Chapitre 3

Opérations sur les dérivées fractionnaires

3.1 Composition avec les dérivées d'ordre entièr

3.1.1 Dérivée-Grünwald-Letnikov

Proposition 3.1 *Soient m un entier strictement positif et $n-1<\alpha<n$, alors*

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m \left({}_{GL}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right) = {}_{GL}D_a^{\alpha+m}\left[f(t)\right], \tag{3.1}$$

et

$${}_{GL}D_a^{\alpha}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^m f(t)\right] = {}_{GL}D_a^{\alpha+m}\left[f(t)\right] - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-\alpha-m}}{\Gamma(j-\alpha-m+1)}. \tag{3.2}$$

Preuve. Pour $n-1<\alpha<n$, on a :

$${}_{GL}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right] = \sum_{j=0}^{n+m-1}\frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha+1)}(t-a)^{j-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n+m-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n+m-\alpha} f^{(n+m)}(s)ds.$$

Alors

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m {}_{GL}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right] = \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left[\sum_{j=0}^{n+m-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha+1)}(t-a)^{j-\alpha}\right.$$

$$\begin{aligned}
&\left. + \frac{1}{\Gamma(n+m-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n+m-\alpha} f^{(n+m)}(s)ds\right] \\
&= \sum_{j=0}^{n+m-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha+1)}\left(\frac{d}{dx}\right)^m (t-a)^{j-\alpha} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(n+m-\alpha)}\int_a^t \left(\frac{d}{dt}\right)^m (t-s)^{n+m-\alpha} f^{(n+m)}(s)ds \\
&= \sum_{j=0}^{s} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha+1)}\left[\frac{\Gamma(j-\alpha+1)}{\Gamma(j-\alpha-m+1)}(t-a)^{j-\alpha-m}\right] \\
&+ \frac{1}{\Gamma(n+m+1-\alpha)}\int_a^t \frac{\Gamma(n+m-\alpha+1)}{\Gamma(n+m-\alpha+1-m)}(t-s)^{n+m-\alpha-m} f^{(n+m)}(s)ds \\
&= \sum_{j=0}^{s} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha+1-m)}(t-a)^{j-\alpha-m} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha} f^{(n+m+1)}(s)ds \\
&= \sum_{j=0}^{n+m} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha-m+1)}(t-a)^{j-(\alpha+m)} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha} f^{(n+m+1)}(s)ds = {}_{GL}D_a^{\alpha+m}\left[f(t)\right].
\end{aligned}$$

Donc

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m \left({}_{GL}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right) = {}_{GL}D_a^{\alpha+m}\left[f(t)\right].$$

Aussi on a :

$$\begin{aligned}
{}_{GL}D_a^{\alpha}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^m f(t)\right] &= {}_{GL}D_a^{\alpha}\left[f^{(m)}(t)\right] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j+m)}(a)}{\Gamma(j-\alpha+1)}(t-a)^{j-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-1-\alpha} f^{(n+m)}(s)ds \\
&= \sum_{j=0}^{n+m-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha-m+1)}(t-a)^{j-\alpha-m} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (t-s)^{n-1-\alpha} f^{(n+m)}(s)ds \\
&- \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha-m+1)}(t-a)^{j-\alpha-m} \\
&= {}_{GL}D_a^{\alpha+m}\left[f(t)\right] - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-\alpha-m}}{\Gamma(j-\alpha-m+1)}.
\end{aligned}$$

Ce qui veut dire que $\left(\frac{d}{dt}\right)^m$ et ${}_{GL}D_a^\alpha$ ne commutent que si $f^{(j)}(a) = 0$ pour tout $j = 0, 1, 2, ..., m-1$. ■

3.1.2 Dérivée-Riemann-Liouville

Proposition 3.2 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $m-1 < \alpha < m, n \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n \left({}_{R.L}D_a^\alpha [f(t)]\right) = {}_{R.L}D_a^{\alpha+n} [f(t)]. \tag{3.3}$$

et

$$ {}_{R.L}D_a^\alpha \left[\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t)\right] = {}_{R.L}D_a^{\alpha+n} [f(t)] - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(t-a)^{j-\alpha-n}}{\Gamma(j-\alpha-n+1)} \tag{3.4}$$

