Chapitre 2

Intégrales et dérivées fractionnaires

2.1 Intégrale d'ordre arbitraire

2.1.1 Formule de Cauchy pour l'intégration successive

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$, avec $-\infty < a < t < b < +\infty$. Une primitive de f est donnée par :

$$I_a^1 [f(t)] = \int_a^t f(s)\, ds.$$

Pour une primitive seconde et d'aprés le théorème de Fubini, on aura :

$$\begin{aligned} I_a^2 [f(t)] &= \int_a^t I_a^1 [f(s)]\, ds = \int_a^t \left(\int_a^s f(\tau)\, d\tau \right) ds \\ &= \int_a^s f(\tau)\, d\tau \int_a^t ds = \int_a^t (t-s) f(s)\, ds, \end{aligned}$$

et pour une primitive triple, on aura :

$$\begin{aligned} I_a^3 [f(t)] &= \int_a^t ds_1 \int_a^{s_1} ds_2 \int_a^{s_2} f(s_3)\, ds_3 = \int_a^t ds_1 \int_a^{s_1} (s_1 - s_2) f(s_2)\, ds_2 \\ &= \frac{1}{(3-1)!} \frac{1}{2!} \int_a^t (t-s)^{3-1} f(s)\, ds = \frac{1}{2!} \int_a^t (t-s)^2 f(s)\, ds \\ &= \frac{1}{2} \int_a^t (t-s)^2 f(s)\, ds. \end{aligned}$$

Dans le cas général pour tout entier n et par récurrence, on btient la formule de Cauchy :

$$\begin{aligned} I_a^n [f(t)] &= \int_a^t ds_1 \int_a^{s_1} ds_2 \int_a^{s_2} ds_3 ... \int_a^{s_{n-1}} f(s_n)\, ds_n \qquad (2.1) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s)\, ds, \;\; n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

En généralisant la formule (2.1) à un ordre réel positif et en remplaçant la fonction factorielle par la fonction Gamma on aura la définition de l'intégral fractionnaire de Riemann-Liouville.

2.1.2 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 2.1 *L'opérateur intégral fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \geq 0$, pour une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est défini par :*

$$\begin{cases} {}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[f(t)\right] = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds; \ t > a, \ \alpha > 0, \\ \\ I_a^0\left[f(t)\right] = f(t), \ \alpha = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

Remarque 2.1 *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville peut notamment s'écrire sous forme de produit de convolution de la fonction puissance $\varphi_{\alpha}(t) = \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ et $f(t)$.*

$${}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[f(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds = \varphi_{\alpha}(t) * f(t).$$

Exemple 2.1 *Calculer l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction suivante :*

$$f(t) = (t-a)^{\beta}, \ \beta > -1.$$

En utilisant la définition (2.2)*, on obtient :*

$${}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^{\beta}\, ds.$$

En effectuant le changement de variable $s = a + (t-a)\, y$ et en utilisant la fonction Bêta il résulte que :

$$\begin{aligned} {}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^{\beta}\, ds. \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-a-y(t-a))^{\alpha-1} (y(t-a))^{\beta} (t-a)\, dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha} B(\alpha, \beta+1) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\beta+\alpha}, \end{aligned}$$

donc

$${}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\alpha+\beta}.$$

Pour $\alpha = 1$ *et* $\beta = 1$, *on a :*

$$_{R.L}I_a^1\left[(t-a)\right] = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3)}(t-a)^2 = \frac{1}{2}(t-a)^2,$$

et pour $\alpha = \frac{1}{2}$, *on a :*

$$_{R.L}I_a^{\frac{1}{2}}\left[(t-a)^\beta\right] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}+1\right)}(t-a)^{\beta+\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\beta+\frac{3}{2}\right)}(t-a)^{\beta+\frac{1}{2}}.$$

Si $f(x) = c$, *alors*

$$_{R.L}I_a^\alpha\left[f(t)\right] = I^\alpha[c] = \frac{c}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^\alpha.$$

Exemple 2.2 *Calculer l'intégrale fractionnaire de Riemann Liouville d'ordre* $\alpha = \frac{1}{2}$ *de la fonction :* $f(t) = \ln t, t > 0$.

On a :

$$I_0^{\frac{1}{2}}[\ln t] = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\ln s ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\ln s}{\sqrt{t-s}}ds.$$

On pose $\sqrt{t-s} = x$, *alors* $ds = -2xdx$,

$$\begin{aligned} I_0^{\frac{1}{2}}[\ln t] &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{t}}^0 \frac{-2x\ln(t-x^2)}{x}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{t}}^0 -2\ln\left(t-x^2\right)dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{t}}^0 \left(\ln\left(\sqrt{t}+x\right)+\ln\left(\sqrt{t}-x\right)\right)dx. \end{aligned}$$

On sait que :

$$\begin{aligned} \int \ln\left(\sqrt{t}+x\right)dx &= \left(\sqrt{t}+x\right)\ln\left(\sqrt{t}+x\right) - x + cte, \\ \int \ln\left(\sqrt{t}-x\right)dx &= \left(-\sqrt{t}+x\right)\ln\left(\sqrt{t}-x\right) - x + cte, \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} I_0^{\frac{1}{2}}[\ln t] &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\left(\sqrt{t}+x\right)\ln\left(\sqrt{t}+x\right) - x\right]_0^{\sqrt{t}} \\ &\quad + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\left(-\sqrt{t}+x\right)\ln\left(\sqrt{t}-x\right) - x\right]_0^{\sqrt{t}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[2\sqrt{t}\ln 2\sqrt{t} - \sqrt{t} - \sqrt{t}\ln\sqrt{t}\right] + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[-\sqrt{t}+\sqrt{t}\ln\sqrt{t}\right] \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left[\sqrt{t}\ln 2\sqrt{t} - \sqrt{t}\right] = \frac{-4+4\ln 2}{\sqrt{\pi}} + \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}\ln\sqrt{t}. \end{aligned}$$

Exemple 2.3 *Calculer l'intégrale fractionnaire de Riemann Liouville de la fonction :* $f(t) = e^t$.

On a :

$$_{R.L}I_0^{\alpha}\left[f(t)\right] = {}_{R.L}I_0^{\alpha}\left[e^t\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^s ds,$$

Si on pose, $x = t - s$, *on aura :*

$$_{R.L}I_a^{\alpha}\left[e^t\right] = \frac{et}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t x^{\alpha-1}e^{-x}dx,$$

Maintenant, on intégre par parties, on obtient :

$$_{R.L}I_0^{\alpha}\left[e^t\right] = \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{t^{\alpha+3}}{\Gamma(\alpha+3)} + ... = \sum_{n\geq 0}\frac{t^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha+n+1)}.$$

Proposition 2.1 *soient* $f \in C([a,b])$ *et* $\alpha > 0$. *Alors*

$$\lim_{t \overset{>}{\to} a} {}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[f(t)\right] = 0.$$

Preuve. Par (2.2), on a :

$$_{R.L}I_a^{\alpha}\left[f(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds,$$

alors

$$\begin{aligned} \left|{}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\left|f(s)\right| ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\left\|f\right\|_{\infty} ds \\ & \frac{\left\|f\right\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^{\alpha}, \end{aligned}$$

le second membre de l'inégalité précédente tend vers 0 lorsque t tend vers a.

Donc on peut déduire que

$$\lim_{t \overset{>}{\to} a} {}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[f(t)\right] = 0.$$

■

Proposition 2.2 *Pour l'existence de l'opérateur* $_{R.L}I_a^{\alpha}$ *on doit avoir* $\alpha > 0$. *De plus, sous certaines hypotèses raisonnables*

$$\lim_{t \to 0^+} {}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[f(t)\right] = f(t).$$

Preuve. Pour $f \in C^1([a,b))$ et par une intégration par parties, on trouve :

$$_{R.L}I_a^\alpha[f(t)] = \frac{(t-a)^\alpha f(a)}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t (t-x)^\alpha f'(x)dx,$$

alors

$$\lim_{\alpha\longrightarrow 0^+} {}_{R.L}I_a^\alpha[f(t)] = f(a) + \int_a^t f'(x)dx$$

$$= f(a) + f(t) - f(a) = f(t).$$

Si $f \in C^0([a,b))$, on transforme $_{R.L}I_a^\alpha[f(t)]$ sous la forme suivante :

$$_{R.L}I_a^\alpha[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}[f(x)-f(t)+f(t)]\,dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(f(x)-f(t))\,dx + \frac{f(t)}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t-\delta} (t-x)^{\alpha-1}(f(x)-f(t))\,dx$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t-\delta}^t (t-x)^{\alpha-1}(f(x)-f(t))\,dx + \frac{f(t)}{\Gamma(\alpha+1)}(t-x)^\alpha.$$

