# Chapitre 3 : DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES PARFAITS

## 1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fluides ***en mouvement***. Contrairement aux solides, les éléments d'un fluide en mouvement peuvent se déplacer à des vitesses différentes. L'écoulement des fluides est un phénomène complexe.

On s'intéresse aux équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides incompressibles parfaits, en particulier :

- l'équation de continuité (conservation de la masse),

- le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie) et,

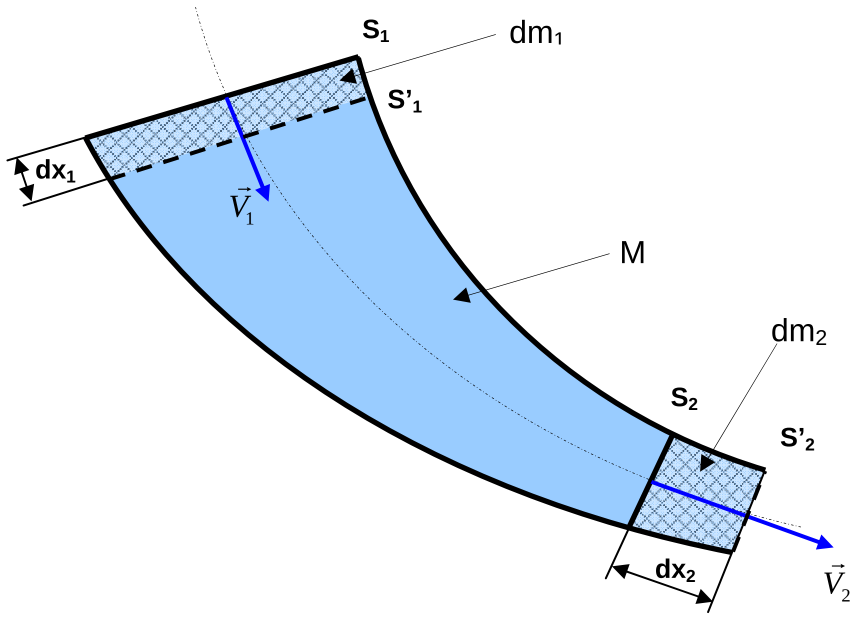
- le théorème d'Euler (conservation de la quantité de mouvement) à partir duquel on établit les équations donnant la force dynamique exercée par les fluides en mouvement (exemple les jets d'eau).

## 2 ECOULEMENT PERMANENT

L'écoulement d'un fluide est dit permanent si le champ des vecteurs vitesse des particules fluides est constant dans le temps. Notons cependant que cela ne veut pas dire que le champ des vecteurs vitesse est uniforme dans l'espace. L'écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible est le seul que nous aurons à considérer dans ce cours. Un écoulement non permanent conduirait à considérer les effets d'inertie des masses fluides.

## 3 EQUATION DE CONTINUITE

Considérons une veine d'un fluide incompressible de masse volumique ρ animée d'un écoulement permanent.




On désigne par :

- $S_1$ et $S_2$ respectivement la section d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant t,
- $S'_1$ et $S'_2$ respectivement les sections d'entrée et de sortie du fluide à l'instant t'=(t+dt),
- $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ les vecteurs vitesse d'écoulement respectivement à travers les sections $S_1$ et $S_2$ de la veine.
- $dx_1$ et $dx_2$ respectivement les déplacements des sections $S_1$ et $S_2$ pendant l'intervalle de temps dt,
- $dm_1$ : masse élémentaire entrante comprise entre les sections $S_1$ et $S'_1$,
- $dm_2$ : masse élémentaire sortante comprise entre les sections $S_2$ et $S'_2$,
- M : masse comprise entre $S_1$ et $S_2$,
- $dV_1$ : volume élémentaire entrant compris entre les sections $S_1$ et $S'_1$,
- $dV_2$ : volume élémentaire sortant compris entre les sections $S_2$ et $S'_2$,

A l'instant t : le fluide compris entre $S_1$ et $S_2$ a une masse égale à ($dm_1$+ M)

A l'instant t+dt : le fluide compris entre $S'_1$ et $S'_2$ a une masse égale à (M+ $dm_2$).

