Chapitre 2 : STATIQUE DES FLUIDES

1 INTRODUCTION

Lors d'une plongée sous marine, on constate que la pression de l'eau augmente avec la profondeur. La pression d'eau exercée sur un sous-marin au fond de l'océan est considérable. De même, la pression de l'eau au fond d'un barrage est nettement plus grande qu'au voisinage de la surface. Les effets de la pression doivent être pris en considération lors du dimensionnement des structures tels que les barrages, les sous marins, les réservoirs… etc. Les ingénieurs doivent calculer les forces exercées par les fluides avant de concevoir de telles structures.

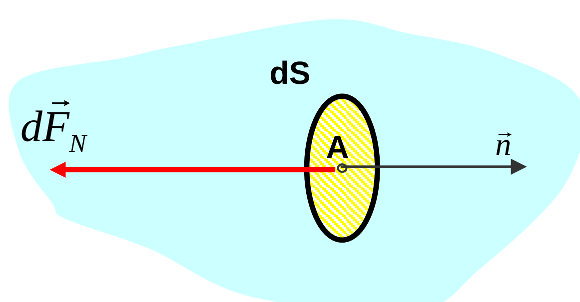
Ce chapitre est consacré à l'étude des fluides au repos. Les lois et théorèmes fondamentaux en statique des fluides y sont énoncés. La notion de pression, le théorème de Pascal, le principe d'Archimède et la relation fondamentale de l'hydrostatique y sont expliqués.

Le calcul des presses hydrauliques, la détermination de la distribution de la pression dans un réservoir…etc., sont basés sur les lois et théorèmes fondamentaux de la statique des fluides.

2 NOTION DE PRESSION EN UN POINT D'UN FLUIDE

La pression est une grandeur scalaire. C'est l'intensité de la composante normale de la force qu'exerce le fluide sur l'unité de surface.

Elle est définie en un point A d'un fluide par l'expression suivante :



$$\boxed{P_A = \frac{\left\|\overrightarrow{dF_N}\right\|}{dS}}$$

où :

dS : Surface élémentaire de la facette de centre A (en mètre carré),

$\vec{n}$: Vecteur unitaire en A de la normale extérieure à la surface,

$\overrightarrow{dF_N}$: Composante normale de la force élémentaire de pression qui s'exerce sur la surface (en Newton),

P_A : pression en A (en Pascal),

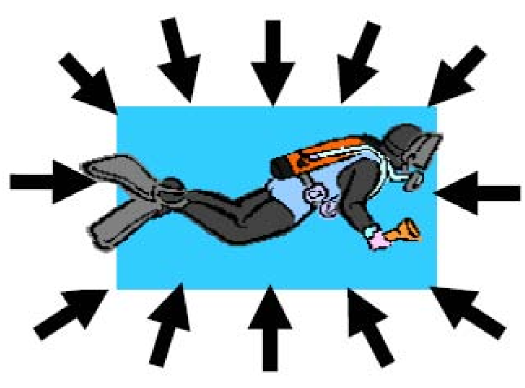
Sur la surface de centre A, d'aire dS, orientée par sa normale extérieure $\vec{n}$, la force de pression élémentaire $\overrightarrow{dF}$ s'exprime par :

$$\boxed{\overrightarrow{dF_N} = -P_A.dS.\vec{n}}$$

<u>Exemple</u> : Chaque cm^2 de surface de notre peau supporte environ 1 kg (force) représentant le poids de l'atmosphère. C'est la pression atmosphérique au niveau de la mer. Nous ne la ressentons pas car notre corps est incompressible et ses cavités (estomac, poumons, etc.) contiennent de l'air à la même pression.

Si on s'élève de 5 000 m, la pression atmosphérique est deux fois plus faible qu'au niveau de la mer car la masse d'air au-dessus de notre tête est alors moitié moindre. D'où la nécessité d'une pressurisation des avions.

En plongée sous-marine, pour mesurer la pression, on utilise le plus souvent le bar: 1 bar = 1 kg / cm^2.



Plus on descend en profondeur, plus la pression est élevée car il faut tenir compte du poids de l'eau au-dessus de nous : à 10 mètres de profondeur, chaque cm^2 de notre peau supportera un poids égal à :

1 cm2 X 10 m (profondeur) = 1 cm2 X 100 cm = 1000 cm3 = l'équivalent du poids d'1 litre d'eau. Le poids d'un litre d'eau douce est égal à 1kg. Le poids d'un litre d'eau de mer est un plus important (à cause du sel qu'elle contient) : 1,026 kg.

