V.11. Travaux dirigés N⁰ 04: Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires : Méthodes itératives (Solution)

<u>Exercice V.10.1</u> : (Solution)

On a le système linéaire :

$$\begin{cases} -2x_1 & + & 10x_3 = & 7 \\ 10x_1 & -x_2 & = & 9 \\ -x_1 & 10x_2 & -2x_3 = & 10 \end{cases}$$

1. Le système sous sa forme à diagonale dominante s'écrit comme suit :
   Un système à diagonale dominante doit satisfaire la condition suivante :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \forall\ i = 1,2,3,\dots,n$$

Le système qui vérifie cette condition s'écrit donc :

$$\begin{cases} 10x_1 & -x_2 & = & 9 \\ -x_1 & 10x_2 & -2x_3 = & 10 \\ -2x_1 & + & 10x_3 = & 7 \end{cases}$$

Car : $\begin{cases} |10| > |-1| + |0| \\ |10| > |-1| + |-2| \\ |10| > |-2| + |0| \end{cases}$

2. Calcul des trois premières itérations en utilisant la méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel :

a. Méthode de Jacobi :

Le système itératif s'écrit donc : $\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{x_2^k+9}{10} \\ x_2^{k+1} = \frac{x_1^k+2x_3^k+10}{10} \\ x_3^{k+1} = \frac{2x_1^k+7}{10} \end{cases}$

Lorsque le vecteur initial est : $x^{(0)} = (0,0,0)^T$ on trouve :

k	0	1	2	3
x_1	0.0000	0.9000	1.0000	1.0230
x_2	0.0000	1.0000	1.2300	1.2760
x_3	0.0000	0.7000	0.8800	0.9000

La solution approchée est : $x_J = (1.0230,1.2760,0.9000)^T$

b. Méthode de Gauss-Seidel :

Dr. MODERRES Mourad

Le système itératif s'écrit donc : $\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{x_2^k+9}{10} \\ x_2^{k+1} = \frac{x_1^{k+1}+2x_3^k+10}{10} \\ x_3^{k+1} = \frac{2x_1^{k+1}+7}{10} \end{cases}$

Lorsque le vecteur initial est : $x^{(0)} = (0,0,0)^T$ on a le tableau suivant :

k	0	1	2	3
x_1	0.0000	0.9000	1.0090	1.0277
x_2	0.0000	1.0900	1.2769	1.2831
x_3	0.0000	0.8800	0.9018	0.9055

La solution approchée est : $x_{GS} = (1.0277,1.2831,0.9055)^T$

Et comme la solution exacte $x_{exacte} = \left(\frac{507}{493},\frac{633}{493},\frac{893}{986}\right)^T = (1.0284,1.2840,0.9057)^T$

On constate bien que, pour un même nombre d'itérations, la solution approchée obtenue par la méthode de Gauss-Seidel ets plus précise que celle obtenue par la méthode de Jacobi, donc la méthode de Gauss-Seidel est plus rapide que celle de Jacobi.

<u>Exercice V.10.2</u> : (Solution)

On a ale système suivant : $\begin{matrix} 3x_1 & +\ x_2 & -x_3 = & 2 \\ x_1 & +5x_2 & +2x_3 = & 17 \\ 2x_1 & -\ x_2 & -6x_3 = & -18 \end{matrix}$

1. **Calcul des 5 premières itérations, en utilsant :**
   a. **La méthode de Jacobi**

Le système itératif s'écrit donc : $\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{-x_2^k+x_3^k+2}{3} \\ x_2^{k+1} = \frac{-x_1^k-2x_3^k+17}{5} \\ x_3^{k+1} = \frac{2x_1^k-x_2^k+18}{6} \end{cases}$

A partir de $x^{(0)} = (0,0,0)^T$, on remplit le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5
x_1	0.0000	0.6667	0.5333	0.8630	0.8674	0.9408
x_2	0.0000	3.4000	2.0667	2.2311	2.0941	2.0602
x_3	0.0000	3.0000	2.6556	2.8333	2.9158	2.9401

La solution approchée est : $x_J = (0.9408,2.0602,2.9401)^T$

b. La méthode de Gauss-Seidel

Le système itératif s'écrit donc : $\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{-x_2^k+x_3^k+2}{3} \\ x_2^{k+1} = \frac{-x_1^{k+1}-2x_3^k+17}{5} \\ x_3^{k+1} = \frac{2x_1^{k+1}-x_2^{k+1}+18}{6} \end{cases}$

A partir de $x^{(0)} = (0,0,0)^T$, on remplit le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5
x_1	0.0000	0.6667	0.4704	0.8498	0.9381	0.9775
x_2	0.0000	3.2667	2.2348	2.1163	2.0402	2.0154
x_3	0.0000	2.6778	2.7843	2.9305	2.9727	2.9899

La solution approchée est donc: $x_{GS} = (0.9775, 2.0154, 2.9899)^T$

2. Conclusion

Comme solution exacte $x_{exacte} = (1,2,3)^T$, pour un méme nombre d'itérations, on constate que la solution approchée trouvée par la méthode des Gauss-Seidel est plus précise que celle trouvée en utilisant la méthode de Jacobi, qui signifie que Gauss-Seidel converge plus vite que la méthode de Jacobi.