Preuve. *D'après la formule (2.25), on a :*

$$\left({}_{R.L}D_a^\alpha [f(t)]\right) = \frac{d^m}{dt^m}\left(I_a^{m-\alpha}[f(t)]\right),$$

alors

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m \left({}_{R.L}D_a^\alpha [f(t)]\right) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(\frac{d^m}{dt^m}\left(I_a^{m-\alpha}[f(t)]\right)\right)$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\right)^{n+m} I_a^{m-\alpha+n-n}[f(t)] = \left(\frac{d}{dt}\right)^{n+m} I_a^{(m+n)-(\alpha+n)} f(x)$$

$$= {}_{R.L}D_a^{\alpha+n}[f(t)].$$

Donc

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n \left({}_{R.L}D_a^\alpha [f(t)]\right) = {}_{R.L}D_a^{\alpha+n} [f(t)].$$

Pour prouver l'identité (3.4), on utilise la relation suivante :

$$I_a^n\left[f^{(n)}(t)\right] = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-s)^{n-1} f^{(n)}(s)\, ds \tag{3.5}$$

$$= f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1)}(t-a)^k,$$

et que

$${}_{R.L}D_a^\alpha [f(t)] = {}_{R.L}D_a^{\alpha+n}\left(I_a^n [f(t)]\right).$$

Maintenant en utilisant (3.5), on obtient

$$
\begin{aligned}
{}_{R.L}D_a^{\alpha}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t)\right] &= {}_{R.L}D_a^{\alpha+n}\left(I_a^n\left[f^{(n)}(t)\right]\right)\\
&= {}_{R.L}D_a^{\alpha+n}\left[f(t)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1)}(t-a)^j\right]\\
&= {}_{R.L}D_a^{\alpha+n}f(t)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha-n+1)}(t-a)^{j-\alpha-n},
\end{aligned}
$$

donc

$$
{}_{R.L}D_a^{\alpha}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t)\right] = {}_{R.L}D_a^{\alpha+n}f(t)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha-n+1)}(t-a)^{j-\alpha-n}.
$$

Ce qui veut dire que $\left(\frac{d}{dt}\right)^m$ *et* ${}_{RL}D_a^{\alpha}$ *ne commutent que si* $f^{(j)}(a) = 0$ *pour tout* $j = 0, 1, 2, ..., m-1$. ■

3.2 Composition avec les dérivées fractionnaire

Dans ce paragraph, on s'intéresse à la composition de la dérivée au sens de Grünwald-Letnikov.

3.2.1 Composition de l'opérateur ${}_{GL}D^{\alpha}$ et ${}_{GL}D^{\beta}$

Proposition 3.3 1 : *Si* $\beta < 0$, *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, *alors on a :*

$$
{}_{GL}D_a^{\alpha}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = {}_{GL}D_a^{\alpha+\beta}f\left[f(t)\right]. \tag{3.6}
$$

2 : *Si* $0 \le m-1 < \beta < m, \alpha < 0$ *et* $f^{(j)}(a) = 0$ *pour tout* $j = 0, 1, ..., m-2$. *Alors :*

$$
{}_{GL}D_a^{\alpha}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = {}_{GL}D_a^{\alpha+\beta}f\left[f(t)\right]. \tag{3.7}
$$

3 : *Si* $0 \le m-1 < \beta < m$ *et* $0 \le n-1 < \alpha < n$ *et* $f^{(j)}(a) = 0$ *pour tout* $j = 0, 1, ..., r-2$.*avec* $r = \max(m, n)$, *ALors :*

$$
{}_{GL}D_a^{\alpha}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = {}_{GL}D_a^{\beta}\left[{}_{GL}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right] = {}_{GL}D_a^{\alpha+\beta}f\left[f(t)\right]. \tag{3.8}
$$

