المصفوفات:

1. **تعريف المصفوفة**
2. **المصفوفة المرفقة بتطبيق خطي**
3. **عمليات على المصفوفات**
4. **المحددات**
5. **حساب مقلوب مصفوفة**

تعريف:

المصفوفة هي عبارة عن جدول من الاعداد الحقيقية R او الاعداد المركبة $\mathbb{C}$, ولكن سنقتصر في درستنا على الاعداد الحقيقية فقط مرتب في n سطر و m عمود نرمز لها بالرمز :

$A \in \mathcal{M}_{(n,m)} \in R$ بحيث a_{ij} تمثل عناصر المصفوفة A اذن يمكن تمثيل المصوفة عن طريق الجدول التالي :

$$\mathrm{A}_{(n,m)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} A = a_{ij} \;\; 1 \leq i \leq n \,; 1 \leq j \leq m$$

ويمكن ان نرمز لها باختصارب :

$$A = [a_{ij}] \quad ; \; A = [a_{ij}]_{\,n,m}$$

درجة المصفوفة :

اذا كان للمصفوفة n سطر و m عمود نقول ان المصفوفة من الدرجة $n \times m$ واذا كان $n = m$ نقول ان المصفوفة من الدرجة n

انواع المصفوفات (types de matrices) :

مصفوفة سطر (Matrice ligne) :

تسمى المصفوفة التي من الشكل $1 \times m$ بمصفوفة سطر اذن :

$$si\ n = 1: A_{1,m} = (a_{11}, a_{12}, \dots \dots . . a_{1m})$$

مثال :

$$A_{(1,4)} = (1\ 2 - 3\ 0)$$

مصفوفة عمود (Matrice collone) *:*

تسمى المصفوفة التي من الشكل $n \times 1$ بمصفوفة عمود اذن :

$$si\ m = 1: A_{n,1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

مصفوفة معدومة (matrice nulle) :

المصفوفة المعدومة هي المصفوفة التي تكون جميع عناصرها معدومة اي تاخذ الشكل التالي :

$$\boldsymbol{A_{n,m}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$si\ a_{ij} = 0\ \ \forall i\ et\ \forall j$$

مصفوفة مربعة (matrice carrée) :

اذا كان $n = m$ نقول ان المصفوفة A مربعة من الدرجة n و نرمز لها :

$$A_n \in \mathcal{M}_n(R)$$

ترفق بالكل مصفوفة مربعة بما يسمى المحدد .

منقولة مصفوفة (matrice transposé) :

كل مصفوفة تقبل مصفوفة منقولة لها و نرمز لها A^t بحيث :

$$A^t = B\ \Leftrightarrow b_{ij} = a_{ji}$$

مثال :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

خواص:

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

$$(A.B)^t = A^t.B^t$$

$$[A^t]^t = A$$

المصفوفة القطرية (matrice diagonale) :

لتكن المصفوفة $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة اذا كان :

$$A = \begin{cases} a_{ij} = 0 & si\ i \neq j \\ a_{ii} \neq 0 & si\ i = j \end{cases}$$

وعليه يكون شكل المصفوفة القطرية :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdot & \cdot & . \\ . & . & a_{ii} & \cdot & . \\ . & . & . & a_{ii} & . \\ 0 & . & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$

مثال :

$$\mathrm{C}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

خاصية :

محدد المصفوفة القطرية يكون بالشكل :

$$det(A)=\prod_{i=1}^{n} a_{ii}=a_{11}.a_{22}\ldots..a_{nn}$$

المصفوفة الاحادية (matrice d'identité) :

اذا تساوت جميع عناصر القطر الرئيسي (diagonale principale) في المصفوفة القطرية للقيمة 1 نقول ان المصفوفة احادية ونرمز لها : I

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0\ldots\ldots 1 & & \cdot & \cdot & . \\ . & . & \ldots\ldots.1 & \cdot & . \\ . & . & . & \ldots..1 & . \\ 0 & . & \cdot & \cdot & \ldots\ldots 1 \end{pmatrix}$$

