المحددات :

1. **المحددات**
2. **العمليات على المحددات**
3. **طرق حساب المحدد**
4. **محدد Wronskian**
5. **اشتقاق المحددات**

المحددات (Déterminants) :

لتكن المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ المحددات من الدرجة $n \times n$ هي عبارة عن nعنصرا مرتبة في n عمود n سطر و n عمود موضوعة بين خطين متوازيين من الشكل:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & \cdots & \cdots & \cdots & . \\ . & . & \cdots & a_{ii} & \cdots & \cdots & . \\ . & . & \cdots & \cdots & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & \cdots & \cdots & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

او يرمز له بالشكل المختصر : $det(A) = |a_{ij}|_n$

اذا كانت المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ من الدرجة 2×2 فان المحدد المصفوفة A نرمز له بالرمز $der(A)$ و يحسب بالشكل الاتي :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

اذا كانت المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ من الدرجة $n = 3 \times 3$ فان المحدد المصفوفة A نرمز له بالرمز $der(A)$ و يحسب بالشكل الاتي :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

نشر المحدد بالنسبة لاعمدة او الاسطر :

لتكن المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ نرمز للمصفوفة المربعة S_{pq} من الرجة $n-1$ والتي يمكن الحصول عليها بحذف العمود وسطر المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ اذن :

النشر لمحدد المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ اذا حذفنا سطريكون بالعلاقة :

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{q+i}.\, det(S_{iq})$$

النشر لمحدد المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ اذا حذفنا عمود يكون بالعلاقة :

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{p+j}.\, det(S_{pj})$$

محدد المصفوفة المثلثية :

لتكن المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ مصفوفة مثلثية (علوية او سفلية) اذن محددها هو :

$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- خواص المحدد :

- $det(A^t) = det(A)$

مثال :

لتكن المصفوفة $A \in \mathcal{M}_3(\ \ )$ معرفة كما يلي :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

احسب ^{t} ثم قم بحساب : $det(A)\ ,det(A^t)$

الحل :

$$A^t=\begin{pmatrix}0&1&-2\\2&0&1\\1&3&-1\end{pmatrix}$$

$$det(A)=\begin{vmatrix}0&2&1\\1&0&3\\-2&1&-1\end{vmatrix}\xrightarrow[C_2=C_2-2C_3]{}\begin{vmatrix}0&0&1\\1&-6&3\\-2&3&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-6\\-2&3\end{vmatrix}$$

$$=3-12=-9$$

$$det(A^t)=\begin{vmatrix}0&1&-2\\2&0&1\\1&3&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2&0\\1&3\end{vmatrix}=-(-2-1)-2.6$$

$$=3-12=9$$

$$det(A^t)=det(A)$$

- $det(A.B)=det(A).det(B)$

لتكن المصفوفتين :

$$A=\begin{pmatrix}1&a&0\\0&1&a\\a&0&1\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}-1&2&3\\1&0&-2\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

احسب : $det(A.B)\ ;det(A).det(B)$

ماذا تستنتج ؟

الحل :

$$A.B=\begin{pmatrix}1&a&0\\0&1&a\\a&0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1&2&3\\1&0&-2\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+a&2&3-2a\\1&0&-2-a\\-a&2a&3a-1\end{pmatrix}$$

$$det(A.B) = (-1+a)\begin{vmatrix} 0 & -2-a \\ 2a & 3a-1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -2-a \\ -a & 3a-1 \end{vmatrix}$$
$$+ (3-2a)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a & 2a \end{vmatrix}$$

$$= (-1+a)(2+a)(2a) - 2[(3a-1) - a(2+a)] + (3-2a)2a$$

$$det(A.B) = (2+a)[(-1+a)(2a) + 2a] - 2(3a-1) + (3-2a)2a$$

$$det(A.B) = 2a^2(2+a) - 2(3a-1) + (3-2a)2a$$

$$= 2a^3 + 4a^2 - 6a + 2 + 6a - 4a^2 = 2(a^3+1)$$

$$det(A.B) = 2(a^3+1)$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 1 \end{vmatrix}$$

$$det(A) = 1 + a^3$$

$$det(B) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2$$

$$det(A).det(B) = 2(1+a^3) = det(A.B)$$

نتيجة :

$$det(A).det(B) = det(A.B)$$

- $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$

مثال :