1bar = 1Kg/cm2

En négligeant cette différence, on considérera que de manière générale un litre d'eau pèse 1 kg.

Par conséquent, la pression due à l'eau à 10 m de profondeur est donc de 1 kg / cm^2, c'est-à-dire 1 bar. Si on descend à nouveau de -10 m, la pression augmentera à nouveau de 1 bar. C'est ce qu'on appelle la pression hydrostatique (pression due à l'eau). On l'appelle aussi pression relative car c'est une pression par rapport à la surface.

La pression hydrostatique (comme la pression atmosphérique) s'exerce dans toutes les directions (et pas simplement de haut en bas).

Remarque :

L'unité internationale de pression est le Pascal : 1 Pa = 1 N/m². Cette unité est très petite. On utilise le plus souvent ses multiples. En construction mécanique, résistance des matériaux , etc.,l'unité utilisée est le méga pascal :

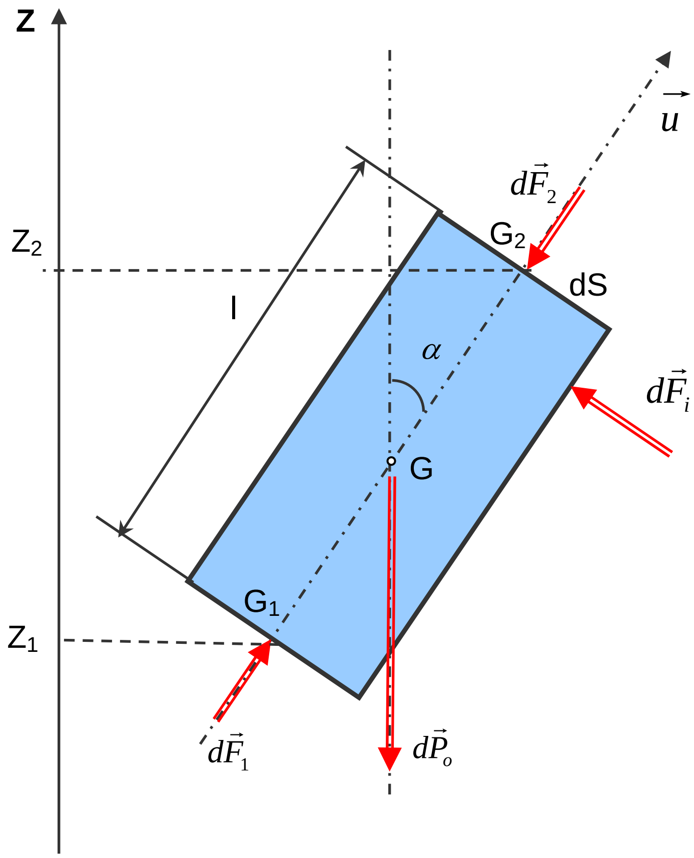
1 MPa= 1 $N/mm^2=10^6$ Pa

En mécanique des fluides on utilise encore très souvent le bar. Le bar est égal à peu près à la pression atmosphérique moyenne :

1 bar = 10^5 Pa.

3 RELATION FONDAMENTALE DE L'HYDROSTATIQUE

Considérons un élément de volume d'un fluide incompressible (liquide homogène de poids volumique ϖ). Cet élément de volume a la forme d'un cylindre d'axe (G, $\vec{u}$) qui fait un angle α avec l'axe vertical (O, $\vec{Z}$) d'un repère R(O, $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$). Soit l la longueur du cylindre et soit dS sa section droite.



Soit G_1 d'altitude Z_1 et G_2 d'altitude Z_2, les centres des sections droites extrêmes. Etudions l'équilibre du cylindre élémentaire, celui-ci est soumis aux :

- actions à distance : son poids : $\overrightarrow{dP_O} = -\varpi\ l\ dS\ \vec{Z}$
- actions de contact : forces de pression s'exerçant sur :
  - o la surface latérale : $\Sigma \overrightarrow{dF_i}$.
  - o les deux surfaces planes extrêmes : $\overrightarrow{dF_1} = -P_1.dS.(-\vec{u}) = P_1.dS.\vec{u}$ et $\overrightarrow{dF_2} = -P_2.dS.\vec{u}$ .avec P_1 et P_2 les pressions du fluide respectivement en G_1 et en G_2.

