

Chapitre 2 : Système de numération



Les **systèmes de numération** sont des méthodes utilisées pour représenter et manipuler les nombres. Ils sont essentiels dans de nombreux domaines, tels que les mathématiques, l'informatique, l'ingénierie et bien d'autres. Les systèmes de numération fournissent un cadre structuré pour exprimer des quantités et des valeurs de manière compréhensible et cohérente.*

Il existe différents systèmes de numération utilisés à travers le monde, mais les plus couramment utilisés sont le système décimal, le système binaire, le système octal et le système hexadécimal. Chacun de ces systèmes a ses propres règles et caractéristiques uniques pour représenter les nombres.

1. Codage de l'information

Quelle que soit la nature de l'information traitée par un ordinateur (image, son, texte, vidéo), elle l'est toujours sous la forme d'un ensemble de nombres écrits en base 2*, par exemple 01001011. Le terme **bit*** (**b** minuscule dans les notations) signifie « **binary digit** », c'est-à-dire **0 ou 1** en numérotation binaire. Il s'agit de la plus petite unité d'information manipulable par une machine numérique. Il est possible de représenter physiquement cette information binaire par un signal électrique ou magnétique, qui, au-delà d'un certain seuil, correspond à la valeur 1.

L'**octet** (**en anglais byte ou B majuscule dans les notations**) est une unité d'information composée de 8 bits. Il permet par exemple de stocker un caractère comme une lettre ou un chiffre. Une unité d'information composée de 16 bits est généralement appelée mot (**en anglais word**). Une **unité d'information de 32 bits de longueur** est appelée mot double (**en anglais double word, dword**). Beaucoup d'informaticiens ont appris que 1 kilooctet valait 1024 octets, mais en décembre 1998, l'organisme international IEC a statué sur la question¹.

Les unités standardisées ^{*(5)}¹

- Un kilooctet (Ko) = 10^3 octets
- Un mégaoctet (Mo) = 10^6 octets
- Un gigaoctet (Go) = 10^9 octets
- Un téraoctet (To) = 10^{12} octets
- Un pétaoctet (Po) = 10^{15} octets
- Un exaoctet (Eo) = 10^{18} octets
- Un zettaoctet (Zo) = 10^{21} octets
- Un yottaoctet (Yo) = 10^{24} octets
- Un ronnaoctet (Ro) = 10^{27} octets
- Un quettaoctet (Qo) = 10^{30} octets

¹ <https://www.bipm.org/>.

Différents systèmes de codage


Fondamental

Il existe quatre systèmes de numération qui sont ⁽⁶⁾¹:

- **Système décimal ;**
- **Système binaire ;**
- **Système octal ;**
- **Système hexadécimal.**

2. Les bases décimale, binaire et hexadécimale

Les bases décimale, binaire et hexadécimale :


Fondamental

Nous utilisons le système décimal (base 10) dans nos activités quotidiennes. Ce système est basé sur dix symboles, de 0 à 9, avec une unité supérieure (dizaine, centaine, etc.) à chaque fois que dix unités sont comptabilisées. C'est un système positionnel, c'est-à-dire que l'endroit où se trouve le symbole définit sa valeur.

*En informatique, outre la base 10, on utilise très fréquemment le système binaire (base 2) puisque l'algèbre booléenne est à la base de l'électronique numérique. Deux symboles suffisent : 0 et 1. On utilise aussi très souvent le système octal (base 8) ou hexadécimal (base 16) du fait de sa simplicité d'utilisation et de représentation pour les mots machines (il est bien plus simple d'utilisation que le binaire).**

Base décimal


Définition

C'est un système utilisé dans le monde extérieur, les chiffres utilisés sont des entiers composés par des valeurs de 0 à 9. La base de ce système est 10.

Exemple

1995 : ce nombre s'écrit dans le système à base 10 sous la forme :

$$1 * 10^3 + 9 * 10^2 + 9 * 10^1 + 5 * 10^0$$

Base binaire


Définition

C'est le système qui est utilisé par la machine (l'ordinateur), il est composé seulement par des suites binaires (1 et 0). La base de ce système est 2.