احسب معكوس المصفوفة التالية :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & m & -1\\ 1 & -1 & m\end{pmatrix}$$

احسب $det(A);\ \ det(A^{-1})$

ماذا تستنتج؟

الحل :

لكي يكون للمصفوفة A معكوس يجب ان يكون محدد المصفوفة A يختلف عن الصفر.

$$det(A)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & m & -1\\ 1 & -1 & m\end{vmatrix}\xrightarrow{L_3=L_3-L_1}\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & m & -1\\ 0 & -1 & m-1\end{vmatrix}\xrightarrow{L_3=L_3+\frac{1}{m}L_2}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & m & -1\\ 0 & 0 & m-1-\dfrac{1}{m}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & m & -1\\ 0 & 0 & \dfrac{m^2-m-1}{m}\end{vmatrix}$$

$$det(A)=m^2-m-1$$

اذن للبحث عن معكوس المصفوفة A نبحث عن قيم حل المعادلة :

$$det(A)=m^2-m-1\neq 0\Leftrightarrow m\neq\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

معكوس المصفوفة A :

$$A^{-1}=\frac{1}{det(A)}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}m & -1\\ -1 & m\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & m\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & m\\ 1 & -1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & m\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & m\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & 1\\ m & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & m\end{vmatrix}\end{pmatrix}^t$$

$$A^{-1}=\frac{1}{det(A)}\begin{pmatrix}m^2-1 & -1 & -m\\ -1 & m-1 & 1\\ -m & 1 & m\end{pmatrix}^t$$

$$A^{-1} = \frac{1}{m^2 - m - 1}\begin{pmatrix} m^2 - 1 & -1 & -m \\ -1 & m - 1 & 1 \\ -m & 1 & m \end{pmatrix}$$

$$det(A^{-1}) = \left|\frac{1}{m^2 - m - 1}\begin{pmatrix} m^2 - 1 & -1 & -m \\ -1 & m - 1 & 1 \\ -m & 1 & m \end{pmatrix}\right|$$

باستعمال طريقة Sarrus نجد :

$$\begin{vmatrix} m^2 - 1 & -1 & -m \\ -1 & m - 1 & 1 \\ -m & 1 & m \end{vmatrix} = (m^2 - m - 1)^2$$

$$det(A^{-1}) = \frac{(m^2 - m - 1)^2}{(m^2 - m - 1)^3} = \frac{1}{m^2 - m - 1}$$

نتيجة :

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

- $det(A + B) \neq det(A) + det(B)$

مثال :

$$A = B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A + B = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$|A + B| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 24 = -8$$

$$|A| + |B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2(4 - 6) = -4 \neq -8$$

اذن :

$$|A| + |B| \neq |A + B|$$

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A + B| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A| + |B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0$$

$$|A| + |B| \neq |A + B|$$

نضرية :

لتكن المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ اذن :

$$det(A^n) = [det(A)]^n$$

مثال :

لدينا المصفوفة :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

احسب $A^3; det(A^3); [det(A)]^3$

ماذا تستنتج؟

الخل :

$$A^3 = A^2.A$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -11 & 13 \\ 13 & -11 & 16 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^2.A=\begin{pmatrix}14 & -11 & 13\\ 13 & -11 & 16\\ -3 & 0 & -2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 5\\ 3 & -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -11 & 13\\ 13 & -22 & 16\\ -3 & 0 & -13\end{pmatrix}$$

حساب محدد المصفوفة A^3 :

$$det(A^3)=\begin{vmatrix}3 & -11 & 13\\ 13 & -22 & 16\\ -3 & 0 & -13\end{vmatrix}=\left|\begin{array}{ccc|cc}3 & -11 & 13 & 3 & -11\\ 13 & -22 & 16 & 13 & -22\\ -3 & 0 & -13 & -3 & 0\end{array}\right.$$

$$=3.(-22)(-13)+(-11)(16)(-3)-(13).(-22)(-3)-(-11)(13)(-13)$$

$$=858+528-858-1859=-1331$$

$$det(A^3)=-1331$$

حساب محدد المصفوفة A

$$det(A)=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 5\\ 3 & -3 & 2\end{vmatrix}\xrightarrow{\ L_2=L_2+2L_1\ }\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 11\\ 3 & -3 & 2\end{vmatrix}\xrightarrow{\ L_3=L_3+3L_1\ }$$

$$\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 11\\ 0 & 3 & 11\end{vmatrix}\xrightarrow{\ L_3=L_3-\frac{3}{4}L_2\ }\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 11\\ 0 & 0 & \frac{11}{4}\end{vmatrix}=-11$$

$$det(A)=-11$$

$$[det(A)]^3=(-11)^3=-1331$$

نتيجة :

$$det(A^3)=[det(A)]^3=-1331$$

محدد مجموعة من الاشعة (déterminant d’une famille de vecteurs) :