Preuve. Deux cas seront considérés séparement : $\beta < 0$ et $\beta > 0$:

1.1 Si $\beta < 0$. On prend d'abord $\alpha < 0$, alors on a :

$$\begin{aligned}
& {}_{GL}D_a^{\alpha}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(-\alpha\right)}\int_a^t (t-s)^{-\alpha-1}\left({}_{GL}D_a^{\beta}\left[f\left(s\right)\right]\right)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(-\alpha\right)}\int_a^t (t-s)^{-\alpha-1}\left[\frac{1}{\Gamma\left(-\beta\right)}\int_a^s (s-x)^{-\beta-1}f(x)dx\right]ds \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(-\alpha\right)\Gamma\left(-\beta\right)}\int_a^t f(x)dx\int_x^t (t-s)^{-\alpha-1}(s-x)^{-\beta-1}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(-\alpha\right)}\frac{1}{\Gamma\left(-\beta\right)}\int_a^t \frac{\Gamma\left(-\alpha\right)\Gamma\left(-\beta\right)}{\Gamma(-\beta-\alpha)}(t-x)^{-\alpha-\beta-1}f(x)dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(-(\alpha+\beta))}\int_a^t (t-x)^{-(\alpha+\beta)-1}f(x)dx,
\end{aligned}$$

donc si $\beta < 0$ et $\alpha < 0$, alors

$${}_{GL}D_a^{\alpha}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right] = {}_{GL}D_a^{\alpha+\beta}f\left[f(t)\right].$$

1.2 : Maintenant on suppose que $0 < n-1 < \alpha < n$, en remarquant que $\alpha = n + (\alpha - n$, alors

$${}_{GL}D_a^{\alpha}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right] = {}_{GL}D^{n+\alpha-n}\left[{}^{GL}D^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right].$$

D'après la relation (3.1), on a :

$${}_{GL}D^{n+\alpha-n}\left[f\left(t\right)\right] = \left(\frac{d}{dx}\right)^n\left({}_{GL}D^{\alpha-n}\left[f\left(t\right)\right]\right),$$

puisque $\alpha - n < 0$ et $\beta < 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
{}_{GL}D_a^{\alpha}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right] &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n\left({}_{GL}D^{\alpha-n}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right]\right) \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^n\left({}_{GL}D^{\alpha-n+\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right) = {}_{GL}D_a^{\alpha+\beta}\left[f\left(t\right)\right].
\end{aligned}$$

Donc si $\beta < 0$ et $\alpha > 0$, alors on a :

$${}_{GL}D_a^{\alpha}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right] = {}_{GL}D_a^{\alpha+\beta}\left[f\left(t\right)\right].$$

Aussi si $\alpha = 0$, alors

$${}_{GL}D_a^{0}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right] = {}_{GL}D_a^{0+\beta}\left[f\left(t\right)\right] = {}_{GL}D_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right].$$

2. Si $\beta > 0$, alors on suppose que $0 < m-1 < \beta < m$ et $\alpha < 0$, on a :

$$_{GL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right] = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(t)}{\Gamma(j-\beta+1)}(t-a)^{j-\beta} + \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_a^t (t-s)^{m-\beta-1} f^{(m)}(s)ds.$$

Maintenant, on applique l'intégrale fractionnaire d'ordre $-\alpha$ ($\alpha < 0$), on trouve

$$\begin{aligned} {}_{GL}D_a^{\alpha}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(t)}{\Gamma(j-\beta+1)}\ {}_{GL}D_a^{\alpha}(t-a)^{j-\beta} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_a^t {}_{GL}D_a^{\alpha}(t-s)^{m-\beta-1} f^{(m)}(s)ds \end{aligned}$$

et et ${}_{GL}D_a^{\alpha}(t-a)^{j-\beta}$ ont des singularités non intégrable, donc l'intégrale fractionnaire ${}_{GL}D_a^{\alpha}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right]$ n'existe que si $f^{(j)}(a) = 0$ pour tout $j = 0, 1, ..., m-2$ et dans ce cas on a :

$$_{GL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right] = \frac{f^{(m-1)}(a)}{\Gamma(m-\beta)}(t-a)^{m-1-\beta} + {}_{GL}D_a^{\beta-m}\left[f^{(m)}(t)\right],$$

avec

$$_{GL}D_a^{\beta-m}\left[f^{(m)}(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_a^t (t-s)^{m-\beta-1} f^{(m)}(s)ds.$$