Par conservation de la masse: $dm_1 + M = M + dm_2$ en simplifiant par M on aura

$dm_1 = dm_2$ Donc $\rho_1.dV_1 = \rho_2.dV_2$ ou encore $\rho_1.S_1.dx_1 = \rho_2.S_2.dx_2$,

En divisant par dt on abouti à :

$$\rho_1.S_1.\frac{dx_1}{dt} = \rho_2.S_2.\frac{dx_2}{dt} \quad \Leftrightarrow \rho_1.S_1.V_1 = \rho_2.S_2.V_2$$

Puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ On peut simplifier et aboutir à l'équation de continuité suivante :

$\boxed{S_1.V_1 = S_2.V_2}$ (1)

# 4 NOTION DE DEBIT

## 4.1 Débit massique

Le débit massique d'une veine fluide est la limite du rapport $\frac{dm}{dt}$ quand dt tend vers 0.

$$\boxed{q_m = \frac{dm}{dt}}$$

où :

- $q_m$ est la masse de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite.
- dm : masse élémentaire en (kg) qui traverse la section pendant un intervalle de temps dt .
- dt : intervalle de temps en (s)

en tenant compte des équations précédentes on obtient :

$$q_m = \frac{dm}{dt} = \rho.S_1.\frac{dx_1}{dt} = \rho.S_2.\frac{dx_2}{dt} \quad (2)$$

avec :

$\frac{dx_1}{dt} = V_1 = \left\|\overrightarrow{V_1}\right\|$ : Vitesse moyenne d'écoulement de la veine fluide à travers $S_1$,

$\frac{dx_2}{dt} = V_2 = \left\|\overrightarrow{V_2}\right\|$ : Vitesse moyenne d'écoulement de la veine fluide à travers $S_2$

D'après (2) :

$q_m = \rho.S_1.V_1 = \rho.S_2.V_2$

Soit dans une section droite quelconque S de la veine fluide à travers laquelle le fluide s'écoule à la vitesse moyenne v :

$\boxed{q_m = \rho.S.V}$ (3)

où :

$q_m$ : Débit massique en (kg/s)

$\rho$ : Masse volumique en (kg/m$^3$)

S : Section de la veine fluide en (m$^2$)

V : Vitesse moyenne du fluide à travers (S) en (m/s)

## 4.2 Débit volumique

Le débit volumique d'une veine fluide est la limite du rapport $\frac{dV}{dt}$ quand dt tend vers 0.

$$\boxed{q_v = \frac{dV}{dt}}$$

Où :

- $q_v$ : Volume de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite.
- dV : Volume élémentaire, en (m$^3$), ayant traversé une surface S pendant un intervalle de temps dt,
- dt : Intervalle de temps en secondes (s),

D'après la relation (3) et en notant que $dV = \frac{dm}{\rho}$ on peut écrire également que

$q_v = \frac{q_m}{\rho}$ soit

$\boxed{q_v = S.V}$

## 4.3 Relation entre débit massique et débit volumique

A partir des relations précédentes on peut déduire facilement la relation entre le débit massique et le débit volumique :