Le cylindre élémentaire étant en équilibre dans le fluide, écrivons que la résultante des forces extérieures qui lui sont appliquées est nulle :

$$\overrightarrow{dP_O} + \Sigma\overrightarrow{dF_i} + \overrightarrow{dF_1} + \overrightarrow{dF_2} = \vec{0}$$

En projection sur l'axe de symétrie (G, $\vec{u}$) du cylindre,

$$-\varpi.l.dS.\cos\alpha + P_1.dS - P_2.dS = 0$$

Exprimons la différence de pression $P_1 - P_2$ après avoir divisé par dS et remarqué que $l \cdot \cos\alpha = Z_2 - Z_1$

$\boxed{P_1 - P_2 = \varpi.(Z_2 - Z_1) = \rho g(Z_2 - Z_1)}$: Relation fondamentale de l'hydrostatique.

Autre forme plus générale :

En divisant les deux membres de la relation précédente par ϖ :

$\frac{P_1}{\varpi} + Z_1 = \frac{P_2}{\varpi} + Z_2$. Ou encore $\frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + Z_2$

Comme G_1 et G_2 ont été choisis de façon arbitraire à l'intérieur d'un fluide de poids volumique ϖ, on peut écrire en un point quelconque d'altitude Z, ou règne la pression p :

$$\boxed{\frac{P}{\varpi} + Z = \frac{P}{\rho g} + Z = Cte}$$

4 THEOREME DE PASCAL

4.1 Enoncé

> Dans un fluide incompressible en équilibre, toute variation de pression en un point entraîne la même variation de pression en tout autre point.

4.2 Démonstration

Supposons qu'au point G_1 intervienne une variation de pression telle que celle-ci devienne $P_1 + \Delta P_1$. ΔP_1 étant un nombre algébrique. Calculons la variation de pression ΔP_2 qui en résulte en G_1.

Appliquons la relation fondamentale de l'hydrostatique entre G_1 et G_2 pour le fluide

- o à l'état initial: $P_1 - P_2 = \varpi(Z_2 - Z_1)$ (1)
- o à l'état final : $(P_1 + \Delta P_1) - (P_2 + \Delta P_2) = \varpi.(Z_2 - Z_1)$ (2)

En faisant la différence entre les équations (2) et (1) on obtient :

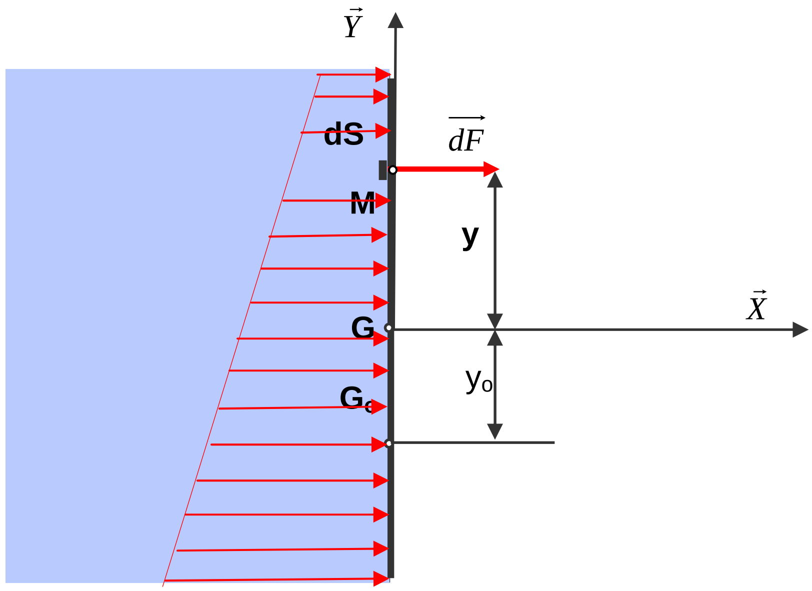
$\Delta P_1 - \Delta P_2 = 0$.

D'où $\boxed{\Delta P_1 = \Delta P_2}$

5 POUSSEE D'UN FLUIDE SUR UNE PAROI VERTICALE

5.1 Hypothèses

La paroi verticale possède un axe de symétrie (G, $\vec{Y}$). G est son centre de surface. D'un coté de la paroi il y a un fluide de poids volumique ϖ , de l'autre coté, il y a de l'air à la pression atmosphérique P_{atm}. On désigne par P_G la pression au centre de surface G du coté fluide.