Alors

$$\begin{aligned} &{}_{GL}D_a^{\alpha}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] \\ &= {}_{GL}D_a^{\alpha}\left[\frac{f^{(m-1)}(a)}{\Gamma(m-\beta)}(t-a)^{m-1-\beta} + {}_{GL}D_a^{\beta-m}\left[f^{(m)}(t)\right]\right] \\ &= {}_{GL}D_a^{\alpha}\left[\frac{f^{(m-1)}(a)}{\Gamma(m-\beta)}(t-a)^{m-1-\beta}\right] + {}_{GL}D_a^{\alpha}\left[{}_{GL}D_a^{\beta-m}\left[f^{(m)}(t)\right]\right] \\ &= \frac{f^{(m-1)}(a)}{\Gamma(m-\beta)}\ {}_{GL}D_a^{\alpha}(t-a)^{m-1-\beta} + {}_{GL}D_a^{\alpha+\beta-m} f^{(m)}\left[f^{(m)}(t)\right] \\ &= \frac{f^{(m-1)}(a)}{\Gamma(m-\beta)} \frac{\Gamma(m-\beta)}{\Gamma(m-\beta-\alpha)}(t-a)^{m-1-\beta-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(-\alpha-\beta+m)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha-\beta+m-1} f^{(m)}(s)\, ds \\ &= \frac{f^{(m-1)}(a)}{\Gamma(m-\beta-\alpha)}(t-a)^{m-1-\beta-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(m-(\alpha+\beta))} \int_a^t (t-s)^{m-(\alpha+\beta)-1} f^{(m)}(s)\, ds \\ &= {}_{GL}D_a^{a+\beta}\left[f(t)\right]. \end{aligned}$$

∎

3. Maintenant si $0 \leq m-1 < \beta < m, 0 \leq n-1 < \alpha < n$ et et la fonction $f(t)$ vérifie les conditions :

$$f^{(j)}(a) = 0, \quad j = 0, 1, ..., r-2. \text{ avec } r = \max(n, m),$$

alors

$$
\begin{aligned}
& {}_{GL}D_a^{\alpha}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] \\
&= {}_{GL}D_a^{n+\alpha-n}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left({}_{GL}D_a^{\alpha-n}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right]\right) \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[{}_{GL}D_a^{\alpha-n+\beta}\left[f(t)\right]\right] = {}_{GL}D_a^{\alpha+\beta}\left[f(t)\right],
\end{aligned}
$$

donc ${}_{GL}D_a^{\alpha}$ et ${}_{GL}D_a^{\beta}$ commutent, ssi

$$f^{(j)}(a) = 0, \quad j = 0, 1, ..., r-2. \text{ avec } r = \max(n, m).$$

■

3.2.2 Composition de l'opérateur ${}_{RL}D^{\alpha}$ et ${}_{RL}I^{\alpha}$

On s'intéresse maintenant à la composition de la dérivée et l'integrale fractionnaires au sens de Riemann-Liouville :

Proposition 3.4 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors*

$$ {}_{RL}D^{\alpha}\left[{}_{RL}I^{\alpha}\left[f(t)\right]\right] = D^n\left[{}_{RL}I^{\alpha-n}\left({}_{RL}I^{\alpha}\left[f(t)\right]\right)\right] = D^n\left[I^n\left[f(t)\right]\right] = f(t). \tag{3.9}$$