$\boxed{q_m = \rho.q_v}$

# 5 THEOREME DE BERNOULLI – CAS D'UN ECOULEMENT SANS ECHANGE DE TRAVAIL

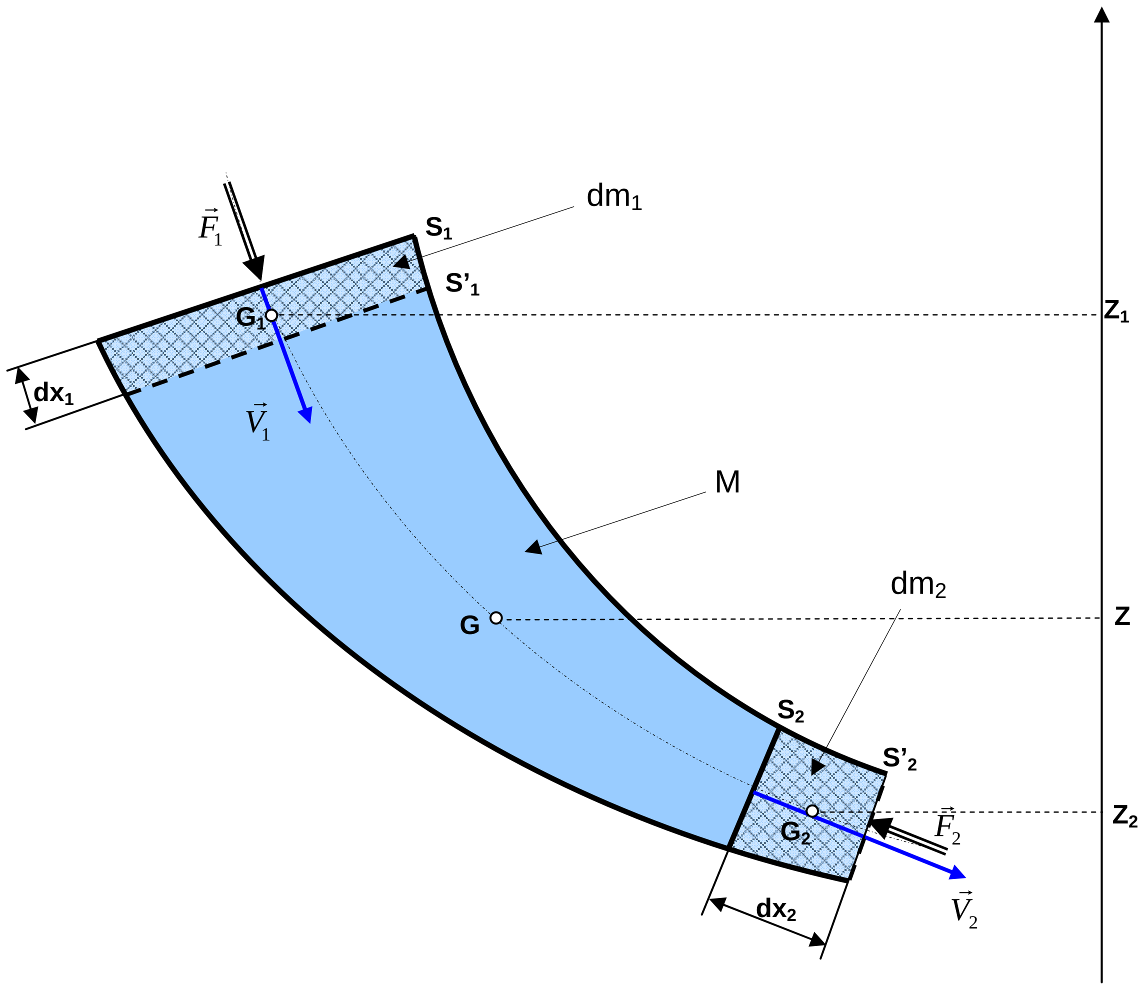
Reprenons le schéma de la veine fluide du paragraphe 3 avec les mêmes notations et les hypothèses suivantes:

- Le fluide est parfait et incompressible.
- L'écoulement est permanent.
- L'écoulement est dans une conduite parfaitement lisse.

On considère un axe $\vec{Z}$ vertical dirigé vers le haut.

On note $Z_1$, $Z_2$ et Z respectivement les altitudes des centres de gravité des masses $dm_1$, $dm_2$ et M.

On désigne par $F_1$ et $F_2$ respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections $S_1$ et $S_2$.