Exemple

1001101 : la valeur décimale de cette suite est :

$$1 * 2^6 + 0 * 2^5 + 0 * 2^4 + 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = 77$$

Chaque chiffre binaire (0 ou 1) est appelé bit qu'on note par b, et toutes combinaisons binaires composées de huit bits est appelée Octet.

Base octal


Définition

Certains calculateurs numériques utilisent le système octal qui est un système de numération dont la base 8.

¹ Code: The Hidden Language of Computer Hardware and Software" par Charles Petzold - Ce livre explique les principes de base de l'informatique, y compris le codage binaire, de manière accessible et ludique.

On dispose de huit symboles pour représenter un nombre dans le système octal. Ce sont les chiffres successifs allant de 0 à 7. Chaque chiffre d'un nombre octal a une pondération égale à la valeur du chiffre multipliée par la puissance de 8 correspondant au rang qu'il occupe dans le nombre.

Base hexadécimal



Ce système est utilisé sur la plupart des nouveaux calculateurs numériques. Sa base est égale à 16. On dispose de 16 symboles pour représenter un nombre hexadécimal. Ces symboles sont les 10 digits du système décimal auxquels on a ajouté les 6 premières lettres de l'alphabet. Les 16 symboles sont alors :

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F.

Chaque signe d'un nombre hexadécimal a une pondération qui s'obtient en multipliant la valeur numérique du symbole par la puissance de 16 correspondant au rang qu'il occupe dans le nombre.

3. Conversion d'un nombre décimal vers une autre base B : (codage)

Conversion d'un nombre décimal vers une autre base B : (codage)

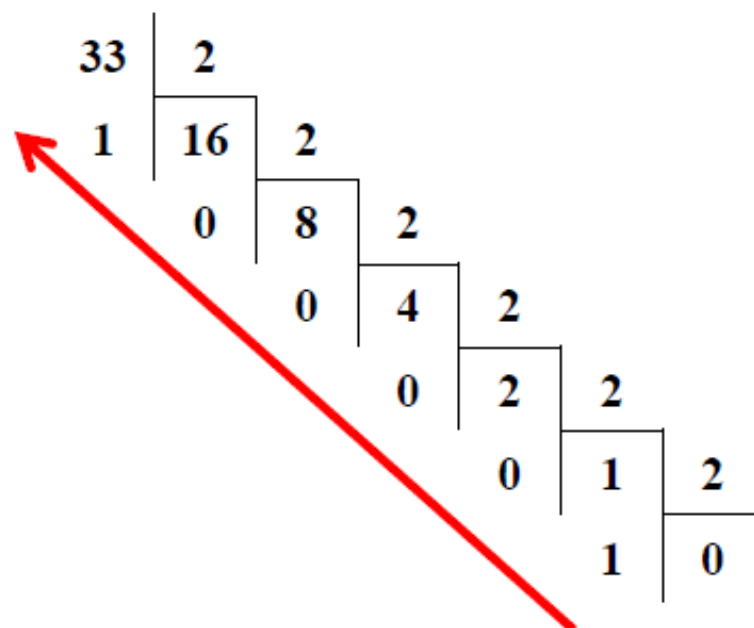
Pour convertir un nombre décimal entier en un nombre de base B quelconque, il faut faire des divisions entières successives par la base B et conserver à chaque fois le reste de la division. On s'arrête jusqu'au moment où le quotient devient nul. Le nombre cherché sera obtenu en regroupant tous les restes successifs de droite à gauche

Conversion de nombre 10 en binaire :



Pour convertir (33) un nombre décimal en un nombre binaire, diviser continûment le nombre décimal par la valeur 2, retenir la suite des restes de chaque division en commençant de bas en haut pour avoir le nombre équivalent.

$$(33)_{(10)} = (100001)_{(2)}$$



Conversion décimal au Binaire

4. Conversion d'un nombre N de base B en un nombre décimal (décodage)

Décodage



Définition

La valeur décimale d'un nombre N , écrit dans une base B , s'obtient par sa forme polynomiale décrite précédemment. Pour les conversions Binaire – décimal / octal – décimal / hexadécimal – décimal, Il suffit de multiplier chaque bit ou chiffre ou digit par son poids correspondant puis de faire la somme des résultats obtenus.*