Preuve. En utilisant la définition (2.8), on obtient :

$$
\begin{aligned}
& {}_{RL}D^{\alpha}\left[{}_{RL}I^{\alpha}\left[f(t)\right]\right] \\
&= \frac{d^m}{dt^m}\left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1} \; {}_{RL}I^{\alpha}\left[f(s)\right] ds\right] \\
&= \frac{d^m}{dt^m}\left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1}\left(\int_a^t (s-x)^{m-\alpha-1} f(x)\, dx\right) ds\right] \\
&= \frac{d^m}{dt^m}\left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_a^t f(x)\, dx \int_x^t (t-s)^{m-\alpha-1}(s-x)^{m-\alpha-1} ds\right].
\end{aligned}
$$

On pose

$$I = \int_x^t (t-s)^{m-\alpha-1}(s-x)^{m-\alpha-1} ds,$$

et $s = t - y(t-x)$ ce qui donne $ds = -(t-x)\,dy$, alors

$$
\begin{aligned}
I &= \int_x^t (t-s)^{m-\alpha-1}(s-x)^{m-\alpha-1} ds \\
&= -\int_1^0 y^{m-\alpha-1}(t-s)^{m-\alpha-1}(1-y)^{\alpha-1}(t-x)^{\alpha-1}(t-x)\, dy \\
&= (t-s)^{m-1}\int_0^1 y^{m-\alpha-1}(1-y)^{\alpha-1} dy \\
&= (t-s)^{m-1} B(m-\alpha, \alpha) = (t-s)^{m-1}\frac{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(m+1)},
\end{aligned}
$$

donc

$$\begin{aligned} {}_{RL}D^{\alpha}\left[{}_{RL}I^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right] &= \frac{d^{m}}{dt^{m}}\left[\frac{1}{\Gamma\left(m\right)}\int_{a}^{t}\left(t-s\right)^{m-1}f\left(x\right)dx\right] \\ &= f\left(t\right) = {}_{RL}D^{m}\left[{}_{RL}I^{m}\left[f\left(t\right)\right]\right], \end{aligned}$$

et comme : ${}_{RL}I^{\alpha-n}\left({}_{RL}I^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right)$, alors

$${}_{RL}D^{\alpha}\left[{}_{RL}I^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right] = D^{n}\left[{}_{RL}I^{\alpha-n}\left({}_{RL}I^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right)\right] = D^{n}\left[I^{n}\left[f\left(t\right)\right]\right] = f\left(t\right).$$

■

3.2.3 Composition de l'opérateur ${}_{RL}I^{\alpha}$ et ${}_{RL}D^{\alpha}$

Proposition 3.5 *Soient $f \in C([a,b))$ et $n-1<\alpha<n, n\in\mathbb{N}^{*}$. Alors*

$${}_{RL}I_{a}^{\alpha}\left[{}_{RL}D_{a}^{\alpha}f\left(t\right)\right] = f\left(t\right) - \sum_{i=1}^{n}\ {}_{RL}D_{a}^{\alpha-i}\left[f\left(t\right)\right]_{t=a}\frac{\left(t-a\right)^{\alpha-i}}{\Gamma\left(\alpha-i+1\right)}, \tag{3.10}$$

où les c_i $(i=1.2,....,n)$ sont des constantes quelconques.

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} {}_{RL}I_{a}^{\alpha}\left[{}_{RL}D_{a}^{\alpha}f\left(t\right)\right] &= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_{a}^{t}\left(t-s\right)^{\alpha-1}\ {}_{RL}D_{a}^{\alpha}\left[f\left(s\right)\right]ds \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\int_{a}^{t}\left(t-s\right)^{\alpha}\ {}_{RL}D_{a}^{\alpha}\left[f\left(s\right)\right]ds\right), \end{aligned}$$

on pose

$$I = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\int_{a}^{t}\left(t-s\right)^{\alpha}\ {}_{RL}D_{a}^{\alpha}\left[f\left(s\right)\right]ds.$$