A l'instant t le fluide de masse ($dm_1$ + M) est compris entre $S_1$ et $S_2$. Son énergie mécanique est : $E_{mec} = E_{pot} + E_{cin} = (dm_1.g.Z_1 + MgZ) + \frac{1}{2}dm_1.V_1^2 + \int_{S'_1}^{S_2} \frac{dm.V^2}{2}$

A l'instant t'=(t+dt) le fluide de masse (M+$dm_2$) est compris entre S'$_1$ et S'$_2$. Son énergie mécanique est : $E'_{mec} = E'_{pot} + E'_{cin} = (MgZ + dm_2.g.Z_2) + \int_{S'_1}^{S_2} \frac{dm.V^2}{2} + \frac{1}{2}dm_2.V_2^2$

On applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre t et t' : « La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures. »

$$E'_{mec} - E_{mec} = W_{Forces \ de \ pression} = F_1.dx_1 - F_2.dx_2 \Leftrightarrow E'_{mec} - E_{mec} = P_1.S_1.dx_1 - P_2.S_2.dx_2 = P_1.dV_1 - P_2.dV_2$$

en simplifiant on obtient : $dm_2.g.Z_2 + \frac{1}{2}dm_2.V_2^2 - dm_1.g.Z_1 - \frac{1}{2}.dm_1.V_1^2 = \frac{P_1}{\rho_1}.dm_1 - \frac{P_2}{\rho_2}.dm_2$

Par conservation de la masse : $dm_1 = dm_2 = dm$ et puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, On aboutie à l'équation de Bernoulli :

$$\boxed{\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(Z_2 - Z_1) = 0} \quad (4)$$

L'unité de chaque terme de la relation (4) est le joule par kilogramme (J/kg)

D'après la relation (4) on peut alors écrire :

$$\boxed{\frac{V_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} + g.z_2 = \frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + g.z_1}$$

# 6 THEOREME DE BERNOULLI – CAS D'UN ECOULEMENT AVEC ECHANGE DE TRAVAIL

Reprenons le schéma de la veine fluide du paragraphe 4 avec les mêmes notations et les mêmes hypothèses. On suppose en plus qu'une machine hydraulique est placée entre les sections $S_1$ et $S_2$. Cette machine est caractérisée par une puissance nette $P_{net}$ échangée avec le fluide, une puissance sur l'arbre $P_a$ et un certain rendement $\eta$.Cette machine peut être soit une turbine soit une pompe.

- Dans le cas d'une pompe : le rendement est donné par l'expression suivante :