5.2 Eléments de réduction du torseur des forces de pression

Connaissant la pression P_G au point G, la pression P_M au point M est déterminée en appliquant la relation fondamentale de l'hydrostatique : $P_M - P_G = \varpi.(Y_G - Y_M)$

Dans le repère (G, $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$) défini sur la figure : y_G=0 et y_M =y, donc $P_M = P_G - \varpi.y$

Exprimons la force de pression en M : $\overrightarrow{dF} = (P_G - \varpi.y).dS.\vec{X}$

Soit $\{\tau_{poussée}\}$ le torseur associé aux forces de pression relative :

$$\{\tau_{poussée}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} = \int_{(S)} \overrightarrow{dF} \\ \overrightarrow{M_G} = \int_{s} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{dF} \end{Bmatrix}_G$$

5.2.1 Résultante

$$\vec{R} = \int_{(S)} (P_G - \varpi.y).dS.\vec{X}$$

que l'on peut écrire en mettant en facteur les termes constants :

$$\vec{R} = \left[P_G.\int_{(S)} dS - \varpi.\int_{(S)} y.dS \right].\vec{X}$$

On note que $\int_{(S)} dS = S$ (aire de la paroi),

$\int_{(s)} y.dS = y_G.S = 0$: Moment statique de la surface S par rapport à l'axe (G, $\vec{Z}$), donc

$$\boxed{\vec{R} = P_G.S.\vec{X}}$$

5.2.2 Moment

$$\overrightarrow{M_G} = \int \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{dF}$$

Dans le repère (G, $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$) on peut écrire:

$\overrightarrow{GM} = y.\vec{Y}$ et $\overrightarrow{dF} = (P_G - \varpi.y).dS.\vec{X}$,

donc $\overrightarrow{M_G} = \int_{(S)} \left[y.\vec{Y} \wedge (P_G - \varpi.y).dS.\vec{X} \right]$

Sachant que $\vec{Y} \wedge \vec{X} = -\vec{Z}$ donc $\overrightarrow{M_G} = \left[P_G.\int_{(S)} y.dS - \varpi.\int_{(S)} y^2.dS \right].(-\vec{Z})$

On sait que $\int_{(S)} y.dS = y_G.S = 0$ et $\int_{(S)} y^2.dS = I_{(G,\vec{Z})}$: Moment quadratique de la surface S par rapport à l'axe (G, $\vec{Z}$) passant par le centre de surface G. Donc

$$\boxed{\overrightarrow{M_G} = \varpi.I_{(G,\vec{Z})}.\vec{Z}}$$

En résumé :

$$\boxed{\left\{ \tau_{poussee} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} P_G.S.\vec{X} \\ \varpi.I_{(G,\vec{Z})}.\vec{Z} \end{array} \right\}_G}$$

5.3 Centre de poussée

On cherche à déterminer un point G_0 où le moment résultant des forces de pression est nul.

Compte tenu de l'hypothèse de symétrie, si ce point existe il appartient à l'axe $(G,\vec{Y})$ et il est tel que :

$$\overrightarrow{M_{G_0}} = \overrightarrow{M_G} + \overrightarrow{G_0G} \wedge \vec{R} = \vec{0}.$$

Ecrivons alors que : $\overrightarrow{GG_0} \wedge \vec{R} = \overrightarrow{M_G}$

Avec les résultats précédents, on obtient : $y_0.\vec{Y} \wedge P_G.S.\vec{X} = \varpi.I_{(G,\vec{Z})}.\vec{Z}$,

ce qui conduit à

$$\boxed{y_0 = -\frac{\varpi.I_{(G,\vec{Z})}}{P_G.S}}$$

G_o existe, il s'appelle le centre de poussée de la paroi.

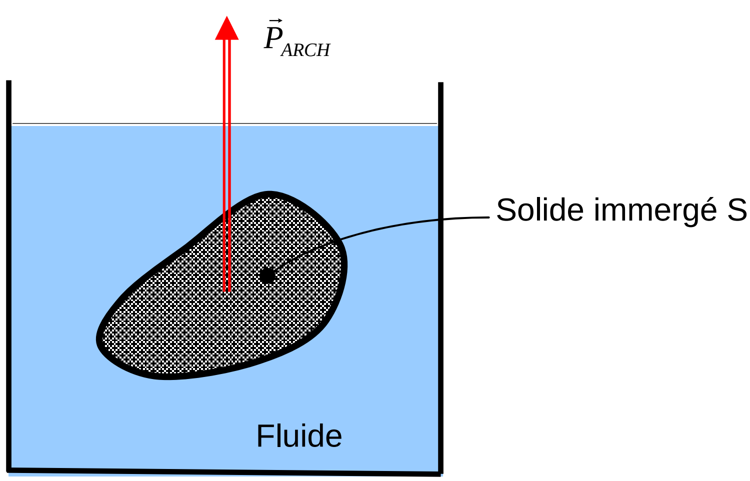
Remarque : Le centre de poussée est toujours au-dessous du centre de surface G.