En faisant des intégration par parties répétées, on obtient

$$I = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^t (t-s)^{\alpha} \left(\frac{d}{dt}\right)^i \ {}_{RL}D_a^{-(i-\alpha)} f(s)\, ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha-k+1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-k} \left\{{}^{RL}D_a^{-(k-\alpha)} f(t)\right\} dt$$

$$- \sum_{j=1}^{k} \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{k-j} \left({}^{RL}D_a^{-(k-\alpha)} f(x)\right)\right]_{x=a} \frac{(x-a)^{\alpha-j+1}}{\Gamma(2+\alpha-j)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha-k+1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-k} \left\{{}^{RL}D_a^{-(k-\alpha)} f(t)\right\} dt$$

$$- \sum_{j=1}^{k} \left[{}^{RL}D_a^{\alpha-j} f(x)\right]_{x=a} \frac{(x-a)^{\alpha-j+1}}{\Gamma(2+\alpha-j)}$$

$$= {}^{RL}D_a^{-(\alpha-k+1)} \left({}^{RL}D_a^{-(k-\alpha)} f(x)\right)$$

$$- \sum_{j=1}^{k} \left[{}^{RL}D_a^{\alpha-j} f(x)\right]_{x=a} \frac{(x-a)^{\alpha-j+1}}{\Gamma(2+\alpha-j)}$$

$$= {}^{RL}D_a^{-1} f(x) - \sum_{j=1}^{k} \left[{}^{RL}D_a^{\alpha-j} f(x)\right]_{x=a} \frac{(x-a)^{\alpha-j+1}}{\Gamma(2+\alpha-j)}$$

d'où

$${}_{RL}I_a^{\alpha} \left[{}_{RL}D_a^{\alpha} \left[f(t)\right]\right]$$

$$= \frac{d}{dx} \left({}_{RL}D_a^{-1} f(t) - \sum_{i=1}^{n} \ {}^{RL}D_a^{\alpha-i} \left[f(t)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-i+1}}{\Gamma(2+\alpha-i)} \right)$$

$$= f(t) - \sum_{i=1}^{n} \ {}_{RL}D_a^{\alpha-i} \left[f(t)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-i}}{\Gamma(\alpha-i+1)}.$$

■

3.2.4 Composition de l'opérateur ${}_{RL}D^{\alpha}$ et ${}_{RL}I^{\beta}$

Proposition 3.6 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors :*

1. *Si $0 \leq \beta < \alpha$, alors la dérivée ${}_{RL}D_a^{\alpha-\beta}[f(t)]$ existe et*

$${}_{RL}D_a^{\alpha}\left[{}_{RL}I_a^{\beta}[f(t)]\right] = {}_{RL}D_a^{\alpha-\beta}[f(t)]. \tag{3.11}$$

2. *Si* $0 \leq \alpha < \beta$, *alors on a :*

$$ {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[{}_{RL}I_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = {}_{RL}D_a^{\beta-\alpha}\left[f(t)\right]. \tag{3.12}$$

3. *Si* $m-1 < \beta < m$, *alors on a :*

$$ {}_{RL}I_a^{\alpha}\left[{}_{RL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = {}_{RL}D_a^{\beta-\alpha}\left[f(t)\right] - \sum_{k=1}^{j}\left[{}_{RL}D_a^{\beta-k}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(1+\alpha-k)}. \tag{3.13}$$

Preuve. 1 Si $0 \leq \beta < \alpha$, alors $< m-1 < \alpha < m, n-1 < \alpha-\beta < n$, et en utilise (2.3) et (2.25), on trouve :

$$ {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[{}_{RL}I_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = \left(\frac{d}{dt}\right)^m\left({}_{RL}I_a^{m-\alpha}\left[{}_{RL}I_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right]\right)$$

$$ = \left(\frac{d}{dx}\right)^m\left({}_{RL}I_a^{m-(\alpha-\beta)}\left[f(t)\right]\right).$$