$$\boxed{\eta = \frac{P_{net}}{P_a}}$$

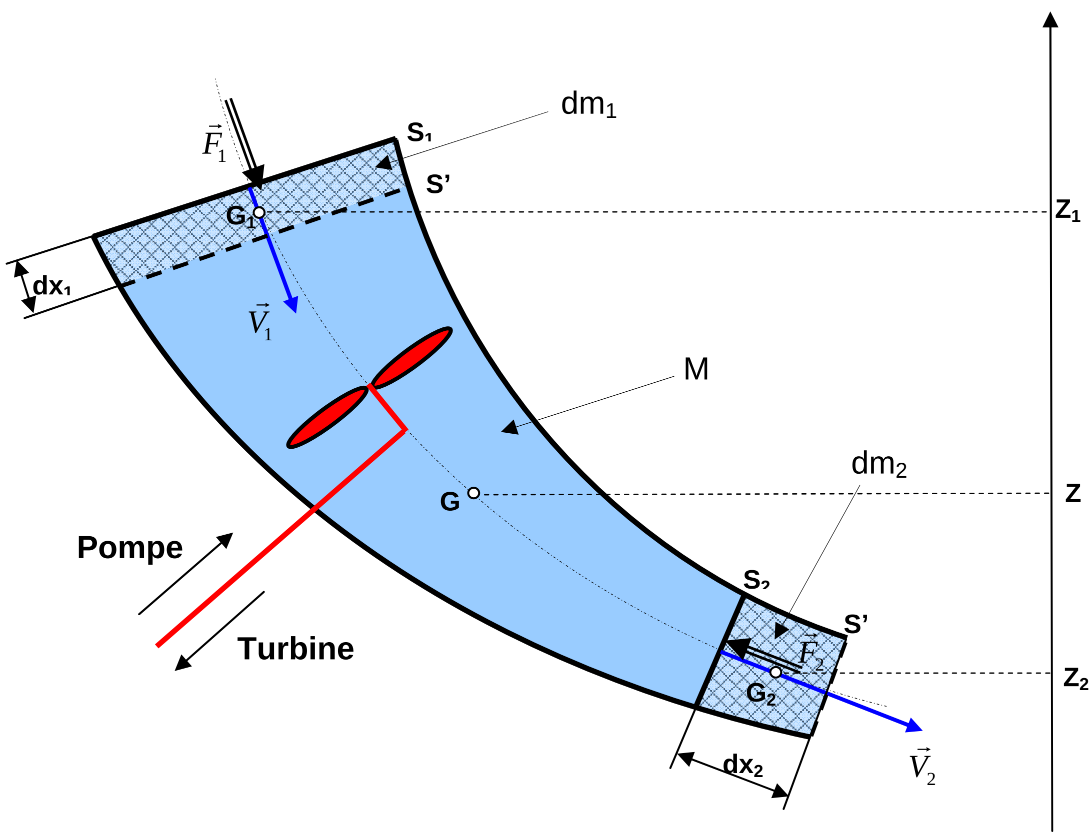
- Dans le cas d'une turbine : le rendement est donné par l'expression suivante :

$$\boxed{\eta = \frac{P_a}{P_{net}}}$$

Entre les instant t et t'=(t+dt), le fluide a échange un travail net $W_{net} = P_{net}.dt$ avec la machine hydraulique. $W_{net}$ est supposé positif s'il s'agit d'une pompe et négatif s'il s'agit d'une turbine.

On désigne par $F_1$ et $F_2$ respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections $S_1$ et $S_2$.

A l'instant t le fluide de masse ($dm_1$ + M) est compris entre $S_1$ et $S_2$. Son énergie mécanique est : $E_{mec} = E_{pot} + E_{cin} = (dm_1.g.Z_1 + MgZ) + \frac{1}{2}dm_1.V_1^2 + \int_{S'_1}^{S_2} \frac{dm.V^2}{2}$



A l'instant t'=(t+dt) le fluide de masse (M+$dm_2$) est compris entre S'$_1$ et S'$_2$. Son énergie mécanique est : $E'_{mec} = E'_{pot} + E'_{cin} = (MgZ + dm_2.g.Z_2) + \int_{S'_1}^{S_2} \frac{dm.V^2}{2} + \frac{1}{2} dm_2.V_2^2$

On applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre t et t' :« La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures. »,en considérant cette fois ci le travail de la machine hydraulique

$E'_{mec} - E_{mec} = F_1.dx_1 - F_2.dx_2 + P_{net}.dt$

$E'_{mec} - E_{mec} = P_1.S_1.dx_1 - P_2.S_2.dx_2 + P_{net.}.dt = P_1.dV_1 - P_2.dV_2 + P_{net}.dt$ en simplifiant on aura :

$dm_2.g.Z_2 + \frac{1}{2}dm_2.V_2^2 - dm_1.g.Z_1 - \frac{1}{2}.dm_1.V_1^2 = \frac{P_1}{\rho_1}.dm_1 - \frac{P_2}{\rho_2}.dm_2 + P_{net}.dt$ Par conservation de la masse : $dm_1 = dm_2 = dm$ et puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, on aboutie à l'équation de Bernoulli : $\boxed{\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(Z_2 - Z_1) = \frac{P_{net}}{q_m}}$ (5)

# 7 THEOREME D'EULER :

Une application directe du théorème d'Euler est l'évaluation des forces exercées par les jets d'eau. Celles-ci sont exploitées dans divers domaines : production de l'énergie électrique à partir de l'énergie hydraulique grâce aux turbines, coupe des matériaux, etc. Le théorème d'Euler résulte de l'application du théorème de quantité de mouvement à l'écoulement d'un fluide :

$\sum \vec{F}ext = \frac{d\vec{P}}{dt}$ ; avec $\vec{P} = m\vec{V}_G$ : quantité de mouvement.