Alors

$$\left| {}_{R.L}I_a^\alpha[f(t)] - \frac{f(t)}{\Gamma(\alpha+1)}(t-x)^\alpha \right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t-\delta} (t-x)^{\alpha-1}\left|(f(x)-f(t))\right|dx$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t-\delta}^t (t-x)^{\alpha-1}(f(x)-f(t))\,dx.$$

On pose

$$I_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t-\delta} (t-x)^{\alpha-1}(f(x)-f(t))\,dx,$$

et

$$I_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x-\delta}^t (t-x)^{\alpha-1}(f(x)-f(t))\,dx,$$

et on considère l'intégrale I_2. puisque f est continue :

$$\forall x,t \in [a,b), \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0\,|x-t|<\delta \Longrightarrow |f(t)-f(t)|<\varepsilon,$$

ce qui entraine :

$$
\begin{aligned}
|I_2| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x-\delta}^{t}(t-x)^{\alpha-1}\left(f(x)-f\left(t\right)\right)dx\right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)}\int_{t-\delta}^{t}(t-x)^{\alpha-1}dx \leq \varepsilon\frac{\delta^{a}}{\Gamma(\alpha+1)}.
\end{aligned}
$$

Pour tout $\alpha \geq 0$ et $\delta > 0$ fixé, on obtient :

$$
\begin{aligned}
|I_1| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{t-\delta}(t-x)^{\alpha-1}\left|\left(f(x)-f\left(t\right)\right)\right|dx \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{t-\delta}(t-x)^{\alpha-1}\left(\left|f(x)\right|+\left|f\left(t\right)\right|\right)dx \\
&\leq \frac{2\sup_{y\in[a,t]}\left|f\left(y\right)\right|}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{t-\delta}(t-x)^{\alpha-1}dx \leq \frac{2M}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{t-\delta}(t-x)^{\alpha-1}dx \\
&< \frac{2M}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\delta^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}\right).
\end{aligned}
$$

où $M = \sup_{y\in[a,t]}\left|f\left(y\right)\right|$. Maintenant, on considère

$$
\left|{}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]-\frac{(t-x)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}f\left(t\right)\right| \leq |I_1|+|I_2|,
$$

ce qui implique

$$
\left|{}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]-\frac{(t-x)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}f\left(t\right)\right| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\varepsilon\delta^{a}+2M\left(\delta^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}\right)\right),
$$

en faisant tendre vers 0^{+}, on obtient :

$$
\left|{}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]-\frac{(t-x)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}f\left(t\right)\right| \leq \varepsilon,
$$

autrement dit :

$$
\lim_{\alpha\longrightarrow 0^{+}}\left|{}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]-f\left(t\right)\right| \leq \varepsilon,
$$

ce qui implique

$$
\lim_{\alpha\longrightarrow 0^{+}} I_a^{\alpha}f\left(t\right) = f\left(t\right).
$$

■

Proposition 2.3 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, pour tout $\alpha > 0$, $\beta > 0$, on a :*

$$
\begin{aligned}
(1).\ I_a^{\alpha}\left[I_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right] &= I_a^{\alpha+\beta}\left[f\left(t\right)\right], \\
(2).\ I_a^{\alpha}\left[I_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right] &= I_a^{\beta}\left[I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right],
\end{aligned}
$$

Preuve. En effet :

$$I_a^{\alpha}\left[I^{\beta}f(t)\right]=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} I^{\beta}f(\tau)\,d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t \left[(t-\tau)^{\alpha-1}\int_a^{\tau}(\tau-x)^{\beta-1}f(x)\,dx\right]d\tau\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^{\tau}\left[(t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-x)^{\beta-1}f(x)\right]dxd\tau\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t \left[f(x)\int_t^x (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-x)^{\beta-1}d\tau\right]dx,
\end{aligned}$$

si on pose : $\tau=x+(t-x)\,y$, alors

$$\int_t^x (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-x)^{\alpha-1}d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 (t-x-(t-x)\,y)^{\alpha-1}(x+(t-x)\,y-x)^{\beta-1}(t-x)\,dy\\
&= (t-x)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1(1-y)^{\alpha-1}y^{\beta-1}dy=B(\alpha,\beta)\,(t-x)^{\alpha+\beta-1},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
{}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[I_a^{\beta}f(t)\right] &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-x)^{\alpha+\beta-1}f(x)\,dx\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t (t-x)^{\alpha+\beta-1}f(x)\,dx = {}_{R.L}I^{\alpha+\beta}f(t).
\end{aligned}$$

Maintenant pour démonterer (2), en utilisant la propriété précédente (1). Alors :

$$I_a^{\alpha}\left[I_a^{\beta}[f(t)]\right]=I_a^{\alpha+\beta}[f(t)]=I_a^{\beta+\alpha}[f(t)]=I_a^{\beta}\left[I_a^{\alpha}[f(t)]\right].$$

■

Exemple 2.4 *1. Si on prend : $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ et $f(t)=t$, on trouve :*

$${}_{R.L}I_0^{\alpha}\left[I_0^{\beta}[f(t)]\right]$$

$$\begin{aligned}
&= {}_{R.L}I_0^{\alpha}\left[\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\beta+2)}t^{\beta+1}\right] = {}_{R.L}I_0^{\alpha}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}t^{\frac{3}{2}}\right]\\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}{\Gamma(\alpha+2)}t^{\alpha+\frac{3}{2}}\right]=\frac{1}{2}t^2.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$${}_{R.L}I_0^{\alpha+\beta}f(t) = {}_{R.L}I_0^{1}f(t)=\int_0^t tdt=\frac{1}{2}t^2.$$

Proposition 2.4 *Pour toute fonction continue f, on a :*

$$\frac{dt}{t}\left({}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right) = {}_{R.L}I^{\alpha-1}\left[f\left(t\right)\right],\ \alpha > 1.$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{t}\left({}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right) &= \frac{dt}{t}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_a^t \left(t-s\right)^{\alpha-1} f\left(s\right) ds\right) \\
& \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\frac{dt}{t}\left(\int_a^t \left(t-s\right)^{\alpha-1} f\left(s\right) ds\right),
\end{aligned}$$

puisque $\left(t-s\right)^{\alpha-1}$ et $f\left(s\right)$ sont continues, alors $s \to \left(t-s\right)^{\alpha-1} f\left(s\right)$ est continue, et on a :

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{t}\left({}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right) &= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_a^t \frac{dt}{t}\left(t-s\right)^{\alpha-1} f\left(s\right) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_a^t \left(\alpha-1\right)\left(t-s\right)^{\left(\alpha-1\right)-1} f\left(s\right) ds \\
&= \frac{\left(\alpha-1\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_a^t \left(t-s\right)^{\left(\alpha-1\right)-1} f\left(s\right) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha-1\right)}\int_a^t \left(t-s\right)^{\left(\alpha-1\right)-1} f\left(s\right) ds \\
&= {}_{R.L}I_a^{\alpha-1}\left[f\left(t\right)\right].
\end{aligned}$$

En générale, on a :

$$\frac{dt}{t}\left({}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right) \neq {}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[\frac{dt}{t}\left(f\left(t\right)\right)\right].$$

■

Théorème 2.1 *Soient f une fonction continue sur $I = [0,b)$ et $\alpha > 0$. Si $\frac{dt}{t}\left(f\left(t\right)\right)$ est continue alors pour tout $t > 0$, on a :*

$$\frac{dt}{t}\left({}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right) = {}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[\frac{dt}{t}\left(f\left(t\right)\right)\right] + \frac{f\left(0\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)}t^{\alpha-1}.$$

Preuve. Par la relation (2.2), on a :

$${}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right] = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^t \left(t-s\right)^{\alpha-1} f\left(s\right) ds,$$

en faisant le changement de variable : $s = t - x^{\beta}$ avec $\beta = \frac{1}{\alpha}$,

ce qui implique

$$ds = -\beta x^{\beta} dx,$$

alors

$$ {}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right] = -\frac{\beta}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_{x^{\beta}}^{0}\left(x^{\beta}\right)^{\alpha-1}f\left(t-x^{\beta}\right)x^{\beta}dx, $$

qui se réduit à

$$ \begin{aligned} {}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right] &= -\frac{1}{\alpha\Gamma\left(\alpha\right)}\int_{t^{\alpha}}^{0}f\left(t-x^{\beta}\right)dx \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\int_{0}^{t^{\alpha}}f\left(t-x^{\beta}\right)dx, \end{aligned} $$

Maintenant en utilisant la règle de Leibniz :

$$ \frac{ds}{s}\left(\int_{0}^{a(s)}f\left(s,t\right)dt\right) = f\left(s,a\left(s\right)\right)a^{'}\left(s\right) + \int_{0}^{a(s)}\frac{ds}{s}f\left(s,t\right)dt. $$

Alors

$$ \frac{dt}{t}\left({}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\left(f\left(0\right)\alpha t^{\alpha-1} + \int_{0}^{t^{\alpha}}\frac{dt}{t}f\left(t-x^{\beta}\right)dx\right). $$

Maintenant, on remplace dx par $-\frac{1}{\beta}x^{1-\beta}ds$, on trouve :

$$ \frac{dt}{t}\left({}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right) = \frac{f\left(0\right)}{\alpha\Gamma\left(\alpha\right)}\alpha t^{\alpha-1} - \int_{t}^{0}\frac{dt}{t}f\left(s\right)\frac{1}{\beta}x^{1-\beta}ds. $$

Cela voudra dire que

$$ \frac{dt}{t}\left({}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right) = \frac{f\left(0\right)}{\alpha\Gamma\left(\alpha\right)}\alpha t^{\alpha-1} + \int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{\alpha-1}\frac{dt}{t}f\left(s\right)ds. $$

ce qui implique donne

$$ \frac{dt}{t}\left({}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right) = {}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[\frac{dt}{t}\left(f\left(t\right)\right)\right] + \frac{f\left(0\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)}t^{\alpha-1}. $$

■

2.2 Dérivées d'ordre arbitraire

La notion de dérivée d'ordre arbitraire (non entier) est une généralisation du concept de la diférentiation d'ordre entier. Il y a beaucoup d'approches pour la dérivation fractionnaire. Dans ce chapitre, on s'intéresse aux quatres méthodes de dérivation les plus utilisées : la dérivée de Riemann-Liouville, la dérivée de Caputo et celle de Grünwald-Letnikov.