Puisque $m \geq n$, alors il existe un $j \in \mathbb{N}$ tq $m = n+j$, et on peut écrire

$$ {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[{}_{RL}I_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right]$$

$$ = \left(\frac{d}{dt}\right)^m\left({}_{RL}I_a^{m-(\alpha-\beta)}\left[f(t)\right]\right) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{j+n}\left({}_{RL}I_a^{j+n-(\alpha-\beta)}\left[f(t)\right]\right)$$

$$ = \left(\frac{d}{dt}\right)^n\left(\frac{d}{dt}\right)^j\left({}_{RL}I_a^{j}\left[{}_{RL}I_a^{n-(\alpha-\beta)}\left[f(t)\right]\right]\right)$$

$$ \left(\frac{d}{dt}\right)^n\left(\frac{d}{dt}\right)^j\left({}_{RL}I_a^{0}\left[{}_{RL}I_a^{n-(\alpha-\beta)}\left[f(t)\right]\right]\right)$$

$$ = \left(\frac{d}{dt}\right)^n\left({}_{RL}I_a^{n-(\alpha-\beta)}\left[f(t)\right]\right) = {}_{RL}D_a^{\alpha-\beta}\left[f(t)\right],$$

donc

$$ {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[{}_{RL}I_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = {}_{RL}D_a^{\alpha-\beta}\left[f(t)\right].$$

2.Maintenant pour le cas $0 \leq \alpha < \beta$, on a

$$ {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[{}_{RL}I_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[{}_{RL}I_a^{\alpha}\left[{}_{RL}I_a^{\beta-\alpha}\left[f(t)\right]\right]\right]$$

$$ = {}_{RL}I_a^{\alpha-\alpha}\left[\left[{}_{RL}I_a^{\beta-\alpha}\left[f(t)\right]\right]\right] = {}_{RL}I_a^{0}\left[\left[{}_{RL}I_a^{\beta-\alpha}\left[f(t)\right]\right]\right]$$

$$ = {}_{RL}I_a^{\beta-\alpha}\left[f(t)\right],$$

donc

$$ {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[{}_{RL}I_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = {}_{RL}I_a^{\beta-\alpha}\left[f(t)\right].$$

3. Pour $m-1<\beta<m$, on a :

$$\begin{aligned}
{}_{RL}I_a^{\alpha}\left[{}_{RL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] &= {}_{RL}D_a^{\beta-\alpha}\left[{}_{RL}I_a^{\beta}\left[{}_{RL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right]\right] \\
&= {}_{RL}D_a^{\beta-\alpha}\left\{f(t)-\sum_{k=1}^{j}\left[{}_{RL}D_a^{\beta-k}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{\beta-k}}{\Gamma(\beta-k+1)}\right\} \\
&= {}_{RL}D_a^{\beta-\alpha}f(t)-\sum_{k=1}^{j}\left[{}_{RL}D_a^{\beta-k}f(t)\right]_{t=a}\frac{{}_{RL}D_a^{\beta-\alpha}(t-a)^{\beta-k}}{\Gamma(\beta-k+1)} \\
&= {}_{RL}D_a^{\beta-\alpha}f(t)-\sum_{k=1}^{j}\left[{}_{RL}D_a^{\beta-k}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(1+\alpha-k)},
\end{aligned}$$

d'où

$${}_{RL}I_a^{\alpha}\left[{}_{RL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = {}_{RL}D_a^{\beta-\alpha}f(t)-\sum_{k=1}^{j}\left[{}_{RL}D_a^{\beta-k}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(1+\alpha-k)},$$

■

3.2.5 Composition de l'opérateur ${}_{RL}D_a^{\alpha}$ et ${}_{RL}D_a^{\beta}$

Maintenant on s'intéresse à la composition de deux dérivées d'ordre fractionnaires au sens de Riemann-Liouville :