لتكن $\{U_1;\ U_2;\ \dots\dots\dots U_n\}$ جملة من الاشعة في الفضاء R^n محدد هذه الجملة هو محدد المصفوفة التي تكون عناصرها مشكلة من جملة الاشعة $\{U_1;\ U_2;\ \dots\dots\dots U_n\}$

خواص محدد جملة من الاشعة :

لتكن $\{U_1;\ U_2;\ \dots\dots\dots U_n\}$ جملة من الاشعة في الفضاء R^n اذا كان :

$$det(\{U_1;\ U_2;\ \dots\dots\dots U_n\}) = 0$$

اذن الجملة $\{U_1;\ U_2;\ \dots\dots\dots U_n\}$ مرتبطة خطيا

مثال :

لتكن جملة من الاشعة التالية :

$$S = \{u_1 = (7,1,2);\ u_2 = (2,-2,4);\ u_3 = (19;3,5)\}$$

ادرس الارتباط الخطي لهذه الجملة بطريقة المحدد .

الحل :

نعيد صياغة جملة الاشعة في شكل مصفوفة.

$$A = (u_1;\ u_2;\ u_3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 19 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 19 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

نلاحظ ان $\overrightarrow{L_1 = 3L_2 + 2L_3}$ اذن :

$$det(A) = 0$$

وعليه الجملة مرتبطة خطيا

اذا كان لدينا :

$$det(\{U_1;\ U_2;\ \dots\dots\dots U_n\}) \neq 0$$

اذن الجملة $\{U_1;\ U_2;\ \dots\dots\dots U_n\}$ تشكل اساس في الفضاء R^n

نتيجة :

كل مصفوفة تحتوي على سطرين او عمودين متمثلان (colinéaire) يكون محددها يساوي صفر.

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = 0$$

اذن اذا كان سطر او عمود في مصفوفة عناصره معدومة يكون محددها ذو قيمة صفر.

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = 0$$

لتكن المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ مصفوفة مربعة يمكن ان نستخرج عامل مشترك من احدى الاعمدة او الاسطر اذن :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \alpha |A|$$

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

اذا كانت المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ مصفوفة مربعة من الشكل :

$$A = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

اذن :

$$det(A) = \alpha^n |A|$$

مثال :

$$A = -2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \left| -2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \right| = (-2)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -8(3) = -24$$

العمليات على المحددات :

عملية التبديل بين الاسطر او الاعمدة تعكس اشارة المحدد

$$A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta a_{n1} & \cdots & \beta a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta a_{n1} & \cdots & \beta a_{nn} \end{vmatrix} \overrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_n} = - \begin{vmatrix} \beta a_{n1} & \cdots & \beta a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \end{vmatrix}$$

مثال :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ \sqrt{\mathbf{2}} & \sqrt{\mathbf{2}} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

$$det(A)=\begin{vmatrix}1 & 0 & -2\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 3\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}\xrightarrow{L_1\leftrightarrow L_3}=-\begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 3\\ 1 & 0 & -2\end{vmatrix}=-(\sqrt{2})$$

اي اضافة الى سطر او عمود لاتغير من قيمة المحدد اي :

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$det(A)=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\xrightarrow{L_1\leftrightarrow \alpha L_n}=\begin{vmatrix}\alpha a_{n1} & \cdots & \alpha a_{nn}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{11} & \cdots & a_{1n}\end{vmatrix}$$

مثال :

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 3\\ -\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 4\end{pmatrix}$$

$$det(A)=\begin{vmatrix}-3 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 3\\ -\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 4\end{vmatrix}\xrightarrow{L_1=L_2+L_1}\begin{vmatrix}-3 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ -\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 4\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3=L_3-\frac{\sqrt{3}}{3}L_1}\begin{vmatrix}-3 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & \frac{1}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3} & 4+\frac{\sqrt{3}}{3}\end{vmatrix}=-6\sqrt{3}-21$$

مثال2 :