2.2.1 Dérivée fractionnaire au sens Grünwald-Letnikov

L'idée de cette approche est de généraliser la définition classique de la dérivation d'ordre entièr d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraires.

Pour une fonction f donnée, la dérivée première $(D^1 f)$ de la fonction f est définie par :

$$D^1 f(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = f^{(1)}(x).$$

Aussi, on peut définir la dérivée deuxième comme suit :

$$D^2 f(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f^{(1)}(t) - f^{(1)}(t-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}.$$

La troisième dérivée de f est donneé par :

$$D^3 f(t) = \frac{d^3 f(t)}{dt^3} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3}.$$

Par récurrence, la dérivée d'ordre n de f est donnée par la formule suivante :

$$D^n f(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i f(t - ih) \tag{2.11}$$

avec

$$C_n^i = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(n-i+1)} = \frac{n(n-1)....(n-i+1)}{i!}.$$

On peut généraliser la formule (2.11) pour α d'ordre non entier $(n- < \alpha < n)$.

On remarquant que :

$$\begin{aligned}(-1)^i C_n^i &= (-1)^i \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(n-i+1)} = (-1)^i \frac{n(n-1)....(n-i+1)}{i!} \\ &= (-1)^i \frac{n(n-1)....(n-i+1)(\alpha-i)!}{i!(\alpha-i)!} = \frac{-n(-n+1)....(i-n+1)}{\Gamma(i+1)} \\ &\frac{\Gamma(i-\alpha)}{\Gamma(i+1)\Gamma(-\alpha)}.\end{aligned}$$

Alors, on peut définir la dérivée d'ordre α.

Définition 2.2 *(Dérivée d'ordre α) Soit $f \in C^0([a,b])$, la dérivée fractionnaire d'ordre α $(\alpha \in]n-1, n[)$ au sens de Grünwald-Letnikov de la fonction f est donneé par :*

$${}_{GL}D_a^\alpha [f(t)] = \lim_{h \longrightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{i=0}^{n} \frac{\Gamma(i-\alpha)}{\Gamma(i+1)\Gamma(-\alpha)} f(t - ih). \tag{2.12}$$

Si f est de classe C^n, alors en utilisant une intégration par parties, on obtient :

$$ {}_{GL}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)(t-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}\left(s\right) ds. \tag{2.13} $$

Pour $a = 0$, on obtien :

$$ {}_{GL}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)t^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}\left(s\right) ds. $$

Exemple 2.5 *Calculer l'intégrale fractionnaire de Grünwald-Letnikov d'ordre α de la fonction suivante :*

$$ f\left(t\right) = \left(t-a\right)^{\beta}. $$

Soit α est un nombre non entier positif tel que $n-1 < \alpha < n$ avec $\beta > n-1$, alors

$$ f^{(m)}\left(a\right) = 0, \;\; m = 0, 1, 2, ..., n-1, $$

et

$$ f^{(n)}\left(t\right) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} \left(t-a\right)^{\beta-n}, $$

d'où

$$ {}_{GL}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} \left(s-a\right)^{\beta-n} ds, $$

En faisant le changement de variable $s = a + y\left(t-a\right)$ on trouve :

$$ \begin{aligned} {}_{GL}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right] &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} \left(s-a\right)^{\beta-n} ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_0^1 (1-y)^{n-\alpha-1} \left(t-a\right)^{\beta-\alpha} y^{\beta-n} dy \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \left(t-a\right)^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-y)^{n-\alpha-1} y^{\beta-n} dy \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)\beta\left(n-\alpha, \beta-n+1\right)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \left(t-a\right)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma\left(\beta-\alpha+1\right)} \left(t-a\right)^{\beta-\alpha} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\beta-\alpha+1\right)} \left(t-a\right)^{\beta-\alpha}. \end{aligned} $$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = 1$, on a :

$$ {}_{GL}D_a^{\frac{1}{2}}\left[(t-a)\right] = \frac{\Gamma(2)}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(t-a\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{(t-a)}. $$

Remarque 2.2 *En générale la dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov n'est pas nulle ni constante.*

Si $f(t) = c$ et α non entier positif, alors :

$$f^{(m)}(a) = 0,\ \ m = 0, 1, 2, ..., n.$$

On utilise la formule (2.13), on obtient :

$$\begin{aligned} {}_{GL}D_a^{\alpha}[f(t)] &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)(t-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\, ds \\ &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

2.2.2 Intégrale fractionnaire au sens Grünwald-Letnikov

L'intégrale fractionnaire au sens Grünwald-Letnikov se traduit par l'expression suivante :

$${}_{GL}I_a^{\alpha}[f(t)] = {}_{GL}D_a^{-\alpha}[f(t)] = \lim_{h\longrightarrow 0} h^{\alpha} \sum_{i=0}^{n} \frac{\Gamma(i+\alpha)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\alpha)} f(t-ih). \qquad (2.14)$$

Cas particuliers :

Pour $\alpha = 1,$ on a :

$${}_{GL}I_a^{1}[f(t)] = \lim_{h\longrightarrow 0} h \sum_{i=0}^{n} \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(1)} f(t-ih) = \lim_{h\longrightarrow 0} h \sum_{i=0}^{n} f(t-ih)$$

en tenant compte que $t - a = nh$ et que f est continue, alors

$${}_{GL}I_a^{1}[f(t)] = \lim_{h\longrightarrow 0} h \sum_{j=0}^{n} f(t-ih) = \int_0^{t-a} f(t-s)ds = \int_a^t f(x)dx \qquad (2.15)$$

Pour $\alpha = 2,$ on a :

$$\begin{aligned} {}_{GL}I_a^{2}[f(t)] &= \lim_{h\longrightarrow 0} h \sum_{i=0}^{n} \frac{\Gamma(i+2)}{\Gamma(i+1)\Gamma(2)} f(x-ih) \\ &= \lim_{h\longrightarrow 0} h \sum_{j=0}^{n} (i+1)\, h\, f(t-ih) \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $t - h = s$, on déduit que :

$${}_{GL}I_a^{2}[f(t)] = \lim_{h\longrightarrow 0} h \sum_{i=1}^{n+1} (i\, h)\ \ f(s-ih) = \int_0^{t-a} sf(t-s)ds = \int_a^t (t-x)f(x)dx \qquad (2.16)$$

Aussi pour $\alpha = 3,$ on a :

$$_{GL}I_a^3\left[f(t)\right]) = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{h}{2!}\sum_{i=0}^{n}(i+2)(i+1)\,h^2\,f(t-ih).$$

On pose le changement de variable $t+h=y$, on obtient :

$$_{GL}I^3\left[f(t)\right]) = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{h}{2!}\sum_{j=1}^{n+1}i(i+1)\,h^2\,f(y-ih), \tag{2.17}$$

