Chapitre 1

# Quelques notions de mathématiques

## 1. Dérivée d'une fonction à une seule variable

Soit y = f(x) une fonction à une variable, on appelle dérivée de f, la limite du taux d'accroissement $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quand Δx tend vers zéro. $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$

**Exemple** : y = f(x) = $x^2$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^2-x_2}{\Delta x}=2x+\Delta x$ $et, \quad y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = 2x ; dérivée de y par rapport à x que l'on note également $\frac{dy}{dx}$

## 2. Règles de dérivation

Le calcul des dérivées, appelé dérivation, est régi par différentes règles qui en simplifient l'utilisation.

Soient deux fonctions u et v définies et dérivables sur un intervalle I, on peut alors énoncer les résultats suivants :

- Les fonctions constantes ont des dérivées nulles.
- La somme (u + v) est dérivable sur I, et a pour dérivée (u + v)' = u'+ v'.
- Si λ est un réel, alors λu est dérivable sur I, et a pour dérivée (λu)'= λu'.
- Le produit u.v est dérivable sur I, et a pour dérivée (u.v)' = u'.v + u.v'.
- Si v n'est pas nulle sur I, alors le quotient u/v est dérivable sur I, et a pour dérivée (u/v)'=(u'.v - u.v')/v2.
- Si u est dérivable sur l'intervalle v(I) (image de l'intervalle I par v), alors uov = u(v(x)) est dérivable sur I, et a pour dérivée : (uov)' = u'(v).v'(x).

## 3. Différentielle d'une fonction à une seule variable

A la fonction d'une variable f(x) on associe, pour chaque valeur de x, la différentielle df = y'.dx $=\left(\frac{df}{dx}\right).dx$

## 4. Fonction à plusieurs variables. Dérivées partielles

Soit f une fonction de deux variables *x* et *y,* dérivable selon *x* et *y.* Si l'on considère provisoirement *y* comme une constante, f peut être dérivée par rapport à *x* : On obtient alors la dérivée partielle de f par rapport à *x,* notée $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$

De même, en fixant *x* et en dérivant *f* par rapport à *y,* on obtient la dérivée partielle de *f* par rapport à *y,* notée $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x$

Par exemple, si f(x,y) = x2 – xy + 3y2, alors f est dérivable par rapport à *x* et à y : $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$ = 2x - y et $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x$ = - x + 6y.

De manière analogue, on peut déterminer les dérivées partielles de fonctions de plus de deux variables, en fixant temporairement toutes les variables sauf celle par rapport à laquelle on désire dériver la fonction. On peut également définir les dérivées partielles d'ordre supérieur en réitérant l'opération de dérivation.

**Exemple** : étant donné f(x,y) = $x^2$–xy+ $3y^2$, par exemple, il est possible de définir deux dérivées distinctes, une par variable :

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = f'(x)$ dérivée partielle de f(x, y) par rapport à x.

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = 2x - y$ dérivée partielle de f(x, y) par rapport à x.

De même $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = -x + 6y$ dérivée partielle de f(x, y) par rapport à y.

## 5. Différentielle d'une fonction à plusieurs variables

Si on veut connaître la variation df(x,y) lorsqu'on passe du point (x,y) au point infiniment voisin (x + dx , y + dy ), on doit faire varier d'abord x de dx en laissant y constant, puis opérer de même avec y. On peut donc poser par définition la différentielle :

$df(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy$ Différentielle totale exacte (D.T.E.) de f(x, y). Pour f(x, y) = $x^2$ – xy + $3y^2$, on aura :

df(x, y) = (2x - y) dx + (- x + 6y) dy

## 6. Formes différentielles

Les expressions de la forme : δf(x,y) = V(x, y) dx + W(x, y) dy ne sont pas toujours des différentielles totales exactes. L'égalité des dérivées secondes croisées permet de reconnaître les D.T.E.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial W(x,y)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial V(x,y)}{\partial y}$$

La forme différentielle, δf(x,y) est totale exacte si et seulement si, on a :

$\left[\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}\right]_x = \left[\frac{\partial W(x,y)}{\partial x}\right]_y$ ; dans ce cas, on la notera par df(x,y).

## 7. Intégrale d'une fonction à une variable

Considérons une fonction f définie et continue sur un intervalle [ a , b]. Cette fonction admet donc une primitive F sur cet intervalle, définie à une constante près. On appelle alors intégrale de a à b de la fonction f le réel :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Soit à calculer par exemple :

$$\int_{x_A}^{x_B} x^2.dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x_A}^{x_B} = \frac{x_B^3}{3} - \frac{x_A^3}{3} = F(x_B) - F(x_B) = \Delta F_A^B$$

où $F(x) = \frac{x^3}{3}$ est la fonction primitive de dF = $x^2$dx. Pour l'extension de cette méthode aux fonctions à plusieurs variables, on doit distinguer les différentielles totales exactes des autres formes différentielles dont les dérivées secondes croisées ne sont pas égales.

## 8. Cas des différentielles totales exactes

df(x, y) = V(x, y) dx + W(x, y) dy

$$\int_{x_A,y_A}^{x_B,y_B} df(x,y) = [f(x,y)]_{x_A,y_A}^{x_B,y_B} = f(x_B,y_B) - f(x_A,y_A)$$

Pour faire ce calcul, il suffit de connaître les borne; f(x, y) est une fonction d'état.

## 9. Cas des formes différentielles non totales exactes

Dans ce cas, on est obligé de se ramener à un problème à une variable en fixant une relation entre x et y dans le cas de deux variables, en fixant (n-1) relations dans le cas de n variables. La valeur de l'intégrale dépendra des relations adoptées (ou imposées) qui définissent le chemin d'intégration.

Le résultat dépend des bornes et du chemin parcouru pour effectuer l'intégration.