اي :

$$a_{ij}=\begin{cases} 1\,; si\ i=j \\ 0\,; si\ i\neq j \end{cases}$$

مثال :

$$I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ldots\ldots\ldots$$

خاصية :

محدد المصفوفة الاحادية يساوي للقيمة 1

$$det(I)=1$$

$$I_n.A_{nm} = A_{nm}$$

مصفوفة سلمية :

المصفوفة السلمية هي مصفوفة قطرية التي تتساوى فيها جميع عاصر القطر الرئيسي وتكون مختلفة للواحد وتكون بالشكل :

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \dots\dots k & \cdot & \cdot & . \\ \cdot & . & \dots\dots.k & \cdot & . \\ \cdot & . & . & \dots..k & . \\ \cdot & . & \cdot & \cdot & \dots\dots k \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{cases} a_{ij} = 0 & si\ i \neq j \\ a_{ii} = k \neq 1 & si\ i = j \end{cases}$$

ويمكن كتابة مصفوفة السلمية بدلالة مصفوفة الوحدة :

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \dots\dots k & \cdot & \cdot & . \\ \cdot & . & \dots\dots.k & \cdot & . \\ \cdot & . & . & \dots..k & . \\ \cdot & . & \cdot & \cdot & \dots\dots k \\ 0 & & & & \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \dots\dots 1 & \cdot & \cdot & . \\ \cdot & . & \dots\dots.1 & \cdot & . \\ \cdot & . & . & \dots..1 & . \\ \cdot & . & \cdot & \cdot & \dots\dots 1 \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

$$A = kI_n$$

مصفوفة مثلثية علوية (matrice triangulaire supérieure) :

اذا كانت جميع العناصر الواقعة فوق القطر الرئيسي مساوية للصفر و تكون بالشكل التالي :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

مثال :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

مصفوفة مثلثية سفلية (matrice triangulaire inférieure) :

اذا كانت جميع العناصر الواقعة تحت القطر الرئيسي مساوية للصفر و تكون بالشكل التالي :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

مصفوفة متناضرة (matrice symétrique) :

لتكن المصفوفة $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة نقول عنها انها متناضرة اذا كانت :

$$A = A^t \iff a_{ij} = a_{ji}$$

مصفوفة شاذة (matrice singulière) :

لتكن المصفوفة $A \in \mathcal{M}_{(n,m)}(R)$ التي من خصائصها ان محددها معدوم اذن :

$$det(A) = |A_n| = 0$$

مصفوفة نضامية (marice riguliѐre) :

لتكن المصفوفة $A \in \mathcal{M}_{(n,m)}(R)$ التي من خصائصها ان محددها غيرمعدوم اذن :

$$det(A) = |A_n| \neq 0$$

اثر المصفوفة (trace de'une matrice) :

لتكن المصفوفة $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة اثرها هو مجموع عناصر القطر الرئيسي اي :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

العمليات على المصفوفات (les opérations sur les matrices) :

تساوي مصفوفتين :

لدينا المصفوفة $A = [a_{ij}]_{n,m}$ و المصفوفة $B = [b_{ij}]_{n,m}$ نقول ان المصفوفتين متساويتين اذا كان :

$$A = B \iff \begin{cases} A; B \in \mathcal{M}_{n,m}(R) \\ a_{ij} = b_{ij} \ \forall i = 1 \ldots\ldots n \ ; \ \forall j = 1 \ldots . m \end{cases}$$

جمع مصفوفتين :

لدينا المصفوفة $A = [a_{ij}]_{n,m}$ و المصفوفة $B = [b_{ij}]_{n,m}$ نقول ان المصفوفة $C = [c_{ij}]_{n,m}$ جمع المصفوفتين $A \ et \ B$ اذا كان :

$$C = A + B \iff \begin{cases} C \in \mathcal{M}_{n,m}(R) \\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ \forall i = 1 \ldots\ldots n \ ; \ \forall j = 1 \ldots . m \end{cases}$$