احسب محدد المصفوفة التالية :

$$A=\begin{pmatrix}a & b & b & c\\ b & a & c & b\\ b & c & a & b\\ c & b & b & a\end{pmatrix}$$

الحل :

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b & b & c \\ b & a & c & b \\ b & c & a & b \\ c & b & b & a \end{vmatrix} \xrightarrow[C_1 = C_2 + C_3 + C_4]{} \begin{vmatrix} a+c+2b & b & b & c \\ a+c+2b & a & c & b \\ a+c+2b & c & a & b \\ a+c+2b & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+c+2b) \begin{vmatrix} 1 & b & b & c \\ 0 & a-b & c-b & b-c \\ 0 & c-b & a-b & b-c \\ 0 & 0 & 0 & a-c \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1 \\ L_4 = L_4 - L_1}]{}$$

$$= (a+c+2b) \begin{vmatrix} 1 & b & b & c \\ 0 & a-b & c-b & b-c \\ 0 & c-b & a-b & b-c \\ 0 & 0 & 0 & a-c \end{vmatrix}$$

$$= (a+c+2b) \begin{vmatrix} a-b & c-b & b-c \\ c-b & a-b & b-c \\ 0 & 0 & a-c \end{vmatrix}$$

$$= -(a+c+2b) \begin{vmatrix} 0 & 0 & a-c \\ c-b & a-b & b-c \\ a-b & c-b & b-c \end{vmatrix}$$

$$= -(a+c+2b)(a-c) \begin{vmatrix} c-b & a-b \\ a-b & c-b \end{vmatrix}$$

$$= -(a+c+2b)[(a-c)((c-b)^2 - (a-b)^2)]$$

$$= -(a+c+2b)[(a-c)(c^2 + b^2 - 2cb - a^2 - b^2 + 2ab)]$$

$$= -(a+c+2b)[(a-c)([c-a][c+a] - 2b[c-a])]$$

$$= -(a+c+2b)[a-c]^2[-[c+a] + 2b]$$

$$= (a+c+2b)[a-c]^2\big[[c+a] - 2b\big]$$

$$det(A) = (a+c+2b)[a-c]^2\big[[c+a] - 2b\big]$$

محدد مصفوفة متعامدة :

لتكن المصففوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ متعامدة بحيث :

$$A = B.B^t = B^t.B = I_n$$

اذن :

$$det(A) = 1$$

حساب المحدد بطريقة Sarrus :

مثال :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2b^2 & b^2 & 0 \\ 2b+c & b & c \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{det(A)} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2b^2 & b^2 & 0 \\ 2b+c & b & c \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2b^2 & b^2 & 0 & 2b^2 & b^2 \\ 2b+c & b & c & 2b+c & b \end{array} \right|$$

$$= \boldsymbol{2(cb^2) + 4b^3 - 4cb^2 - 4(cb^2) - 2(cb^2) - 4b^3}$$

$$\boldsymbol{det(A) = -8cb^2}$$

تحليل choleskey :

هذه الطريقة مقاربة لطريقةLU

اذا كانت المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ متناضرة و سائد قطريا اي عناصر القطر تكون اكبر قيمة في السطر :

$$A = A^t$$

$a_{ii} > a_{ij}$ هذه العلاقة محققة في نفس السطر

اذن يوجد مصفوفة مثلثية سفلية بحيث :

$$A = L.L^t$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ . & \cdots & \cdots & \cdots & . \\ . & & \ldots a_{ii} \ldots & & . \\ . & \cdots & \cdots & \cdots & . \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ . & \cdots & 0 & \cdots & . \\ . & \cdots & l_{ii} & \cdots & 0 \\ . & \cdots & \ldots & \cdots & . \\ l_{n1} & \cdot & . & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & l_{1n} \\ . & \cdots & \cdots & \cdots & . \\ 0 & \cdots & l_{ii} & \cdots & . \\ . & \cdots & \cdots & \cdots & . \\ 0 & \cdot & 0 & \cdot & l_{nn} \end{pmatrix}$$

اذن :

$$det(A) = det(L).det(L^t)$$

$$det(L) = det(L^t) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$det(A) = [det(L)]^2$$

مثال :

احسب محدد المصفوفة التالية باستعمال تفكيك Cholesky:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{25}{16} & \sqrt{\frac{25}{16}} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{4} & 5 & 2 \\ \frac{5}{2} & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