6 THEOREME D'ARCHIMEDE

6.1 Énoncé

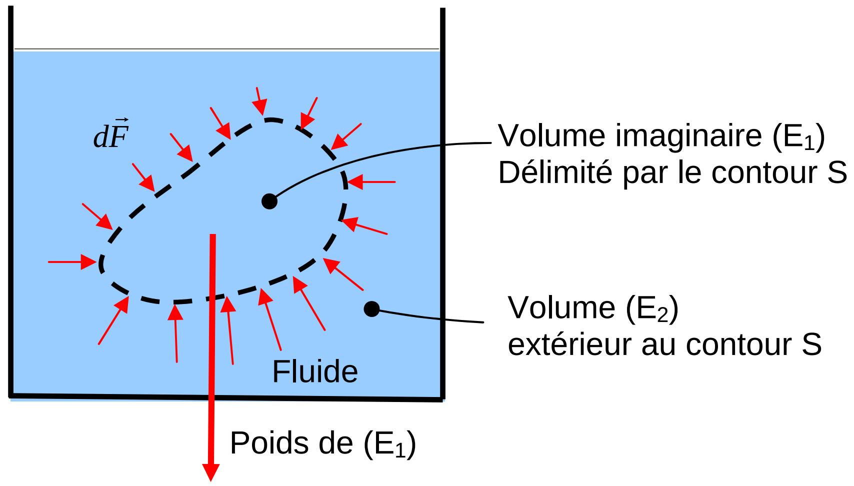
Tout corps plongé dans un fluide reçoit de la part de ce fluide une force (poussée) verticale, vers le haut dont l'intensité est égale au poids du volume de fluide déplacé (ce volume est donc égal au volume immergé du corps).

$P_{ARCH}=\rho_{fluide}.V_{imm}.g$



6.2 Démonstration

Dans un fluide (E) de poids volumique ϖ, imaginons un certain volume de fluide (E_1) délimité par un contour fermé (S) :



Si le fluide est au repos, il est évident que (E_1) est en équilibre sous l'effet des actions mécaniques extérieures suivantes :

- Action de la pesanteur, modélisable par le torseur : $\{\tau(pes \to E_1)\}$
- Action des forces de pression $d\vec{F}$ du fluide (E_2) qui entoure (E_1) modélisable par le torseur : $\{\tau(E_2 \to E_1)\}$

On peut donc écrire l'équation d'équilibre de (E_1) : $\{\tau(pes \to E_1)\} + \{\tau(E_2 \to E_1)\} = \{\vec{0}\}$

Nous savons qu'en G, centre de gravité du fluide (E_1) le torseur des forces de pesanteur se réduit à un glisseur : $\{\tau(pes \to E_1)\} = \begin{Bmatrix} \vec{P} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$

Il est donc évident qu'au même point G le torseur des forces de pression $\overrightarrow{dF}$ se réduira lui aussi à un glisseur :

$$\{\tau(E_2 \to E_1)\} = \begin{Bmatrix} \int_{(S)} \overrightarrow{dF} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

L'équation d'équilibre de la portion de fluide (E_1) s'écrit : $\int_{(S)} \overrightarrow{dF} + \vec{P} = \vec{0}$

(E_1) est ici une portion de fluide et $\vec{P}$ est le poids du fluide occupant le volume (E_1). Si le volume (E_1) est occupé par un solide immergé ayant le même contour S, les forces de poussée sur ce contours (S) sont les mêmes , ce qui revient à dire que la force de poussée ne dépend que du volume du fluide déplacé et non pas de la nature du solide immergé (plomb, acier, etc).