خواص جمع المصفوفات :

- خاصية التجميعية : $(A + B) + C = A + (B + C)$

مثال :

$$(A+B)+C=\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\4&4\end{pmatrix}$$

$$(B+C)=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$$

$$A+(B+C)=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\4&4\end{pmatrix}$$

اذن : $(A+B)+C=A+(B+C)$

- خاصية تبديلية : $A+B=B+A$

مثال :

$$A_{(2)}=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\qquad B_{(2)}=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\quad C_{(2)}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}$$

$$B+A=\left[\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\right]+\left[\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}$$

اذن : $A+B=B+A$

- جمع مصفوفة مثلثية علويه مع مصفوفة مثاثية علوية هي مصفوفة مثلية علوية.

مثال :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&11\\0&0&3\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}-1&3&5\\0&-3&1\\0&0&-5\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}0&5&8\\0&-1&12\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

- جمع مصفوفة مثلثية سفلية مع مصفوفة مثاثية سفلية هي مصفوفة مثلية سفلية.

مثال :

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\4&6&0\\6&4&2\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}3&0&0\\5&9&0\\7&3&5\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}5&0&0\\9&15&0\\19&7&7\end{pmatrix}$$

- المصفوفة الصفرية $[0]_{n,m}$ عنصر حيادي بانسبة لعملية الجمع

- $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
- $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$
- $\alpha(\beta A)=(\alpha.\beta)A$

عملية الضرب :

عملية الضرب بالنسبة للمصفوفات$\left(\mathrm{B}_{p,m}\right).\left(\mathrm{A}_{n,p}\right)$ يكون بتحقق الشرط التالي:

عدد اعمدة المصفوفة $\left(\mathrm{A}_{n,p}\right)$ (p) يساوي عدد اسطر المصفوفة $\left(\mathrm{B}_{p,m}\right)$ (p)

اذا كانت المصفوفة A ذات الرتبة (m,n) و المصفوفةB ذات الرتبة (n,p) اذن المصفوفة $\mathrm{A.B}$ هي من الرتبة (m,p)

اذن :

$$A\in\mathcal{M}_{n,p}(R);\quad B\in\mathcal{M}_{p,m}(R)$$

$$C=A.B=\begin{cases}C\in\mathcal{M}_{n,m}(R)\\ C_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}\end{cases}$$

مثال :

لدينا المصفوفتين :

$$A=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&-3\end{pmatrix};D=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

احسب $A.B;\ \ C.D$

الحل :

$$A.B=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$C.D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ -1 & -3 & -3\end{pmatrix}$$

خواص ضرب المصفوفات :

- $\mathrm{A}.(B.C)=(A.B).C$

مثال :

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 9 & 0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}2 & 1\\ 9 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -9 & -9\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -7 & -13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -7 & -13\end{pmatrix}$$

- $\mathrm{A}.(B+C)=(A.B)+(A.C)$

مثال :

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{2} & -2 & -6\\ \frac{1}{2} & 3 & 9\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{2} & -2 & -6\\ \frac{1}{2} & 3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$=\left[\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{2} & -2 & -6\\ \frac{1}{2} & 3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 0\end{pmatrix}\right]+\left[\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{2} & -2 & -6\\ \frac{1}{2} & 3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}3\\ \frac{1}{2}-6\\ \frac{1}{2}+9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\ \frac{1}{2}+6\\ \frac{1}{2}-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

- $(\mathbf{A}+B).(C)=(A.C)+(B.C)$

مثال :

لدينا :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix};C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

احسب : $[A+B].C;\ \ ([A.C]+[B.C])$

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]+\left[\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

- **ضرب مصفوفة مثلثية علوية $\times$ مصفوفة مثلثية علوية هي عبارة عن مصفوفة مثلثية علوية**