La relation (2.17), peut s'écrire sous la forme :

$$_{GL}I_a^3\left[f(t)\right]) = \lim_{h\longrightarrow 0}\left(\frac{h}{2!}\sum_{i=1}^{n+1}(ih)^2\,f(y-ih)+\frac{h^2}{2!}\sum_{j=1}^{n+1}ih\;f(y-ih)\right),$$

puisque

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{h^2}{2!}\sum_{i=1}^{n+1}ih\;f(y-ih) = \lim_{h\longrightarrow 0}h\int_a^t(t-x)f(x)dx = 0,$$

et lorsque $h\rightarrow 0$, on trouve :

$$\begin{aligned} _{GL}I_a^3\left[f(t)\right]) &= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{h}{2!}\sum_{i=1}^{n+1}(ih)^2\,f(y-ih) = \frac{1}{2!}\int_0^{t-a}s^2f(t-s)ds \\ &= \frac{1}{2!}\int_a^t(t-x)^2f(x)dx. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Les frmules (2.15)-(2.19) suggèrent l'expression générale suivante :

$$\begin{aligned} _{GL}I_a^{\alpha}\left[f(t)\right]) &= \lim_{h\longrightarrow 0}h^{\alpha}\sum_{i=0}^{n}\frac{\Gamma\left(i+\alpha\right)}{\Gamma\left(i+1\right)\Gamma\left(\alpha\right)}f\left(t-ih\right) \\ &= \frac{1}{(\alpha-1)!}\int_a^t(t-x)^{\alpha-1}f(x)dx. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Maintenant, on montre que (2.20) est une représentation d'une intégrale répétée α fois.
En effet,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(_{GL}I_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right)\right) &= \frac{1}{(\alpha-1)!}\int_a^t\frac{d}{dt}(t-x)^{\alpha-1}f(x)dx \\ &= \frac{1}{(\alpha-2)!}\int_a^t(t-x)^{\alpha-2}f(x)dx = \;_{GL}I_a^{\alpha-1}\left[f(t)\right]. \end{aligned} \tag{2.1}$$

On intègre sur (a,t), la relation (2.21), on obtient

$$_{GL}I_a^{\alpha}\left[f(t)\right] = \int_a^t\left(_{GL}I_a^{\alpha-1}\left[f(x)\right]\right)dx,$$

et

$$_{GL}I_a^{\alpha-1}[f(t)] = \int_a^t \left(_{GL}I_a^{\alpha-2}[f(x)]\right)dx$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}
_{GL}I_a^{\alpha}[f(t)] &= \int_a^t dx \int_a^t \left(_{GL}I_a^{\alpha-2}[f(x)]\right)dx \\
&= \int_a^t dx \int_a^t dx \int_a^t \left(_{GL}I_a^{\alpha-3}[f(x)]\right)dx \\
& \int_a^t dx \int_a^t dx ... \int_a^t f(x)dx.
\end{aligned}$$

Définition 2.3 *L'intégrale fractionnaire au sens Grünwald-Letnikov d'ordre $\alpha, \alpha > 0$ de la fonction f est définie par :*

$$\begin{aligned}
_{GL}I_a^{\alpha}[f(t)]) &= \lim_{h\longrightarrow 0} h^{\alpha} \sum_{i=0}^{n} \frac{\Gamma(i+\alpha)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\alpha)} f(t-ih) \qquad (2.22) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x)dx.
\end{aligned}$$

où $0 < n-1 < \alpha < n$.

Proposition 2.5 *Si la fonction f est de classe C^n, alors :*

$$_{GL}I_a^{\alpha}[f(t)] = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)(x-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(i+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+\alpha)} \int_a^t (t-x)^{n+\alpha-1} f^{(n)}(x)dx. \qquad (2.23)$$

Preuve. D'après (2.22), on a :

$$_{GL}I_a^{\alpha}[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x)dx.$$

Maintenant en utilisant l'intégration par parties, on obtient

$$_{GL}I_a^{\alpha}[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \left[-\frac{(t-x)^{\alpha}}{\alpha} f(x) \right]_a^t - \int_a^t -\frac{(t-x)^{\alpha}}{\alpha} f^{(1)}(x)\,dx \right\}$$

$$= \frac{f(a)(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^t (t-x)^{\alpha} f^{(1)}(x)\,dx$$

Après une autre intégration par parties

$$
\begin{aligned}
{}_{GL}I_a^{\alpha}\left[f(t)\right] &= \frac{f\left(a\right)}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\left(t-a\right)^{\alpha} \\
&+ \frac{1}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\left[\frac{-\left(t-x\right)^{\alpha+1}f^{(1)}\left(x\right)}{\alpha+1}\right]_a^t + \frac{1}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\int_a^t\frac{\left(t-x\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}f^{(2)}\left(x\right)dx \\
&= \frac{f\left(a\right)\left(t-a\right)^{\alpha+0}}{\Gamma\left(\alpha+1\right)} + \frac{f^{(1)}\left(a\right)\left(t-a\right)^{\alpha+1}}{\Gamma\left(\alpha+2\right)} + \frac{1}{\Gamma\left(\alpha+2\right)}\int_a^t\left(t-x\right)^{\alpha+1}f^{(2)}\left(x\right)dx \\
&= \sum_{i=0}^{1}\frac{f\left(a\right)\left(t-a\right)^{\alpha+i}}{\Gamma\left(\alpha+i+1\right)} + \frac{1}{\Gamma\left(\alpha+2\right)}\int_a^t\left(t-x\right)^{\alpha+1}f^{(2)}\left(x\right)dx.
\end{aligned}
$$

Après n intégration par parties, on obtient :

$$
{}_{GL}I_a^{\alpha}\left[f(t)\right] = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}\left(a\right)\left(x-a\right)^{i-\alpha}}{\Gamma(i+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma\left(n+\alpha\right)}\int_a^t\left(t-x\right)^{n+\alpha-1}f^{(n)}(x)dx.
$$

■

2.2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.4 *On définit la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ par :*

$$
{}_{RL}D_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right] = \begin{cases} \dfrac{d^m}{dt^m}\left[\dfrac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\int_a^t\left(t-s\right)^{n-\alpha-1}f\left(s\right)ds\right], m-1<\alpha<m, m\in\mathbb{N}^*, \\ \dfrac{d^m}{dt^m}f\left(t\right), \qquad \alpha=m. \end{cases} \tag{2.24}
$$

On peut écrire la relation (2.24) sous la forme équivalente suivante :

$$
{}_{RL}D_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right] = \begin{cases} \dfrac{d^m}{dt^m}\left[I_a^{m-\alpha}f\left(t\right)\right], m-1<\alpha<m, m\in\mathbb{N}^*, \\ \dfrac{d^m}{dx^m}f\left(t\right), \quad \alpha=m. \end{cases} \tag{2.25}
$$

Exemple 2.6 *Calculer la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha = \dfrac{1}{2}$ au sens de Riemann Liouville de la fonction $f\left(t\right) = t-a$.*

On a :

$$
\begin{aligned}
{}_{RL}D_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right] &= {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[\left(t-a\right)\right] \\
&= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}\int_a^t\left(t-s\right)^{1-\dfrac{1}{2}-1}\left(s-a\right)ds\right] \\
&= \frac{d}{dt}\left[I_a^{\dfrac{1}{2}}\left(t-a\right)\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{\Gamma\left(2\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\left(t-a\right)^{\dfrac{3}{2}}\right] \\
&= \frac{3}{2}\frac{\Gamma\left(2\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\left(t-a\right)^{\dfrac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Exemple 2.7 *On calcule la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville de $f(x) = (t-a)^{\beta}$.*

On a :

$$
{}_{RL}D_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] = \left(\frac{d}{dx}\right)^n I^{n-\alpha}\left(\left[(t-a)^{\beta}\right]\right).
$$

En utilisant le (2.25), on peut écrire :

$$
{}_{RL}I_a^{n-\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}(t-a)^{\beta+n-\alpha},
$$

alors

$$
\begin{aligned}
{}_{RL}D_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}(t-a)^{\beta+n-\alpha}\right) \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n(t-a)^{\beta+n-\alpha}
\end{aligned}
$$

En utilisant la relation de dérivation classique :

$$
\left(\frac{d}{dx}\right)^n(t-a)^{\beta+n-\alpha} \tag{2.26}
$$

$$
= (\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1))...(\beta-\alpha+1))(t-a)^{\beta-\alpha}
$$

$$
= \frac{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}{(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.
$$

Ce qui permet d'avoir :

$$
{}_{RL}D_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.
$$

Si $\alpha = \frac{1}{2}$ *et* $\beta = \frac{3}{2}$, *alors*

$$
\begin{aligned}
{}_{RL}D_a^{\frac{1}{2}}\left[(x-a)^{\frac{3}{2}}\right] &= \frac{\Gamma(\frac{3}{2}+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+1)}(x-a)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)}(x-a) = \frac{3\pi}{4}(x-a),
\end{aligned}
$$

et pour $\alpha > 0$ *et* $\beta = 0$, *on aura le résultat suivant :*

$$
\begin{aligned}
{}_{RL}D_a^{\alpha}\left[(x-a)^{0}\right] &= \frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(0-\alpha+1)}(x-a)^{0-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Remarque 2.3 *La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle :*

$$
{}_{RL}D_a^{\alpha}[c] = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.
$$

En effet, on a :

$$
\begin{aligned}
{}_{RL}D_a^{\alpha}[c] &= \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{c}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\,d\tau\right) \\
&= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.
\end{aligned}
$$

On présente maintenant quelques propriétés de l'opérateur de dérivation au sens de Riemann-Liouville [12].