الحل :

لدينا :

$$A = A^t = \begin{pmatrix} \frac{25}{16} & \sqrt{\frac{25}{16}} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{4} & 5 & 2 \\ \frac{5}{2} & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

اذن :

$$A = L.L^t$$

$$\begin{pmatrix} \frac{25}{16} & \sqrt{\frac{25}{16}} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{4} & 5 & 2 \\ \frac{5}{2} & 2 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ 0 & l_{22} & l_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ 0 & l_{22} & l_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (l_{11})^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} \\ l_{11}l_{21} & (l_{21})^2 + (l_{22})^2 & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} \\ l_{11}l_{31} & l_{31}l_{21} + l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} & (l_{31})^2 + (l_{32})^2 + (l_{33})^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (l_{11})^2 = \frac{25}{16} \Leftrightarrow l_{11} = \frac{5}{4} \\ l_{11}l_{21} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow l_{21} = 1 \\ (l_{21})^2 + (l_{22})^2 = 5 \Leftrightarrow (l_{22})^2 = 5 - 1 \Leftrightarrow \ l_{22} = 2 \\ l_{11}l_{31} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow l_{31} = 2 \\ l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} = 2 \Leftrightarrow l_{31}l_{32} = 0 \\ (l_{31})^2 + (l_{32})^2 + (l_{33})^2 = 12 \Leftrightarrow l_{33} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

اذن :

$$\begin{pmatrix} \frac{25}{16} & \sqrt{\frac{25}{16}} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{4} & 5 & 2 \\ \frac{5}{2} & 2 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$det(A) = det(L).det(L^t) = \left(5.\sqrt{2}\right)^2 = 50$$

حساب المحدد بطريقة Gauss:

لتكن المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ لحساب محدد هذه المصفوفة طريقة الحذف ل Gauss تساعد في ايجاد المحدد من خلال تحويل المصفوفة A الى مصفوفة مثلثية علوية .

مثال :

احسب بطريقة Gauss محدد المصفوفة :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -5 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & -6 \\ 2 & 2 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -5 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & -6 \\ 2 & 2 & 3 & -7 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 - \frac{L_1}{4}} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -5 & 8 \\ 0 & \frac{13}{4} & \frac{19}{4} & -\frac{27}{4} \\ 2 & 2 & 3 & -7 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_4 = L_4 - \frac{L_1}{4}}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -5 & 8 \\ 0 & \frac{13}{4} & \frac{19}{4} & -\frac{27}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{17}{2} \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 + \frac{13L_2}{12}} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{23}{12} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{17}{2} \end{vmatrix} \xrightarrow{L_4 = L_4 + \frac{L_2}{6}}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{23}{12} \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{43}{6} \end{vmatrix} \xrightarrow{L_4 = L_4 + \frac{5L_3}{2}} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{23}{12} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{57}{24} \end{vmatrix} = 4(-3)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{57}{24}\right)$$

$$= -19$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -5 & 8 \\ 0 & -13 & -19 & 27 \\ 0 & -1 & -5 & 17 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_4 = L_2 - 3L_4} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -5 & 8 \\ 0 & -13 & -19 & 27 \\ 0 & 0 & 10 & -43 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 = 3L_3 - 13L_2}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & -23 \\ 0 & 0 & 10 & -43 \end{vmatrix} \xrightarrow[L_4 = L_4 - 10L_3]{} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{vmatrix} \xrightarrow[L_4 = L_4 - 15L_3]{}$$

مثال 2 :

احسب بطريقة Gauss محدد المصفوفة :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[L_3 = L_3 - 2L_1]{} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[L_3 = L_3 + \frac{L_2}{2}]{}$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} \end{vmatrix} = -2\left(-\frac{9}{2}\right) = 9$$

مبرهنة :

لتكن المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ بحيث A^{-1} موجودة اذن :

$$det(A.A^{-1}) = 1$$

برهان :

لدينا من خواص المصفوفات ان :

$$(A.A^{-1}) = I_n$$

$$det(I_n) = 1$$

$$det(A.A^{-1}) = det(A).det(A^{-1})$$

لدينا كذلك من خواص المحدد :

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

اذن :

$$det(A.A^{-1}) = det(A).det(A^{-1}) = det(A).\frac{1}{det(A)} = 1$$

محدد *Wronskian* :