<u>Exercice V.10.3</u>: (Solution)

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1. Le système itératif de Gauss-Seidel s'écrit :

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \dfrac{12 - x_2^k - x_3^k}{6} \\ x_2^{k+1} = \dfrac{-x_1^{k+1}}{2} \\ x_3^{k+1} = \dfrac{6 - x_1^{k+1} - 2x_2^{k+1}}{6} \end{cases}$$

Le tableau suivant regroupe les résultats des 3 premières itérations de GS :

k	0	1	2	3
x_1	2.0000	$4/3$	$35/18$	$431/216$
x_2	2.0000	$-2/3$	$-35/36$	$-431/432$
x_3	2.0000	1	1	1

Donc, la valeur approchée par la méthode de Gauss-Seidel est :

$$x_{GS} = \left(\frac{431}{216}, \frac{-431}{432}, 1\right)^T$$

2. Décomposition LU de la matrice A

On applique l'élimination de Gauss sur la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

<u>Etape 1</u> : On élimine les éléments sous diagonales de la première colonne

$L_2 \leftarrow L_2 - \left(\frac{2}{6}\right) L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - \left(\frac{1}{6}\right) L_1$

Il vient : $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 11/3 & -1/3 \\ 0 & 11/6 & 35/6 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$

<u>Etape 2</u> : On élimine les éléments sous diagonales de la deuxième colonne

$L_3 \leftarrow L_3 - \left(\frac{11/6}{11/3}\right) L_2$

Il vient : $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 0 & 11/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

On peut donc déduire les expressions de L et U comme suit :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 0 & 11/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Calcul de l'inverse de A en se basant sur la décomposition LU

$$A = LU \Rightarrow A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$

Où : $UU^{-1} = I$ et $LL^{-1} = I$

Il vient donc : $L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$ et $U^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & -0.0455 & -0.0303 \\ 0 & 3/11 & 0.0152 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \begin{pmatrix} 0.1818 & -0.0303 & -0.0303 \\ -0.0909 & 0.2652 & 0.0152 \\ 0 & -0.0833 & 0.1667 \end{pmatrix}$$

Pour confirmer le résultat on calcule :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1818 & -0.0303 & -0.0303 \\ -0.0909 & 0.2652 & 0.0152 \\ 0 & -0.0833 & 0.1667 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice V.10.4: (Solution)

On a le système suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 & -\ x_2 & +x_3 = & -1 \\ 3x_1 & -3\,x_2 & +9x_3 = & 0 \\ 3x_1 & +2\,x_2 & +5x_3 = & 10 \end{cases}$$

1. **Calcul des 5 premières itérations, en utilisant :**

a. **La méthode de Jacobi**

Le système recursif de la méthode de Jacobi s'écrit : $\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{x_2^k - x_3^k - 2}{2} \\ x_2^{k+1} = x_1^k + 3x_3^k \\ x_3^{k+1} = \frac{10 - 3x_1^k - 2x_2^k}{5} \end{cases}$

A partir de $x^{(0)} = (0,0,0)^T$, on a le tableau suivant :

k	0	1	2	3
x_1	0.00	-0.50	-1.50	1.10
x_2	0.00	0.00	5.50	5.40
x_3	0.00	2.00	2.30	0.70

b. **La méthode de Gauss-Seidel**

c. Le système recursif de la méthode de Jacobi s'écrit : $\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{x_2^k - x_3^k - 2}{2} \\ x_2^{k+1} = x_1^{k+1} + 3x_3^k \\ x_3^{k+1} = \frac{10 - 3x_1^{k+1} - 2x_2^{k+1}}{5} \end{cases}$

A partir de $x^{(0)} = (0,0,0)^T$, on a le tableau suivant :

k	0	1	2	3
x_1	0.00	-0.50	-2.00	1.75
x_2	0.00	-0.50	5.50	4.75
x_3	0.00	2.50	1.00	-0.95

On voit bien que la solution diverge car le système n'est pas à diagonale dominante (condition suffisante n'est vérifiée). Dans le tableau suivant , nous allons méttre en évidence l'erreur relative pour chaque méthode traitée :

k	$\frac{\lvert x_k - x_{k-1} \rvert}{\lvert x_k \rvert}$	
	Méthode de Jacobi	Méthode de Gauss-Seidel
1	100%	100%
2	91.06%	107.07%
3	54.95%	83.30%

A partir de ce tableau, il est clair que la méthode de Gauss-Seidel diverge plus rapide que la méthode Jacobi