Proposition 3.7 *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue et $m-1<\alpha<m$, $n-1<\beta<n$, alors on a :*

$${}_{RL}D_a^{\alpha}\left[{}_{RL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = {}_{RL}D_a^{\alpha+\beta}f(t)-\sum_{j=1}^{n}\left[{}_{RL}D_a^{\beta-j}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\alpha-j}}{\Gamma(1-\alpha-j)}, \tag{3.14}$$

et

$${}_{RL}D_a^{\beta}\left[{}_{RL}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right] = {}_{RL}D_a^{\alpha+\beta}f(t)-\sum_{j=1}^{m}\left[{}_{RL}D_a^{\alpha-j}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\beta-j}}{\Gamma(1-\beta-j)}. \tag{3.15}$$

Preuve. En utilisant les relations (2.24), (3.3), et (3.11), on trouve :

$$\begin{aligned}
&{}_{RL}D_a^{\alpha}\left[{}_{RL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] \\
&= \left(\frac{d}{dt}\right)^m\left({}_{RL}I^{m-\alpha}\left[{}_{RL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right]\right) \\
&= \left(\frac{d}{dt}\right)^m\left(\sum_{k=1}^{n}\left[{}_{RL}D_a^{\beta-k}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{m-\alpha-t}}{\Gamma(m-\alpha-t+1)}\right) \\
&= {}_{RL}D_a^{\alpha+\beta}f(t)-\sum_{k=1}^{n}\left[{}_{RL}D_a^{\beta-k}f(t)\right]_{t=a}\left(\frac{d}{dt}\right)^m\frac{(t-a)^{m-\alpha-k}}{\Gamma(m-\alpha-k+1)} \\
&= {}_{RL}D_a^{\alpha+\beta}f(t)-\sum_{k=1}^{n}\left[{}_{RL}D_a^{\beta-k}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma(1-\alpha-k)},
\end{aligned}$$

donc

$$ {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[{}_{RL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = {}_{RL}D_a^{\alpha+\beta}f(t) - \sum_{j=1}^{n}\left[{}_{RL}D_a^{\beta-j}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\alpha-j}}{\Gamma(1-\alpha-j)}. $$

Si on interchange α et β (aussi m et n) , on trouve :

$$ {}_{RL}D_a^{\beta}\left[{}_{RL}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right] = {}_{RL}D_a^{\alpha+\beta}f(t) - \sum_{j=1}^{m}\left[{}_{RL}D_a^{\alpha-j}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\beta-j}}{\Gamma(1-\beta-j)}. $$

■

3.3 Règle de Leibniz pour les dérivées fractionnaires

Pour n entier on a :

$$ \left(\frac{d}{dt}\right)^{n}(f(t)\,g(t)) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f(t)^{(j)}\,g(t)^{n-j}. \tag{3.16} $$

La généralisation de la formule (3.16) est donnée par :

Soit f une fonction continue dans $[a,b]$ et $g \in C^{n+1}$ $(n \geq \alpha+1)$ dans $[a,b]$, alors la dérivée fractionnaire du produit $g.f$ est donnée par

$$ {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[(f(t)\,g(t))\right] = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f^{(k)}(t)_{RL}\,D_a^{\alpha-j}g(t) - R_n^{\alpha}(t), \tag{3.17} $$

où

$$ R_n^{\alpha}(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{-\alpha-1}\,g(t)\,dt\int_t^x f^{(n+1)}(s)\,(t-s)^{n}\,ds. \tag{3.18} $$

L'égalité (1.23) peut être considéré comme une somme partielle d'une série infinie et $R_n^{\alpha}(t)$ comme un reste de la série.

En faisant le changement de variable suivant :

$$ s = t - y\,(x-t) \quad \text{et} \quad t = a + \mu\,(x-a), $$

on peut avoir : $\lim_{n\to\infty} R_n^{\alpha}(t) = 0$. Alors on peut deduire que si $f(t)$ et $g(t)$ ainsi que tous ses dérivées sont continues dans $[a,t]$, sous cette condition, la règle de Leibniz pour la dérivation fractionnaire prend la forme suivante :

$$ {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[(f(t)\,g(t))\right] = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f^{(k)}(t)_{RL}\,D_a^{\alpha-j}g(t). $$