مثال :

لدينا :

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 4\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}\ ;B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & -2 & -7\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

احسب $A.B$

الحل :

$$A.B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 4\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & -2 & -7\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -3 & 4\\ 0 & -4 & -16\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

- **ضرب مصفوفة مثلثية سفلية $\times$ مصفوفة مثلثية سفلية هي عبارة عن مصفوفة مثلثية سفلية**

مثال :

لدينا :

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -3 & 2 & 0\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix}\ ;B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

احسب $A.B$

$$A.B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -3 & 2 & 0\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -4 & 0\\ 7 & -4 & 1\end{pmatrix}$$

ملاحضة:

بالصفة عامة ضرب المصفوفات ليس تبديلي معناه:

$$A.B \neq B.A$$

حالة خاصة :

اذا كانت المصفوفة $A \in \mathcal{M}_{(n)}(R)$ ولدينا مصفوفة الوحدة I_n اذن :

$$I_n.A = A.I_n$$

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ملاحضة :

ضرب مصفوفتان غير صفريتيين يمكن ان نحصل على مصفوفة صفرية

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

اذن :

$$A.B = 0 \nRightarrow A = 0 \; ou \; B = 0$$

اذا كانت A مصفوفة مربعة و كان k عددا صحيحا غير سالب اذن :

$$A^0 = I$$

$$A^k.A = A^{k+1}$$

مثال :

ليكن المصفوفة $A \in \mathcal{M}_3(\quad)$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

احسب A^n

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3.A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (2)^n \end{pmatrix}$$

خاصية :

لتكن المصفوفتان : ; $B \in \mathcal{M}_n(\quad)$; $A \in \mathcal{M}_n(\quad)$ بحيث : $A.B = B.A$

اذن :

$$(A+B)^p = \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{k} . A^{p-k} . B^k$$

قسمة مصفوفات :

رتبة مصفوفة (rang d'une matrice) :

رتبة مصفوفة $A \in \mathcal{M}_{(n,m)}(R)$ هو عدد الاسطر او الاعمدة المستقلة خطيا .

$$1 \leq rg(A) \leq Min(n, m)$$

مثال :

اوجد رتبة المصفوفة التالية :

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ \sqrt{2} & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

نلاحظ ان :

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ \sqrt{2} & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 = L_1 + L_3]{L_1 = \sqrt{2} L_2}$$

اذن : $rg(A) = 2$

طريقة المحدد :

رتبة مصفوفة $A \in \mathcal{M}_{(n)}(R)$ $rg(A) = n$ اذا كان :

$$det(A) \neq 0 \iff 1 \leq rg(A) = n$$

و تكون رتبة المصفوفة $A \in \mathcal{M}_{(n)}(R)$ $rg(A) = n - 1$ اذا كان :

$$det(A) = 0 \quad \Leftrightarrow 1 \leq rg(A) \leq n-1$$

و لمعرفة رتبة المصفوفة في هذه الحالة نحسب المحددات الجزئية من الرتبة $n-1$ ان وجد على الاقل محدد جزئي غير معدوم اذن الرتبة هي $(n-1)$

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & 3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & -e^2 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & 3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & -e^2 \end{vmatrix} = 0$$

اذن :

$$1 \leq rg(A) \leq 2$$

وعليه نحسب محدد المصفوفة A من الدرجة 2 اذن :

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -e^2 \end{vmatrix} = e^2 - 3 \neq 0$$

$$rg(A) = 2$$

رتبة مصفوفة بطريقة Gauss او المصفوفة المختزلة (échelonnée) :

تستعمل هذه الطريقة في المصفوفة المربعة او من الدرجة $(n \times m)$

ورتبة المصفوفة هو عدد العناصر التي توجد في القطر الرئيسي ولا لاتساوي الصفر

مثال :

المصفوفات التالية :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

احسب رتبة المصفوفات A ,B ,C بطريقة Gauss

الحل :

