$J = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0.25$$

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = 0.25$	$x_2 = 0.5$	$x_3 = 0.75$	$x_4 = 1$
$f(x_i)$	1	0.8	0.666667	0.571429	0.5

$$\int_a^b f(x)dx \approx J_{SG_4} = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_4) + 4\big(f(x_1) + f(x_3)\big) + 2f(x_2)\right]$$

$$J_{SG_4} = \frac{0.25}{3}[1 + 0.5 + 4(0.8 + 0.571429) + 2(0.666667)] = 0.693254$$

a) Avec 8 petits intervalles

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{8} = 0.125$$

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = 0.125$	$x_2 = 0.250$	$x_3 = 0.375$	$x_4 = 0.500$
$f(x_i)$	1	0.888889	0.8	0.727273	0.666667

$x_5 = 0.625$	$x_6 = 0.750$	$x_7 = 0.875$	$x_8 = 1.000$
10.615385	0.571429	0.533333	0.5

$$\int_a^b f(x)dx \approx J_{SG_8}$$

Avec :

$$J_{SG_8} = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_8) + 4\big(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7)\big) + 2\big(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6)\big)\right]$$

$$J_{SG_8} = \frac{0.125}{3}[1 + 0.5 + 4(0.888889 + 0.727273 + 0.615385 + 0.533333) + 2(0.8 + 0.666667 + 0.571429)]$$

$$J_{SG_8} = 0.693155$$

2. **Comparaison**

$$J_{exacte} = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = [Ln(x+1)]_0^1 = Ln(2) = 0,693147$$

$$\left|J_{exacte} - J_{SG_4}\right| = |0,693147 - 0.693254| = 1.0682\ 10^{-4}$$

$$\left|J_{exacte} - J_{SG_8}\right| = |0,693147 - 0.693155| = 7.8194\ 10^{-6}$$

Pour le cas n=4, l'erreur absolue est $1.0682\ 10^{-4}$ par rapport à la solution exacte. Pour le cas N=10 , l'erreur absolue a été réduite à $7.8194\ 10^{-6}$, on voit bien que cette erreur est environ 14 fois plus petite que celle calculée avec 4 intervalles

3. **Erreur maximale**

$$|R_{SG}| \leq E_{max} = \frac{nh^5}{2(90)} M$$

Avec :

$h = \frac{b-a}{n}$ et $M = Max\{\left|f^{(4)}(\xi)\right|\}\ ou\ \xi \in [a, b]$

Donc :

$$E_{max} = \frac{(b-a)^5}{180n^4} M$$

Calcul de M :

$$f(x) = \frac{1}{x+1};\ f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}\ ;\ f''(x) = 2\frac{1}{(x+1)^3};\ f'''(x) = -6\frac{1}{(x+1)^4};$$

$$f^{(4)}(x) = 24\frac{1}{(x+1)^5}$$

$M = Max\left\{\left|24\frac{1}{(x+1)^5}\right|\right\} = Max\left\{24\frac{1}{(x+1)^5}\right\}$ ou $x \in [0,1]$

$\forall\, x_1 \in [0,1], \forall\, x_2 \in [0,1]\ , x_1 < x_2\ \Rightarrow x_1 + 1 <, x_2 + 1 \Rightarrow (x_1+1)^5 < (x_2+1)^5$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x_1+1)^5} > \frac{1}{(x_2+1)^5} \Rightarrow \frac{24}{(x_1+1)^5} > \frac{24}{(x_2+1)^5} \Rightarrow \left|f^{(4)}(x_1)\right| > \left|f^{(4)}(x_2)\right|$$

$\Rightarrow f^{(4)}(x)$ décroissante

Donc le max est obtenu pour x=0, il vient alors :

$$M = \frac{24}{(0+1)^5} = 24$$

Pour le cas n=4, on obtient :

$$E_{max} = \frac{(1-0)^5}{180(4)^4}24 = 5.2083\ 10^{-4}$$

Pour le cas n=8, on obtient :

$$E_{max} = \frac{(1-0)^5}{180(8)^4}24 = 3.2552\ 10^{-5}$$

<u>Exercice II-4</u>: (Solution)

1. Calcul de l'intégrale en utilisant la méthode des Trapèzes généralisée

$$J = \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$$

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = \pi/8$	$x_2 = \pi/4$	$x_3 = 3\pi/8$	$x_4 = \pi/2$
$f(x_i)$	0	0.382683	0.707107	0.923880	1

$$h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = \frac{\pi}{8}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx J_{TG_4} = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_4) + 2\big(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\big)\right]$$

$$J_{TG_4} = \frac{\pi}{16}[0 + 1 + 2(0.382683 + 0.707107 + 0.923880)] = 0.987116$$

2. Calcul de l'intégrale en utilisant la méthode de Simpson généralisée

$$\int_a^b f(x)dx \approx J_{SG_4} = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_4) + 4\big(f(x_1) + f(x_3)\big) + 2f(x_2)\right]$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx J_{SG_4} = \frac{\pi}{24}[0 + 1 + 4(0.382683 + 0.923880) + 2(0.707107)] = 1.000135$$

3. Comparaison

$$J_{exacte} = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\,dx = -[\cos(x)]_0^{\pi/2} = 1$$

$$\left|J_{exacte} - J_{SG_4}\right| = |1 - 0.987116| = 0.012884$$

$$\left|J_{exacte} - J_{SG_4}\right| = |1 - 1.000135| = 0.000135$$

Il est clair que la méthode de Simpson donne précison supérieure à celle donnée par la méthode des Trapèzes

4. Nombre d'intervalles n

L'errur théorique commise par la méthode de Simpson vérifie :

$$|R_{SG}| \leq E_{Max} = \frac{nh^5}{2(90)}M$$

Où : $M = Max\{|f^{(4)}(\xi)|\}$, $\xi \in [a,b]$

Et pour : $|R_{SG}| \leq \varepsilon$, il suffit que n vérifie :

$$\frac{nh^5}{180}M = \frac{(b-a)^5}{180\, n^4}M \leq \varepsilon \Rightarrow n^4 \geq \frac{(b-a)^5}{180\, \varepsilon}M$$

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f^{(4)}(x) = \sin(x)$$

Donc : $f^{(4)}(x)$ est croissante sur $\left|0, \frac{\pi}{2}\right| \Rightarrow M = f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1$

Donc : $n^4 \geq \frac{\left(\frac{\pi}{2}-0\right)^5}{180.10^{-6}}.(1) \Rightarrow n \geq 15.18$

On prend alors : n=16