لنفرض الدوال $f_1;\ f_2;\ \ldots\ldots f_n$ قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير x نسمي :

$$W = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & . & . & . & . & f_n \\ f'_1 & f'_2 & . & . & . & . & f'_n \\ . & . & . & \cdots & \cdots & \cdots & . \\ . & . & \cdots & f^i_i & \cdots & \cdots & . \\ . & . & \cdots & \cdots & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & \cdots & \cdots & . & . \\ f^n_1 & f^n_2 & . & . & . & . & f^n_n \end{vmatrix}$$

يسمى محدد *Wronskian* لدوال $f_1;\ f_2;\ \ldots\ldots f_n$ هدا المحدد ياكد لنا هل جملة الدوال $f_1;\ f_2;\ \ldots\ldots f_n$ مستقلة او مرتبطة خطيا بحيث :

$$\begin{cases} W(\ f_1;\ f_2;\ \ldots\ldots f_n) = 0\ \langle\ f_1;\ f_2;\ \ldots\ldots f_n\rangle \Leftrightarrow \text{مرتبطة خطيا} \\ W(\ f_1;\ f_2;\ \ldots\ldots f_n) \neq 0\ \langle\ f_1;\ f_2;\ \ldots\ldots f_n\rangle \Leftrightarrow \text{مستقلة خطيا} \end{cases}$$

مثال :

احسب محدد Wronskian لدوال الاتية :

$$W\{e^x;\ xe^x;\ (x+1)e^x\}$$
$$W\{\sin 2x;\ \cos 2x\}$$
$$W\{2^{x+1};\ 2^x\}$$

ماذا تستنتج ؟

الحل :

$$W\{e^x;\ xe^x;\ (x+1)e^x\} = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & (x+1)e^x \\ e^x & (1+x)e^x & (x+2)e^x \\ e^x & (2+x)e^x & (x+3)e^x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e^x & xe^x & (x+1)e^x \\ 0 & e^x & e^x \\ 0 & 2e^x & 2e^x \end{vmatrix} = e^x \begin{vmatrix} e^x & e^x \\ 2e^x & 2e^x \end{vmatrix} = 0$$

نتيجة :

$W\{e^x;\ xe^x;\ (x+1)e^x\} = 0$ اذن مجموعة الدوال $\{e^x;\ xe^x;\ (x+1)e^x\}$ مرتبطة خطيا

.

$$W\{\sin 2x;\ \cos 2x\} = \begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix} = -2\sin^2 2x - 2\cos^2 2x$$

$$= -2(sin^2 2x + cos^2 2x) = -2$$

نتيجة :

$W\{\sin 2x;\ \cos 2x\} = -2 \neq 0$ اذن جملة الدوال $\{\sin 2x;\ \cos 2x\}$ مستقلة خطيا

$$W\{2^{x+1};\ 2^x\} = \begin{vmatrix} 2^{x+1} & 2^x \\ 2^{x+1}.\ln 2 & 2^x.\,ln\,2 \end{vmatrix} = 2^x.\,ln\,2\,.\,2^{x+1} - 2^x.\,2^{x+1}.\,ln\,2 = 0$$

نتيجة :

$W\{\sin 2x;\ \cos 2x\} = 0$ اذن مجموعة الدوال $\{\sin 2x;\ \cos 2x\}$ مرتبطة خطيا.

حساب المحددات بعلاقة تراجعية :

مثال :

لتكن المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ المعرفة كما يلي :

$$A = \begin{pmatrix} a & c & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ b & a & c & \cdot & \cdot & . \\ 0 & b & a & \cdot & \cdot & . \\ . & 0 & b & \cdots & \cdot & . \\ . & . & . & \cdot & \cdots & c \\ 0 & . & . & \cdot & b & a \end{pmatrix}$$

احسب محدد $|A_{ij}|_n$

الحل :

$$|A|_n = \begin{vmatrix} a & c & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ b & a & c & \cdot & \cdot & . \\ 0 & b & a & \cdot & \cdot & . \\ . & 0 & b & \cdots & \cdot & . \\ . & . & . & \cdot & \cdots & c \\ 0 & . & . & \cdot & b & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & c & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ b & a & \cdot & \cdot & \cdot & . \\ 0 & b & \cdot & \cdot & \cdot & . \\ . & . & \cdot & \cdots & \cdot & . \\ . & . & \cdot & \cdot & \cdots & c \\ 0 & . & \cdot & \cdot & b & a \end{vmatrix}_{n-1} - c \begin{vmatrix} a & c & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ b & a & c & \cdot & \cdot & . \\ 0 & b & a & \cdot & \cdot & . \\ . & 0 & b & \cdots & \cdot & . \\ . & . & . & \cdot & \cdots & c \\ 0 & . & . & \cdot & b & a \end{vmatrix}$$