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&4\end{pmatrix}\xrightarrow[L_3=L_3-L_1]{L_2=L_2-L_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3=L_3-2L_2}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$rg(A)=3$$

$$B=\begin{pmatrix}2&3\\4&1\\2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{L_2=L_2-2L_1}\begin{pmatrix}2&3\\0&-5\\2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3=L_3-L_1}\begin{pmatrix}2&3\\0&-5\\0&-3\end{pmatrix}$$

$$\langle(2;\ -5)\neq 0\rangle\Leftrightarrow rg(B)=2$$

$$C=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{L_2=L_2-L_1}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\langle(2\neq 0;\ 0=0)\rangle\Leftrightarrow rg(C)=1$$

المصفوفة المرافقة لتطبيق خطي :

1. المصفوفة المعكوسة (matrice inversible) :

لتكن $A\in\mathcal{M}_n\in(K)$ مصفوفة مربعة من الدرجة n نقول ان المصفوفة B معكوس (inverse) للمصفوفة A اذا كانت المصفوفة $B\in\mathcal{M}_n\in(K)$ مربعة و من الدرجة n تحقق :

$$A.B=B.A=I$$

في هذه الحالة نقول ان المصفوفة A قابلة للعكس. ونرمز لمعكوس المصفوفة بالرمز A^{-1}

نضرية :

يكون للمصوفة المربعة معكوس واحد على الاكثر.

اذن لتكن $A\in\mathcal{M}_n\in(K)$ مصفوفة مربعة من الدرجة n ونضامية :

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$det(A)\neq 0$$

ملاحضة :

اذا قبلت المصفوفة $A\in\mathcal{M}_n(R)$ مصفوفة معكوسة فهي وحيدة.

تكون المصفوفة $A\in\mathcal{M}_n(R)$ قالبة للعكس اذا كان :

- $det(A)\neq 0$
- 0 ليس قيمة ذاتية للمصفوفة $A\in\mathcal{M}_n(R)$

مثال :

خواص المصفوفة المعكوسة :

- معكوس مصفوفة الوحدة هي نفسها $I^{-1} = I$
- اذا كان للمصفوفة A معكوس ا فان للمصفوفة A^{-1} معكوس ولدينا :

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

- اذا كان للمصفوفة $\mathrm{A}, et\ \ B$ معكوس فان للمصفوفة $A.B$ معكوس :

$$(A.B)^{-1} = A^{-1}.B^{-1}$$

- اذا كان للمصفوفة A معكوس ا فان للمصفوفة A^k معكوس ولدينا :

$$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$$

- اذا كان للمصفوفة A معكوس و كان $r \in R; r \neq 0$ ا فان للمصفوفة rA معكوس ولدينا :

$$(rA)^{-1} = \frac{1}{r}A^{-1}$$

- اذا كان للمصفوفة A معكوس فان النضام الخطي يقبل حل وحيد يكون من الشكل :

$$X = A^{-1}.b$$

ملاحضة :

اذا كان

$$det(A) = 0$$

المصفوفة A لا تقبل معكوس.

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ \ln e^2 & \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$det(A) = 2\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ln\, e^2 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} ln\, e^2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$det(A) = 0$$

المحدد معدوم اذن المصفوفة A لا تقبل معكوس لها.

حساب معكوس مصفوفة (calcule de matrice inversible) :

لحساب معكوس مصفوفة نتبع الخطوات الاتية :

طريقة المحدد :

نحسب محدد المصفوفة : $det(A)$

نحسب مرافق المصفوفة $com(A)$ (comatrice) :

$$com(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C_{11}} & \cdots & \boldsymbol{C_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{C_{n1}} & \cdots & \boldsymbol{C_{nn}} \end{pmatrix}$$

بحيث :

المعاملا المرافقة $C_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$

المحددات الجزئية D_{ij}

نحسب منقول المصفوفة المرافقة :

$$com(A)^t = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

النتيجة :

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{det(A)} com(A)^t}$$

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

نحسب المحدد :

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\left(2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) = 6$$

$$det(A) = 6 \neq 0$$

اذن المصفوفة A تقبل معكوس لها.