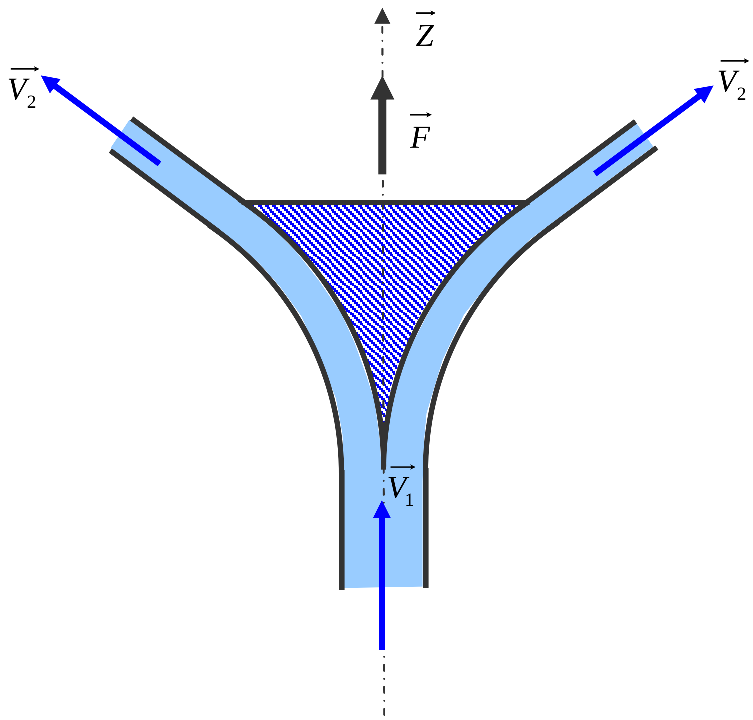
Ce théorème permet de déterminer les efforts exercés par le fluide en mouvement sur les objets qui les environnent.

<u>Enoncé</u>

> La résultante ($\sum \vec{F}ext$) des actions mécaniques extérieures exercées sur un fluide isolé (fluide contenu dans l'enveloppe limitée par $S_1$ et $S_2$ ) est égale à la variation de la quantité de mouvement du fluide qui entre en $S_1$ à une vitesse $\vec{V_1}$ et sort par $S_2$ à une vitesse $\vec{V_2}$.
>
> $\boxed{\sum \vec{F}ext = q_m(\vec{V_2} - \vec{V_1})}$

Exemple :

Considérons un obstacle symétrique par rapport à l'axe $\vec{Z}$. Le jet d'un écoulement de débit massique q$_{m,}$ de vitesse $\vec{V_1}$ et de direction parallèle à l'axe $\vec{Z}$, percute l'obstacle qui le dévie d'un angle $\beta$. Le fluide quitte l'obstacle à une vitesse $\vec{V_2}$ de direction faisant un angle $\beta$ par rapport à l'axe $\vec{Z}$.




La quantité de mouvement du fluide à l'entrée de l'obstacle est : $q_m.V_1$ porté par l'axe $\vec{Z}$.

La quantité de mouvement du fluide à la sortie de l'obstacle est : $q_m.V_1.\cos\beta$ porté par l'axe $\vec{Z}$.

La force opposée au jet étant égale à la variation de la quantité de mouvement :

$R = q_m.V_2.\cos\beta - q_m.V_1$

La force F exercée sur l'obstacle en direction de $\vec{Z}$ est égale et opposée à celle-ci :

$\boxed{F = q_m.(V_1 - V_2.\cos\beta)}$