V.8. Travaux dirigés N⁰ 04 : Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires (Méthodes directes)

<u>Exercice V.8.1</u> :

Résoudre le système d'équation suivant en utilisant l'élimination de Gauss :

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -9 \end{cases}$$

<u>Exercice V.8.2</u> :

En utilisant la méthode de Gauss, calculer le déterminant de VANDERMONDE de degré 3 suivant :

$$W = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & {\alpha_1}^2 \\ 1 & \alpha_2 & {\alpha_2}^2 \\ 1 & \alpha_3 & {\alpha_3}^2 \end{bmatrix}$$

<u>Exercice V.8.3</u> :

Soit le système Ax = B suivant :

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & +a\,x_3 = 1 \\ 2x_1 & +5x_2 & +x_3 = 1 \\ 2x_1 & +2x_2 & +a\,x_3 = 1 \end{cases}$$

1. Donner la matrice A et le vecteur b du système.
2. Factoriser le système obtenu avec la méthode de Gauss. Déduire une décomposition LU de A.
3. Déduire le déterminant de la matrice A et la condition que le système doit satisfaire pour admettre une solution unique.
4. Supposant que la condition précédente est satisfaite. Résoudre le système.

<u>Exercice V.8.4</u> :

Soit le paramètre $\beta \neq 0$, calculer l'inverse de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 2\beta \\ 2 & 2\beta + 1 & 3\beta \\ -1 & -\beta - 2 & \beta \end{pmatrix}$$

Exercice V.8.5 :

a) Effectuer l'élimination de Gauss (sans permutation de lignes) sur le système $Ax=b$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -6\alpha \\ 3\alpha & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \beta \end{bmatrix}$$

b) Calculer le déterminant de A en vous servant de l'élimination de Gauss.

c) Déterminer les valeurs de αet de βpour lesquelles la matrice A est non inversible (singulière).

d) Que pouvez-vous dire de la solution de ce système quand α= 1/3 et β=1?

Exercice V.8.6 :

La matrice: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 18 \\ 4 & 13 & 38 \end{pmatrix}$ possède la décomposition LU suivante (notation compacte, obtenue sans permutation de lignes):

$$\begin{pmatrix} 123 \\ 234 \\ 456 \end{pmatrix}$$

En utilisant la méthode de Crout, on a résolu les systèmes A$\vec{x}$ = b suivants:

1) Si $\vec{b}$= $(1\ 0\ 0)^T$: $\vec{x}$= $(1{,}7777\ -0{,}22222\ -0{,}11111)^T$
2) Si $\vec{b}$= $(0\ 1\ 0)^T$: $\vec{x}$= $(-2.0555\ \ 1{,}4444\ \ -0{,}27777)^T$

Déterminer :

a) dét A
b) $\|A\|_\infty$
c) A^{-1}
d) Cond (A) (En utilisant la norme :$\|\ \ \|_\infty$)