Proposition 2.6 *L'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville possède les popriétés suivantes :*

(1) : *Pour tout* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *et pour deux fonctions quelconques* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *et* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, *on a :*

$$
{}_{RL}D_a^{\alpha}[\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda\ {}_{RL}D_a^{\alpha}[f(t)] + \mu\ {}_{RL}D_a^{\alpha} g[(t)].
$$

(2) : *En général, la propriété de semi groupe n'est pas vérifiée, on n'a pas toujours :*

$$
{}_{RL}D_a^{\alpha}\left[{}_{RL}D_a^{\beta}[f(t)]\right] = {}_{RL}D_a^{\alpha+\beta}[f(t)].
$$

(3) : *Il en est de même de la propriété de commutativité :* $\exists \alpha > 0, \beta > 0$, f *continue sur* $[a,b] \subset \mathbb{R}$, *tels que :*

$$
{}_{RL}D_a^{\alpha}\left[{}_{RL}D_a^{\beta}[f(t)]\right] \neq {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[{}_{RL}D_a^{\beta}[f(t)]\right].
$$

Preuve. Pour (1), on a :

$$
\begin{aligned}
& {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[\lambda f(t)+\mu g(t)\right] \\
& = \left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\left({}_{RL}I_a^{n-\alpha}\left[\lambda f(t)+\mu g(t)\right]\right) \\
& = \left(\frac{d}{dt}\right)^{m}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1}(\lambda f(x)+\mu g(x))dx\right] \\
& = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\left[\lambda\int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1}f(x)dx+\mu\int_a^t (t-x)^{m-\alpha-1}g(x)dx\right] \\
& = \lambda\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1}f(x)dx\right]+\mu\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\left[\int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1}g(x)dx\right] \\
& = \lambda^{RL}D_a^{\alpha}f(t)+\mu\ {}^{RL}D_a^{\alpha}g(t).
\end{aligned}
$$

Pour (2), on pose $f(t)=t^{\frac{-1}{2}}$ et $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, alors on a :

$$
{}_{RL}D_0^{\dfrac{1}{2}}\left[f(t)\right]= {}_{RL}D^{\dfrac{1}{2}}\left[f(t)\right]= {}_{RL}D^{\dfrac{1}{2}}\left[t^{\dfrac{-1}{2}}\right]=0,
$$

et

$$
{}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\left[{}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\left[f(t)\right]\right]= {}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\left[{}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\left[t^{\frac{-1}{2}}\right]\right]=0,
$$

on remarque aussi que :

$$
D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\left[f(t)\right]= D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\left[f(t)\right]\left[t^{\frac{-1}{2}}\right]=\frac{-1}{2}t^{-\frac{3}{2}},
$$

Dans (2), on prend $f(t)=t^{\frac{1}{2}}, \alpha=\frac{1}{2}$ et $\beta=\frac{3}{2}$, alors

$$
{}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\left[f(t)\right]= {}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\left[t^{\frac{1}{2}}\right]=\frac{\sqrt{\pi}}{2},
$$

et

$$
{}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\left[f(t)\right]= {}_{RL}D_0^{\frac{3}{2}}\left[t^{\frac{1}{2}}\right]=0,
$$

tandis que

$$
{}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\left[{}_{RL}D_0^{\frac{3}{2}}\left[f(t)\right]\right]= {}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\left[{}_{RL}D_0^{\frac{3}{2}}\left[t^{\frac{1}{2}}\right]\right]=0,
$$

et

$$
{}_{RL}D_0^{\frac{3}{2}}\left[{}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\left[f(t)\right]\right]= {}_{RL}D_0^{\frac{3}{2}}\left[{}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\left[t^{\frac{1}{2}}\right]\right]= {}_{RL}D_0^{\frac{3}{2}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]=\frac{1}{4}t^{\frac{3}{2}}.
$$

■

Lemme 2.1 *Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ vérifiant ${}_{RL}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right]=0$, avec $\alpha\in]n-1,n[$, $n\in\mathbb{N}^{\bullet}$, alors :*

$$f\left(t\right)=\sum_{i=0}^{n-1}c_i\frac{\Gamma\left(i+1\right)}{\Gamma\left(i+1+\alpha-n\right)}\left(t-a\right)^{i+\alpha-n}, \tag{2.27}$$

où les $c_i\left(i=0,1,...,n-1\right)$ sont des constantes arbitraires.

Preuve. D'après la formule (2.25), on a :

$${}_{RL}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right]=\left(\frac{d}{dx}\right)^n_{RL}I_a^{n-\alpha}\left[f\left(t\right)\right]=0,$$

ce qui implique que

$${}_{RL}I_a^{n-\alpha}\left[f\left(t\right)\right]=c_0+c_1\left(x-a\right)+...+c_{n-1}\left(x-a\right)^{n-1}=\sum_{i=0}^{n-1}c_i\left(x-a\right)^i.$$

Puisque $g^{(n)}\left(x\right)=0\Longrightarrow g$ est un polynome de degré $\leq n-1$. En appliquant l'operateur ${}_{RL}I_a^{\alpha}$, on peut écrire :

$${}_{RL}I_a^{\alpha}\left[{}_{RL}I_a^{n-\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right]=\ {}_{RL}I_a^{\alpha}\left[\sum_{i=0}^{n-1}c_i\left(t-a\right)^i\right],$$

ce qui revient à :

$${}_{RL}I_a^{n}\left[f\left(t\right)\right]=\sum_{i=0}^{n-1}c_i\frac{\Gamma\left(i+1\right)}{\Gamma\left(i+\alpha+1\right)}\left(t-a\right)^{i+\alpha}.$$

Une dérivation d'ordre n, donne

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}\right)^n\left({}_{RL}I_a^{n}\left[f\left(t\right)\right]\right)&=\sum_{i=0}^{n-1}c_i\frac{\Gamma\left(i+1\right)}{\Gamma\left(i+\alpha+1\right)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n\left(t-a\right)^{i+\alpha}\\&=\sum_{i=0}^{n-1}c_i\frac{\Gamma\left(i+1\right)}{\Gamma\left(i+\alpha+1\right)}\frac{\Gamma(i+\alpha+1)}{\left(i+\alpha-n+1\right)}\left(t-a\right)^{i+\alpha-n}\\&=\sum_{i=0}^{n-1}c_i\frac{\Gamma\left(i+1\right)}{\left(i+\alpha-n+1\right)}\left(t-a\right)^{i+\alpha-n}.\end{aligned}$$

Donc,

$$f\left(t\right)=\sum_{i=0}^{n-1}c_i\frac{\Gamma\left(i+1\right)}{\left(i+\alpha-n+1\right)}\left(t-a\right)^{i+\alpha-n}.$$

■

Lemme 2.2 *Soient $f \in C([a,b))$ et $n-1<\alpha<n, n\in\mathbb{N}^*$. Alors*

$$ {}_{RL}I_a^{\alpha}\left[{}_{RL}D_a^{\alpha} f(t)\right] = f(t) - \sum_{i=1}^{n} {}_{RL}D_a^{\alpha-i}\left[f(t)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-i}}{\Gamma(\alpha-i+1)}, \tag{2.28} $$

où les c_i $(i=1.2,....,n)$ sont des constantes quelconques.

Preuve. On a :

$$ {}_{RL}I_a^{\alpha}\left[{}_{RL}D_a^{\alpha} f(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\ {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[f(s)\right]ds $$

$$ = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t (t-s)^{\alpha}\ {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[f(s)\right]ds\right), $$

on pose

$$ I = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t (t-s)^{\alpha}\ {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[f(s)\right]ds. $$

En faisant des intégration par parties répétées et en utilisant (), on obtient

$$ I = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t (t-s)^{\alpha}\left(\frac{d}{dt}\right)^{i}\ {}_{RL}D_a^{-(i-\alpha)} f(s)\,ds $$

$$ = \frac{1}{\Gamma(\alpha-k+1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-k}\left\{{}^{RL}D_a^{-(k-\alpha)} f(t)\right\}dt $$

$$ -\sum_{j=1}^{k}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{k-j}\left({}^{RL}D_a^{-(k-\alpha)} f(x)\right)\right]_{x=a}\frac{(x-a)^{\alpha-j+1}}{\Gamma(2+\alpha-j)} $$

$$ = \frac{1}{\Gamma(\alpha-k+1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-k}\left\{{}^{RL}D_a^{-(k-\alpha)} f(t)\right\}dt $$

$$ -\sum_{j=1}^{k}\left[{}^{RL}D_a^{\alpha-j} f(x)\right]_{x=a}\frac{(x-a)^{\alpha-j+1}}{\Gamma(2+\alpha-j)} $$

$$ = {}^{RL}D_a^{-(\alpha-k+1)}\left({}^{RL}D_a^{-(k-\alpha)} f(x)\right) $$

$$ -\sum_{j=1}^{k}\left[{}^{RL}D_a^{\alpha-j} f(x)\right]_{x=a}\frac{(x-a)^{\alpha-j+1}}{\Gamma(2+\alpha-j)} $$

$$ = {}^{RL}D_a^{-1} f(x) - \sum_{j=1}^{k}\left[{}^{RL}D_a^{\alpha-j} f(x)\right]_{x=a}\frac{(x-a)^{\alpha-j+1}}{\Gamma(2+\alpha-j)} $$

d'où

$$ {}_{RL}I_a^{\alpha}\left[{}_{RL}D_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right] $$

$$ = \frac{d}{dx}\left({}_{RL}D_a^{-1}f\left(t\right) - \sum_{i=1}^{n}{}^{RL}D_a^{\alpha-i}\left[f\left(t\right)\right]_{t=a}\frac{\left(t-a\right)^{\alpha-i+1}}{\Gamma\left(2+\alpha-i\right)}\right) $$

$$ = f\left(t\right) - \sum_{i=1}^{n}{}_{RL}D_a^{\alpha-i}\left[f\left(t\right)\right]_{t=a}\frac{\left(t-a\right)^{\alpha-i}}{\Gamma\left(\alpha-i+1\right)}. $$

