V.9. Travaux dirigés N^0 04: Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires : Méthodes directes (Solution)

<u>Exercice V.8.1</u> : (Solution)

On a le système suivant : $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & -3 & -9 \end{array}\right)$

On résout le système par l'élimination de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & -3 & -9 \end{array}\right)\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

<u>Etape 1</u> : on élimine les éléments sous diagonales de la première colonne

$L_2 \leftarrow L_2 - \left(\frac{1}{2}\right) L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - \left(\frac{1}{4}\right) L_1$

Il vient : $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 7/2 & -2 & -19/2 \\ 0 & 3/4 & -7/2 & -45/4 \end{array}\right)\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$

<u>Etape 2</u> : on élimine les éléments sous diagonales de la deuxième colonne

$L_3 \leftarrow L_3 - \left(\frac{3}{14}\right) L_2$

Il vient : $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 7/2 & -2 & -19/2 \\ 0 & 0 & -43/14 & -129/14 \end{array}\right)\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$

Après l'obtention d'une matrice triangulaire superieure, on calcule la solution par rementée :

$$-\frac{43}{14}x_3 = -\frac{129}{14} \Rightarrow x_3 = 3$$

$$\frac{7}{2}x_2 - 2x_3 = -\frac{19}{2} \Rightarrow x_2 = -1$$

$$x_1 + x_2 - 3x_3 = -9 \Rightarrow x_1 = 1$$

Donc la solution est : $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exercice V.8.2 : (Solution)

Calcul du déterminant de VANDERMONDE

$$V = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & {\alpha_1}^2 \\ 1 & \alpha_2 & {\alpha_2}^2 \\ 1 & \alpha_3 & {\alpha_3}^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

Etape 1 : On élimine les éléments sous diagonales de la première colonne.

$L_2 \leftarrow L_2 - (1)L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - (1)L_1$

Il vient :

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & {\alpha_1}^2 \\ 0 & \alpha_2 - \alpha_1 & {\alpha_2}^2 - {\alpha_1}^2 \\ 0 & \alpha_3 - \alpha_1 & {\alpha_3}^2 - {\alpha_1}^2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

Etape 2 : On élimine les éléments sous diagonales de la deuxième colonne

$L_3 \leftarrow L_3 - \left(\dfrac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}\right) L_2$

Il vient :

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & {\alpha_1}^2 \\ 0 & \alpha_2 - \alpha_1 & {\alpha_2}^2 - {\alpha_1}^2 \\ 0 & 0 & (\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2) \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses éléments diagonaux.

$$\mathrm{Det(V)} = (1)(\alpha_2 - \alpha_1)\big((\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)\big)$$

Exercice V.8.3 : (Solution)

1. Le système sous forme matricielle s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Factorisation du système par la méthode d'élimination de Gauss

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & a & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & a & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

Etape 1 : On élimine les éléments sous diagonales de la première colonne.

$L_2 \leftarrow L_2 - (2)L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - (2)L_1$

Il vient : $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & a & 1 \\ 0 & -1 & 1-2a & -1 \\ 0 & -4 & -a & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$

<u>Etape 2 :</u> On élimine les éléments sous diagonales de la deuxième colonne.

$L_3 \leftarrow L_3 - (4)L_2$

Il vient : $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & a & 1 \\ 0 & -1 & 1-2a & -1 \\ 0 & 0 & 7a-4 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$

On récupère les coefficients utilisés pour éliminer les éléments sous-diagonaux pour déduire la décomposition LU.

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & -1 & 1-2a \\ 0 & 0 & 7a-4 \end{bmatrix}$$

3. On déduit le déterminant de A

$$\det(A) = \det(L)\det(U) = \det(U) = (1)(-1)(7a-4) = 4 - 7a$$

Pour que le système accepte une solution, il faut que $\det(A) \neq 0$

$$\Rightarrow a \neq \frac{4}{7}$$

4. Le calcul par descente puis par remontée nous permet de trouver la solution du système considéré

   $x_1 = x_2 = \frac{a-1}{7a-4}$ et $x_3 = \frac{3}{7a-4}$

   Donc : $x = \begin{pmatrix} \frac{a-1}{7a-4} & \frac{a-1}{7a-4} & \frac{3}{7a-4} \end{pmatrix}^T$

<u>Exercice V.8.4</u>: (Solution)

On détermine l'inverse de la matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 2\alpha \\ 2 & 2\alpha+1 & 3\alpha \\ -1 & -\alpha-2 & \alpha \end{bmatrix}$$

On construit le système augmenté, en utilisant la méthode de Gauss comme suit:

Dr. MODERRES Mourad

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha & 2\alpha & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2\alpha+1 & 3\alpha & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\alpha-2 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

Etape 1 : On élimine les éléments sous diagonales de la première colonne.

$L_2 \leftarrow L_2 - (2)L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - (-1)L_1$

Il vient : $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha & 2\alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3\alpha & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$

Etape 2: On élimine les éléments sous diagonales de la deuxième colonne.

$L_3 \leftarrow L_3 - (-2)L_2$

Il vient : $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha & 2\alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -3 & 2 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$

La remontée triangulaire donne les vecteurs v_1 , v_2 et $v_3$de la matrice inverse A^{-1} :

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & 2\alpha \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 5\alpha+7 \\ -5 \\ -3/\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & 2\alpha \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} -3\alpha-4 \\ 3 \\ 2/\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & 2\alpha \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} -\alpha-2 \\ 1 \\ 1/\alpha \end{bmatrix}$$

Donc : $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5\alpha+7 & -3\alpha-4 & -\alpha-2 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3/\alpha & 2/\alpha & 1/\alpha \end{bmatrix}$

Exercice V.8.5 : (Solution)

a) L'élimination de Gauss sur le système donne :

$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -6\alpha & 3 \\ 3\alpha & -1 & \beta \end{array}\right] L_2 \leftarrow L_2 - \left(\frac{3\alpha}{2}\right) L_1,$ il vient :

$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -6\alpha & 3 \\ 0 & -1+9\alpha^2 & \beta - \frac{9}{2}\alpha \end{array}\right].$

b) Le déterminant de la matrice : $\det(A) = 2(9\alpha^2 - 1) = 18\alpha^2 - 2.$

c) On détermine les valeurs de αet de β pour lesquelles la matrice A est non inversible (singulière) :

A est non inversible $\Longrightarrow 18\alpha^2 - 2 = 0 \Longrightarrow \alpha = \mp 1/3$

d) Si $\alpha = 1/3$, la matrice est singulière, si $\beta = 1$, la dernière équation n'a pas de solution.

Exercice V.8.6 : (Solution)

a) $\det(A) = (1)(3)(6) = 18$

b) $\|A\|_\infty = \max(6{,}27{,}55) = 55$.

c) Ces deux vecteurs sont les deux premières colonnes de A^{-1}, pour obtenir donc la troisième colonne x_3, on résout le système : A x_3 = $(0\ 0\ 1)^T$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui donne: $x_3 = (\ 5/6 \ \ -2/3 \quad 1/6)^T$.

d) $\text{Cond (A)} = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max(4.66653, 2.33329, 0.55555) = 4.66653$$

Donc : $\text{Cond (A)} = (55)(4.66653) = 256.659$