خطوة 2 :

نبحث عن المصفوفة المرافقة ل: A

$$com(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$com(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

خطوة 3 :

نبحث عن منقول مصفوفة المرافقة :

$$[com(A)]^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

خطوة 4 :

حساب منقول مصفوفة :

$$A^{-1} = \frac{[com(A)]^t}{det(A)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

التاكد من صحة النتيجة :

$$\boldsymbol{A.A^{-1} = I_3}$$

$$A.A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}.A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

طريقة Gauss :

لايجاد معكوس مصفوفة بطريقة Gauss نتبع الخطوات الاتية :

خطوة 1:

نقوم بتشكيل المصفوفة الموسعة (matrice augmentée) والتي هي عبارة عن المصفوفة المراد البحث عن معكوسها مع مصفوفة الوحدة بالشكل التالي :

$$(A/I) = \left(\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{matrix}\middle| \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right)$$

خطوة 2 :

نقوم ببعض العمليات الاولية على المصفوفة الموسعة بحيث تصبح من الشكل :

$$(I/A^{-1})=\left(\begin{matrix}1&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&1\end{matrix}\middle|\begin{pmatrix}a_{11}{}^{*}&\cdots&a_{1n}{}^{*}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}{}^{*}&\cdots&a_{11}{}^{*}\end{pmatrix}\right)$$

مثال :

اوجدمعكوس المصفوفة A باستعمال طريقةGauss

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&4\end{pmatrix}$$

خطوة 1 :

حساب المحدد :

$$det(A)\neq 0$$

خطوة 2 :

تشكيل المصفوفة الموسعة :

$$(A|I)=\left(\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&4\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$(A|I)$$

$$=\left(\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&4\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)\xrightarrow{L_2=L_2-L_1}\left(\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\1&3&4\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$=\xrightarrow{L_3=L_3-L_1}\left(\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&2&3\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$=\xrightarrow{L_3=L_3-2L_2}\left(\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-2&1\end{pmatrix}\right)$$

$$=\xrightarrow{L_3=-L_3}\left(\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&2&-1\end{pmatrix}\right)$$

$$=\xrightarrow{L_2=L_2-2L_3}\left(\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-3&2\\-1&2&-1\end{pmatrix}\right)$$

$$= \xrightarrow{L_1 = L_1 - L_3} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \xrightarrow{L_1 = L_1 - L_2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

اذن :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

التاكد من صحة النتيجة :

$$A.A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

خطوة 1 :

حساب المحدد :

$$det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3$$

$$det(A) = -3 \neq 0$$

اذن المصفوفة A تقبل معكوس لها.

خطوة 2 :

تشكيل المصفوفة الموسعة :

$$(A|I) = \left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$(A|I)=\left(\begin{pmatrix}-2 & 1 & -2\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\xrightarrow{L_1=L_1-L_3}$$

$$=\left(\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\xrightarrow{L_2=L_3-L_2}$$

$$=\left(\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)\xrightarrow{L_3=L_3-L_1}$$

$$=\left(\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\right)\xrightarrow{L_2=L_3-2L_2}$$

$$=\left(\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\right)\xrightarrow[L_2=-\frac{L_2}{3}]{L_1=-L_1}$$

$$=\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\right)\xrightarrow{L_3=L_3-L_2}$$

$$=\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0\\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 2\end{pmatrix}\right)\xrightarrow{L_3=-\frac{L_3}{2}}$$

$$=\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1\end{pmatrix}\right)\xrightarrow{L_3=-\frac{L_3}{2}}$$

اذن :

$$A^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3 & 0 & -3\\ -1 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

تاكد من صحة النتيجة :

$$A.A^{-1}=I_3$$

$$A.A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = I_3$$