■

Proposition 2.7 *Soient $f \in C([a,b))$, et $n- < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$. Alors, l'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville ${}_{RL}D_a^{\alpha}$ possède les propriétés suivantes :*

1.

$$ {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[{}_{RL}I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right] = f\left(t\right). $$

2.

$$ \lim_{\substack{\alpha \longrightarrow n \\ <}} {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right] = f^{(n)}\left(t\right). $$

Preuve. En se basant sur la propriété classique :

$$ \left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(I_a^{n}\left[f\left(t\right)\right]\right) = f\left(t\right), $$

on obtient :

$$ {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[{}_{RL}I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right] = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(I_a^{n-\alpha}\left[{}_{RL}I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right]\right) $$

$$ = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(I_a^{n-\alpha+\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(I_a^{n}\left[f\left(t\right)\right]\right) = f(t). $$

2. On suppose que f est de classe C^n, alors

$$ f\left(t\right) = I_a^{n}\left[f^{(n)}\right]\left(t\right) + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}\left(a\right)}{\Gamma\left(i+1\right)}\left(t-a\right)^{i}. $$

Maintenant, on applique $I_a^{n-\alpha}$, on trouve :

$$I_a^{n-\alpha}[f(t)] = I_a^{n-\alpha}\left[I_a^n\left[f^{(n)}(t)\right]\right] + I_a^{n-\alpha}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(i+1)}(t-a)^i\right]$$

$$= I_a^{n-\alpha}\left[I_a^n\left[f^{(n)}(t)\right]\right] + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(i+1)}I_a^{n-\alpha}\left[(t-a)^i\right]$$

$$= I_a^{2n-\alpha}\left[f^{(n)}(t)\right] + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)\,\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+1)\,\Gamma(n-\alpha+i+1}(t-a)^{n-\alpha+i}$$

$$= I_a^{2n-\alpha}\left[f^{(n)}(t)\right] + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(n-\alpha+i+1)}(t-a)^{n-\alpha+i},$$

Ensuite, on utilise la formule (2.25), on obtient :

$${}_{RL}D_a^{\alpha}[f(t)] = \left(\frac{d}{dx}\right)^n\left(I_a^{n-\alpha}[f(t)]\right)$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^{2n-\alpha}\left[f^{(n)}(t)\right] + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(n-\alpha+i+1)}(t-a)^{n-\alpha+i}$$

$$= I_a^{n-\alpha}\left[f^{(n)}(t)\right] + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(i-\alpha+1)}(t-a)^{n-\alpha+i-n}$$

$$= I_a^{n-\alpha}\left[f^{(n)}(t)\right] + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(i-\alpha+1)}(t-a)^{i-\alpha}.$$

En faisant tendre vers n^+, on obtient :

$$\lim_{\substack{\alpha \longrightarrow n \\ <}} {}_{RL}D_a^{\alpha}[f(t)]$$

$$= \lim_{\substack{\alpha \longrightarrow n \\ <}} I_a^{n-\alpha}\left[f^{(n)}(t)\right] + \lim_{\substack{\alpha \longrightarrow n \\ <}}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(i-\alpha+1)}(t-a)^{i-\alpha}$$

$$= I_a^0\left[f^{(n)}(t)\right] + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(i-n+1)}(t-a)^{i-n} = f^{(n)}(t).$$

D'où

$$\lim_{\substack{\alpha \longrightarrow n \\ <}} {}_{RL}D_a^{\alpha}[f(t)] = f^{(n)}(t).$$

■

2.2.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha, n-1<\alpha<n$, $n\in\mathbb{N}^*$ s'obtient par une application de $I_a^{n-\alpha}$ suivie d'une dérivation classique d'ordre n : Tandis que la dérivée au sens de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations.

Définition 2.5 *Soit $f\in C^n([a,b])$, $n\in\mathbb{N}^*$. On définit la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha\geq 0$ de la fonction f comme suit :*

$$ {}_CD_a^{\alpha}[f(t)]=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(s)\,ds, & n-1<\alpha<n,\ n\in\mathbb{N}^*,\\[2ex] \left(\dfrac{d}{dt}\right)^n f(t), & \alpha=n.\end{cases} \tag{2.29}$$

On peut écrire la relation (2.28) sous la forme équivalente suivante :

$$ {}_CD_a^{\alpha}[f(t)]=\begin{cases}{}_{RL}I_a^{n-\alpha}\left[\left(\dfrac{d}{dt}\right)^n f(t)\right], & n-1<\alpha<n,\ n\in\mathbb{N}^*,\\[2ex] \left(\dfrac{d}{dt}\right)^n f(t), & \alpha=n.\end{cases} \tag{2.30}$$

Exemple 2.8 *Soit $f(t)=(t-a)^{\beta}$, $\beta>-1$. Pour $\alpha>0$, on a :*

$$ {}_CD_a^{\alpha}[f(t)]={}_{RL}I_a^{n-\alpha}([f(t)])=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(s)\,ds.$$

Et comme

$$f^{(n)}(t)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-n},$$

alors

$$\begin{aligned} {}_CD_a^{\alpha}[f(t)] &= {}_{RL}I_a^{n-\alpha}\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-n}\right]\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}\,{}_{RL}I_a^{n-\alpha}\left[(t-a)^{\beta-n}\right]\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}(s-a)^{\beta-n}\,d\tau. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $s = a + x(t-a)$, on aura :

$$
\begin{aligned}
& {}_C D_a^\alpha [f(t)] \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_0^1 (t-a-x(t-a))^{n-\alpha-1} (x(t-a))^{\beta-n} (t-a)\, dx \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-x)^{n-\alpha-1} x^{\beta-n} dx \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-x)^{n-\alpha-1} x^{\beta-n} dx \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1) B(n-\alpha, \beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Si l'on prend $\beta = 1$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, alors

$$
\begin{aligned}
D_a^\alpha [f(t)] &= {}_{RL}I_a^{n-\alpha} \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^n (f(t)) \right] = {}_{RL}I_a^{\frac{1}{2}} \left[\frac{d}{dt} (t-a) \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} (t-a)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Si $\beta = 0$ et $\alpha > 0$, alors

$$
D_a^\alpha [f(t)] = {}_{RL}I_a^{n-\alpha} \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^n (f(t)) \right] = {}_{RL}I_a^{\frac{1}{2}} [0] = 0.
$$

Remarque 2.4 *Si $f = c$, alors*

$$
\begin{aligned}
{}_C D_a^\alpha [f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\, ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \left((t-s)^{n-\alpha-1} \times 0 \right) ds = 0 = {}_C D_a^\alpha [c].
\end{aligned}
$$

C'est-à-dire que la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante est nulle.