اشتقاق المحددات :

ليكن محدد المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ . & . & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & . \\ . & . & \cdots & a_{ii} & \cdots & \cdots & . \\ . & . & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & . \\ . & . & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

اذا كانت عناصر المصفوفة (a_{ij}) عبارة عن دوال ذات متغير واحد وعليه يمكن حساب مشتق محدد المصفوفة A و الذي يعطي بالدستور :

$$[det(A)]' = \frac{d\big(det(A)\big)}{dx} = \sum_{i=1}^{n} [det(A)]_i{}' = det(A)'_1 + det(A)'_2 + \ldots + det(A)'_n$$

حيث $det(A)'_i : i = 1,2 \ldots . n$ محدد اسطره (اعمدته) نفس اعمدة (اسطر) $det(A)$ ما عادا السطر (عمود) i اي :

$$[det(A)]' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a'_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ . & . & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & . \\ . & . & \cdots & a_{ii} & \cdots & \cdots & . \\ . & . & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & . \\ . & . & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a'_{2n} \\ . & . & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & . \\ . & . & \cdots & a_{ii} & \cdots & \cdots & . \\ . & . & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & . \\ . & . & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ . & . & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & . \\ . & . & \cdots & a_{ii} & \cdots & \cdots & . \\ . & . & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & . \\ . & . & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & . \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a'_{nn} \end{vmatrix}.$$

بحيث : a'_{ij} هو مشتق a_{ij} بانسبة لx

مثال :

لدينا المصفوفة :

$$A = \begin{pmatrix} e^x & \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & x & \sqrt{x+1} \\ \ln x^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

احسب $\left(det(A)\right)'$ بطريقتين مختلفين

الحل :

طريقة 1 :

$$det(A) = \begin{vmatrix} e^x & \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & x & \sqrt{x+1} \\ ln\, x^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = e^x \begin{vmatrix} x & \sqrt{+1} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{x} \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{x+1} \\ \ln x^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$det(A) = xe^x + \frac{\ln x^2 . \sqrt{x+1}}{x}$$

$$[det(A)]' = \left[xe^x + \frac{\ln x^2 . \sqrt{x+1}}{x}\right]'$$

$$= xe^x + e^x + \frac{2\sqrt{x+1} + \frac{x(\ln x^2)}{2\sqrt{x+1}} - \ln x^2 . \sqrt{x+1}}{x^2}$$

$$= xe^x + e^x + \frac{4(x+1) + x(\ln x^2) - 2\ln x^2 . (x+1)}{2x^2\sqrt{x+1}}$$

$$= xe^x + e^x + \frac{4x + 4 - x(\ln x^2) - 2\ln x^2}{2x^2\sqrt{x+1}}$$

$$[det(A)]' = xe^x + e^x + \frac{4x + 4 - x(\ln x^2) - 2\ln x^2}{2x^2\sqrt{x+1}}$$

طريقة2 :

$$[det(A)]' = \begin{vmatrix} e^x & -\frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & x & \sqrt{x+1} \\ \ln x^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e^x & \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \\ \ln x^2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} e^x & \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & x & \sqrt{x+1} \\ \frac{2}{x} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= xe^x - \frac{\sqrt{x+1}. \ln x^2}{x^2} + e^x + \frac{\ln x^2}{2x\sqrt{x+1}} + \frac{2\sqrt{x+1}}{x^2}$$

$$= xe^x + e^x - \frac{2(x+1). \ln x^2}{2x^2\sqrt{x+1}} + \frac{x \ln x^2}{2x^2\sqrt{x+1}} + \frac{4(x+1)}{2x^2\sqrt{x+1}}$$

$$= xe^x + e^x + \frac{-x\ln x^2 - 2\ln x^2 + 4(x+1)}{2x^2\sqrt{x+1}}$$

$$[det(A)]' = xe^x + e^x + \frac{-xln\, x^2 - 2\, ln\, x^2 + 4(x+1)}{2x^2\sqrt{x+1}}$$