Exemple



Exemple

$$(1011)_2 = (?)_{10}$$

$$(1011)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 2 + 1 = 11 = (11)_{10}.$$

$$(234)_8 = (?)_{10}$$

$$(234)_8 = 2 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 = 128 + 24 + 4 = 156 = (156)_{10}.$$

$$(3C7)_{16} = (N)_{10}$$

$$(3C7)_{16} = 3 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 7 \cdot 16^0 = 768 + 192 + 7 = 967 = (967)_{10}.$$

5. Conversion d'un nombre décimal à virgule

Conversion d'un nombre décimal à virgule

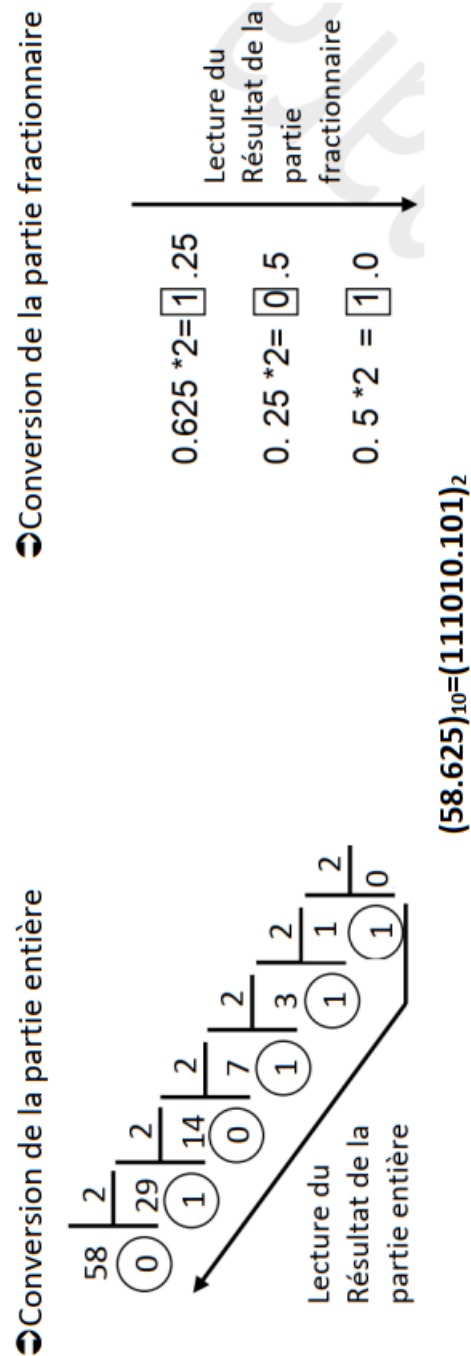
Pour convertir un nombre **décimal à virgule** dans une base B quelconque, il faut :

- Convertir la partie entière en effectuant des divisions successives par B (comme nous l'avons vu précédemment).
- Convertir la partie fractionnaire en effectuant des multiplications successives par B et en conservant à chaque fois le chiffre devenant entier.
- Parfois en multipliant la partie fractionnaire par la base B on n'arrive pas à convertir toute la partie fractionnaire. Ceci est dû essentiellement au fait que le nombre à convertir n'a pas un équivalent exact dans la base B et sa partie fractionnaire est cyclique.

Exemple



Conversion du nombre (58,625) en base 2.



Conversion d'un nombre décimal avec virgule

6. Exercices

Exercice 1 : Codage

[solution n°9 p. 49]

Quelle est la valeur décimale du nombre binaire 1101 ?

- ☐ 5
 - ☐ 9
 - ☐ 13

Exercice 2 : Codage

[solution n°10 p. 49]

Qu'est-ce que le codage binaire ?

- ☐ Un système de codage utilisant les chiffres de 0 à 9
- ☐ Un système de codage utilisant uniquement les chiffres 0 et 1.
- ☐ Un système de codage utilisant des symboles spéciaux.

Exercice 3 : Codage

[solution n°11 p. 49]

Généralement il existe 3 systèmes binaire : , Octal et

Exercice 4

[solution n°12 p. 49]

Le codage binaire est :