Exemple 2.9 *On reprend la fonction $f(t) = (t-a)^{\frac{5}{2}}$ et on calcule a dérivée fractionnaire ${}_C D_a^{\frac{3}{2}} [f(t)]$. Alors :*

$$
\begin{aligned}
{}_C D_a^{\frac{3}{2}} [f(t)] &= {}_C D_a^{\frac{3}{2}} \left[(t-a)^{\frac{5}{2}} \right] = {}_{RL}I_a^{2-\frac{3}{2}} \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^2 \left((t-a)^{\frac{5}{2}} \right) \right] \\
&= {}_{RL}I_a^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^2 \left((t-a)^{\frac{5}{2}} \right) \right].
\end{aligned}
$$

En tenant compte de la relation (2.26), on aura :

$$\begin{aligned}
{}_{C}D_{a}^{\frac{3}{2}}\left[(t-a)^{\frac{5}{2}}\right] &= {}_{RL}I_{a}^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}-2+1\right)}(t-a)^{\frac{5}{2}-2}\right] \\
&= {}_{RL}I_{a}^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\frac{5}{2}\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}(t-a)^{\frac{5}{2}-2}\right] = \frac{15}{4}\;{}_{RL}I_{a}^{\frac{1}{2}}\left[(t-a)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&= \frac{15}{4}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)}(t-a)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}(t-a).
\end{aligned}$$

Proposition 2.8 *Soit $n-1<\alpha<n$, $n\in\mathbb{N}^{*}, \lambda,\mu\in\mathbb{R}$ et soient les deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ telles que ${}_{C}D_{a}^{\alpha}[f(t)]$ et ${}_{C}D_{a}^{\alpha}[g(t)]$ existent. Alors la dérivation fractinnaire de Caputo est un opérateur lineaire :*

$${}_{C}D_{a}^{\alpha}[\lambda f(t)+\mu g(t)]=\lambda{}_{C}D_{a}^{\alpha}[f(t)]+\mu{}_{C}D_{a}^{\alpha}[g(t)].$$

Preuve. On a :

$${}_{C}D_{a}^{\alpha}[f(t)]=\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\;{}_{RL}I_{a}^{n-\alpha}([f(t)]),$$

alors

$${}_{C}D_{a}^{\alpha}[\lambda f(t)+\mu g(t)]=\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\left({}_{RL}I_{a}^{n-\alpha}([\lambda f(t)+\mu g(t)])\right).$$

Comme la dérivée n-ème et l'intégrale sont linéaires, alors

$$\begin{aligned}
&{}_{C}D_{a}^{\alpha}[\lambda f(t)+\mu g(t)] \\
=\;& \lambda\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\;{}_{RL}I_{a}^{n-\alpha}([f(t)])+\mu\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\;{}_{RL}I_{a}^{n-\alpha}([g(t)]) \\
=\;& \lambda{}_{C}D_{a}^{\alpha}[f(t)]+\mu{}_{C}D_{a}^{\alpha}[g(t)].
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.9 *Soit $\alpha\in\,]n-1,n[$ et $f\in C^{n}([a,b])$. Alors*

$${}_{R}I_{a}^{\alpha}\left[{}_{C}D_{a}^{\alpha}[f(t)]\right]=f(t)+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^{i}, \tag{2.31}$$

où $c_{i}\in\mathbb{R}$, $i=0,1,2,...,n-1$, $n=[\alpha]+1$.

Preuve. On montre la relation de dérivation classique :

$$I_{a}^{n}\left[f^{(n)}(t)\right]=f(t)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^{i}. \tag{2.32}$$

Pour $n = 1$, on a :

$$f(t) - \frac{f^{(0)}(a)}{0!}(t-a)^0 = f(t) - f(a) = I_a^1 [f'(t)].$$

Aussi, on montre qu'elle est vrai pour $n+1$, on pose $h = f'$, on aura :

$$I_a^{n+1}\left[f^{(n+1)}(t)\right] = I_a^1\left[I_a^n\left[h^{(n)}(t)\right]\right] = I_a^1\left[h(t) - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^i\right]$$

$$= \int_a^t h(s)\,ds - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{h^{(i)}(a)}{(i+1)\,i!}(t-a)^{i+1}$$

$$= \int_a^t f'(s)\,ds - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i+1)}(a)}{(i+1)!}(t-a)^{i+1}$$

$$= f(t) - f(a) - \sum_{i=1}^{n}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^i = f(t) - \sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^i.$$

En appliquant relation (2.30), on peut écrire :

$${}_RI_a^\alpha\left[{}_CD_a^\alpha[f(t)]\right] = {}_RI_a^\alpha\left[{}_RI_a^{n-\alpha}\left[f^{(t)}(t)\right]\right] = I^n\left[f^{(n)}(t)\right].$$

Par la formule (2.32), on a :

$${}_RI_a^\alpha\left[{}_CD_a^\alpha[f(t)]\right] = f(t) + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^i.$$

■

Proposition 2.10 *Soient $f \in C^n([a,b))$, et $n-1 < \alpha < n, n \in N^*$. Alors, l'opérateur de dérivation de Caputo ${}_CD_a^\alpha$ a possède les propriétés suivantes :*

1. ${}_CD_a^\alpha[[f(t)]] = f(t)$.

2. si ${}_CD_a^\alpha[f(t)] = 0$, alors $f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (t-a)^i$.

Preuve. 1. En effet,

$${}_CD_a^\alpha\left[{}_RI_a^\alpha[f(t)]\right] = {}_RI_a^{m-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^n\left({}_RI_a^\alpha[f(t)]\right)\right],$$

D'après la relation (2.2), on trouve :

$$
\begin{aligned}
{}_C D_a^{\alpha}\left[{}_R I_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right] &= {}_R I_a^{m-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^n\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds\right)\right] \\
&= {}_R I_a^{m-\alpha}\left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds\right)\right] \\
&= {}_R I_a^{m-\alpha}\left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-n)}(t-s)^{\alpha-n-1} f(s)ds\right)\right] \\
&= {}_R I_a^{m-\alpha}\left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha-n)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-n-1} f(s)ds\right)\right] \\
&= I_a^{m-\alpha}\left[{}_R I_a^{\alpha-m}\left[f(t)\right]\right] = {}_R I_a^{0}\left[f(t)\right] = f(t),
\end{aligned}
$$

donc

$$
{}_C D_a^{\alpha}\left[{}_R I_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right] = f(t).
$$

2. Soit $f \in C^n([a,b))$, alors

$$
{}_C D_a^{\alpha}\left[f(t)\right] = 0 \Rightarrow I^{n-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t)\right] = 0.
$$

En appliquant $D^{n-\alpha}$, on trouve :

$$
\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) = 0,
$$

donc

$$
f(t) = f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (t-a)^i .
$$

■

Proposition 2.11 *Si* $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ *avec* $\alpha + \beta \leq 1$ *et* f *de classe* C^1. *Alors*

$$
{}_C D_a^{\alpha}\left[{}_C D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = {}_C D_a^{\alpha+\beta} f(t) = {}_C D_a^{\beta}\left[{}_C D_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right]. \tag{2.33}
$$

Preuve. En utilisant la règle de composition des opérateurs ${}_R I_a^{\alpha}$ et ${}_C D_a^{\alpha}$, on peut écrire

$$
\begin{aligned}
{}_C D_a^{\alpha}\left[{}_C D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] &= {}_R I_a^{1-\alpha}\left[{}_C D_a^{1}\left({}_R I_a^{1-\beta}\left({}_C D_a^{1}\left[f(t)\right]\right)\right)\right] \\
&= {}_R I_a^{1-\alpha-\beta}\left[{}_R I_a^{\beta}\left({}_C D_a^{1}\left[{}_R I_a^{1-\beta}\left({}_C D_a^{1}\left[f(t)\right]\right)\right]\right)\right] \\
&= {}_R I_a^{1-\alpha-\beta}\left[{}_C D_a^{1-\beta}\left({}_R I_a^{1-\beta}\left({}_C D_a^{1}\left[f(t)\right]\right)\right)\right] \\
&= {}_R I_a^{1-\alpha-\beta}\left[{}_C D_a^{1}\left[f(t)\right]\right] = {}_C D_a^{\alpha+\beta}\left[f(t)\right].
\end{aligned}
$$

Donc

$$ {}_{C}D_{a}^{\alpha}\left[{}_{C}D_{a}^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right]= {}_{C}D_{a}^{\alpha+\beta}\left[f\left(t\right)\right]. \tag{2.34}$$

En utilisant (2.34), on obtient :

$$ {}_{C}D_{a}^{\alpha}\left[{}_{C}D_{a}^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right]= {}_{C}D_{a}^{\alpha+\beta}\left[f\left(t\right)\right]= {}_{C}D_{a}^{\beta+\alpha}\left[f\left(t\right)\right]= {}_{C}D_{a}^{\beta}\left[{}_{C}D_{a}^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right].$$

■

Lien entre la dérivée de Caputo et celle de Riemann-Liouville

Pour f est de classe C^{n} et $n-1<\alpha<m$, la relation reliant la dérivée au sens de Riemann-Liouville à celle de Caputo est donnée par :

$$ {}_{R.L}D_{a}^{\alpha}\left[f(t)\right]= {}_{C}D_{a}^{\alpha}\left[f(t)\right]+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}\left(a\right)}{\Gamma\left(i-\alpha+1\right)}\left(t-a\right)^{i-\alpha}. \tag{2.35}$$

La relation (2.35) peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} {}_{C}D_{a}^{\alpha}\left[f(t)\right] &= {}_{R.L}D_{a}^{\alpha}\left[f(t)\right]-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}\left(a\right)}{\Gamma\left(i-\alpha+1\right)}\left(t-a\right)^{i-\alpha} \\ &= {}_{R.L}D_{a}^{\alpha}\left[f(t)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}\left(a\right)}{i!}\left(t-a\right)^{i}\right]. \end{aligned} \tag{2.36}$$

A partir de (2.35) et (2.36), on déduit que la dérivée fractionnaire d'ordre α de f au sens de Riemann-Liouville coïncide avec celle de Caputo si a est un point zéro d'ordre n de f.