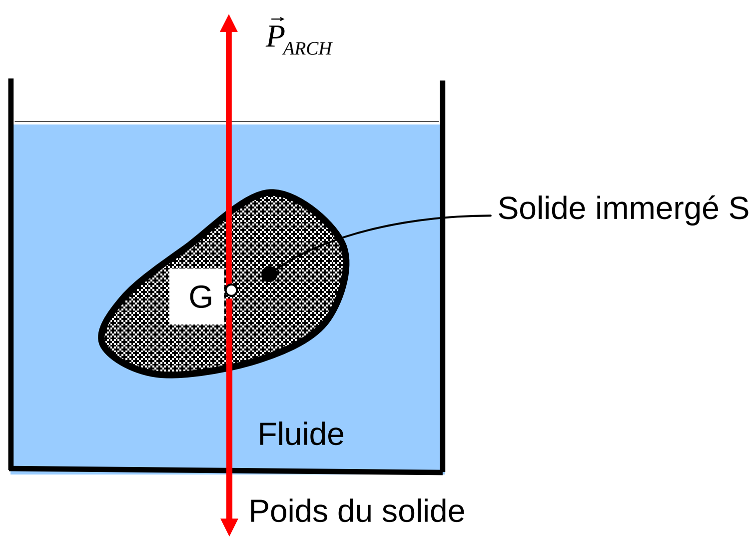
Conclusion :

Tout corps solide immergé dans un fluide en équilibre est soumis de la part de celui-ci à des forces de pression $\overrightarrow{dF}$ dont les actions mécaniques sont modélisables au centre de gravité du fluide déplacé par un glisseur dont la résultante est directement opposée au poids du fluide déplacé.

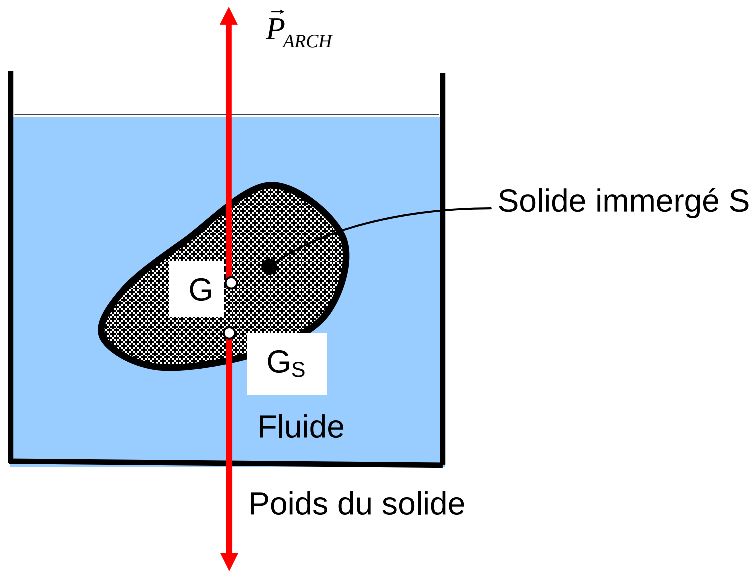
$$\boxed{\{\tau(E_2 \rightarrow E_1)\} = \begin{Bmatrix} -\vec{P} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G}$$

Remarques :

- 1er cas : Si le solide immergé est homogène alors le centre de poussée G, point d'application de la poussée d'Archimède sera confondu avec le centre de gravité du solide. L'équilibre du solide est indifférent.



- 2ième cas : Si le solide immergé est hétérogène alors le centre de poussée G, point d'application de la poussée d'Archimède n'est pas confondu avec le centre de gravité G_s du solide. L'équilibre du solide est stable si G est au dessus de G_S. L'équilibre du solide est instable si G est au dessous de G_S.



Position stable

7 CONCLUSION

La statique des fluides est basée principalement sur les résultats suivants:

a) La différence de pression entre deux points est proportionnelle à leur différence de profondeur : $\boxed{P_1 - P_2 = \varpi.(Z_2 - Z_1) = \rho g(Z_2 - Z_1)}$:

C'est la ***relation fondamentale de l'hydrostatique***,

b) Toute variation de pression en un point engendre la même variation de pression en tout autre point d'après le ***théorème de Pascal.***

c) Le torseur associé aux forces de pression d'un fluide sur une paroi plane verticale est : $\boxed{\{\tau_{poussee}\} = \begin{Bmatrix} P_G.S.\overrightarrow{X} \\ \varpi.I_{(G,\vec{Z})}.\vec{Z} \end{Bmatrix}_G}$

d) La position du centre de poussée. est $\boxed{y_0 = -\dfrac{\varpi.I_{(G,\vec{Z})}}{P_G.S}}$

e) Tout corps plongé dans un fluide subit une force verticale, orientée vers le haut ***c'est la poussée d'Archimède*** et dont l'intensité est égale au poids du volume de fluide déplacé.