Plus précisément, on a :

$$\left(f^{(i)}\left(a\right)=0, i=1,2,...,n-1\right)\Rightarrow\left({}_{C}D_{a}^{\alpha}\left[f(t)\right]= {}_{R.L}D_{a}^{\alpha}\left[f(t)\right]\right).$$

Preuve. On part de l'hypothèse que f est de classe C^{n}, alors on peut écrire :

$$f(t)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}\left(a\right)}{i!}\left(t-a\right)^{i}+ {}_{RL}I_{a}^{n}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\left[f(t)\right]\right]. \tag{2.37}$$

En appliquant ${}_{RL}I_{a}^{n-\alpha}$ à l'identité (2.37), on obtient :

$$\begin{aligned} {}_{RL}I_{a}^{n-\alpha}\left[f(t)\right] &= {}_{RL}I_{a}^{n-\alpha}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}\left(a\right)}{i!}\left(t-a\right)^{i}+ {}_{RL}I_{a}^{n}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\left[f(t)\right]\right]\right] \\ &= {}_{RL}I_{a}^{n-\alpha}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}\left(a\right)}{i!}\left(t-a\right)^{i}\right]+ {}_{RL}I_{a}^{n-\alpha}\left[{}_{RL}I_{a}^{n}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\left[f(t)\right]\right]\right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}\left(a\right)}{\Gamma\left(n-\alpha+i+1\right)}\left(t-a\right)^{n-\alpha+i}+ {}_{RL}I_{a}^{2n-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\left[f(t)\right]\right]. \end{aligned}$$

Ensuite on applique $\left(\frac{d}{dt}\right)^n$ à la relation obtenue, on aura :

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(\left[{}_{RL}I_a^{n-\alpha}\left[f(t)\right]\right]\right) \\
= &\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(n-\alpha+i+1)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left((t-a)^{n-\alpha+i}\right) + \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left({}_{RL}I_a^{2n-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^n [f(t)]\right]\right) \\
= &\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(n-\alpha+i+1)} \left(\frac{\Gamma(n-\alpha+i+1)}{\Gamma(n-\alpha+i+1-n)}(t-a)^{n-\alpha+i-n}\right) \\
&+\left(\frac{d}{dt}\right)^n \left({}_{RL}I_a^n \left[I_a^{n-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^n [f(t)]\right]\right]\right) \\
= &\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(i-\alpha+1)}(t-a)^{n-\alpha+i-n} + I_a^{n-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^n [f(t)]\right].
\end{aligned}
$$

Maintenant, en utilisant le fait que :

$$
{}_CD_a^\alpha [f(t)] = \left[{}_{RL}I_a^{n-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t)\right]\right] \text{ et } {}_{R.L}D_a^\alpha [f(t)] = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(\left[{}_{RL}I_a^{n-\alpha}[f(t)]\right]\right),
$$

on obtient :

$$
{}_{R.L}D_a^\alpha [f(t)] = {}_CD_a^\alpha [f(t)] + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(i-\alpha+1)}(t-a)^{i-\alpha}.
$$

■

2.3 Dérivées fractionnaires à gauche et à droite

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$, avec $-\infty < a < t < b < +\infty$ et

$$
I_{a^+}^1 [f(t)] = \int_a^t f(x)\,dx \text{ et } I_{b^-}^1 [f(t)] = \int_t^b f(x)\,dx.
$$

Pour une primitive seconde on aura :

$$
I_{a^+}^2 [f(t)] = \int_a^t \left(\int_a^x f(s)\,ds\right) dx \text{ et } I_{b^-}^2 [f(t)] = \int_t^b \left(\int_x^b f(s)\,ds\right) dx.
$$

D'après le théorème de Fubini, on peut écrire :

$$
I_{a^+}^2 [f(t)] = \int_a^t f(s)\,ds \int_s^t dx = \frac{1}{1!}\int_a^t (t-s) f(s)\,ds,
$$

et

$$
I_{b^-}^2 [f(t)] = \int_t^b f(s)\,ds \int_t^s dx = \frac{1}{1!}\int_t^b (t-s) f(s)\,ds.
$$

Dans le cas général, on a :

$$I^n_{a^+}\left[f\left(t\right)\right]=\frac{1}{\left(n-1\right)!}\int_a^t\left(t-s\right)^{n-1}f\left(s\right)ds,$$

et

$$I^n_{b^-}\left[f\left(t\right)\right]=\frac{1}{\left(n-1\right)!}\int_t^b\left(t-s\right)^{n-1}f\left(s\right)ds.$$

Donc

$$I^n_{a^+}\left[f\left(t\right)\right]=\frac{1}{\Gamma\left(n\right)}\int_a^t\left(t-s\right)^{n-1}f\left(s\right)ds,$$

et

$$I^n_{b^-}\left[f\left(t\right)\right]=\frac{1}{\Gamma\left(n\right)}\int_t^b\left(t-s\right)^{n-1}f\left(s\right)ds.$$

Définition 2.6 *Les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville* ${}_{R.L}I^\alpha_{a^+}\left[f\left(t\right)\right]$ *et* ${}_{R.L}I^\alpha_{b^-}\left[f\left(t\right)\right]$ *d'ordre* α *sont définis comme suit [1] :*

$${}_{R.L}I^\alpha_{a^+}\left[f\left(t\right)\right]=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_a^t\left(t-s\right)^{\alpha-1}f\left(s\right)ds, t>a, \alpha>0, \tag{2.44}$$

et

$${}_{R.L}I^\alpha_{b^-}\left[f\left(t\right)\right]=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_t^b\left(t-s\right)^{\alpha-1}f\left(s\right)ds, t<b, \alpha>0. \tag{2.45}$$

Exemple 2.10 *Calculer les intégrales* ${}_{R.L}I^\alpha_{a^+}\left[f\left(t\right)\right]$ *et* ${}_{R.L}I^\alpha_{b^-}\left[f\left(t\right)\right]$ *de la fonction suivante :*

$$f\left(t\right)=\left(t-a\right)^\beta, \beta>-1.$$

En utilisant les définitions (2.44) et (2.45), on obtient :

$${}_{R.L}I^\alpha_{a^+}\left[\left(t-a\right)^\beta\right]=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_a^t\left(t-s\right)^{\alpha-1}\left(s-a\right)^\beta ds=\frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)}\left(t-a\right)^{\alpha+\beta},$$

et

$${}_{R.L}I^\alpha_{b^-}\left[\left(t-a\right)^\beta\right]=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_t^b\left(t-s\right)^{\alpha-1}\left(s-a\right)^\beta ds=\frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)}\left(b-t\right)^{\alpha+\beta}.$$

Pour $\beta=0$, on a :

$${}_{R.L}I^\alpha_{a^+}\left[1\right]=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_a^t\left(t-s\right)^{\alpha-1}ds=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\left(t-a\right)^\alpha,$$

et

$${}_{R.L}I^\alpha_{b^-}\left[1\right]=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_t^b\left(t-s\right)^{\alpha-1}ds=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\left(b-t\right)^\alpha.$$

Pour $f\left(t\right)=C$, on a :

$${}_{R.L}I^\alpha_{a^+}\left[C\right]=\frac{C}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_a^t\left(t-s\right)^{\alpha-1}ds=\frac{C}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\left(t-a\right)^\alpha,$$

et

$${}_{R.L}I^\alpha_{b^-}\left[C\right]=\frac{C}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_t^b\left(t-s\right)^{\alpha-1}ds=\frac{C}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\left(b-t\right)^\alpha.$$

Remarque 2.5 *Lorsque $\alpha = n \in N$, les définitions (2.44) et (2.45) oïncident avec les nième intégrales de la forme [1] :*

$$
\begin{aligned}
I_{a^+}^n [f(t)] &= \int_a^t ds_1 \int_a^{s_1} ds_2 \int_a^{s_2} ds_3 ... \int_a^{s_{n-1}} f(s_n)\, ds_n \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s)\, ds,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
I_{b^-}^n [f(t)] &= \int_t^b ds_1 \int_{s_1}^b ds_2 \int_{s_2}^b ds_3 ... \int_{s_{n-1}}^b f(s_n)\, ds_n \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_t^b (t-s)^{n-1} f(s)\, ds.
\end{aligned}
$$

2.3.1 Dérivée-Riemann-Liouville à gauche et à droite

Les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville ${}_{RL}D_{a^+}^{\alpha}[f(t)]$ et ${}_{RL}D_{b^-}^{\alpha}[f(t)]$ d'ordre α sont définies comme suit [1] :

$$
\begin{aligned}
{}_{RL}D_{a^+}^{\alpha}[f(t)] &= \frac{d^m}{dt^m}\left[I_{a^+}^{m-\alpha} f(t)\right] \\
&= \frac{d^m}{dt^m}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)\, ds\right], t > a, m-1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N}^*,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
{}_{RL}D_{b^-}^{\alpha}[f(t)] &= \left(-\frac{d}{dt}\right)^m \left[I_{b^-}^{m-\alpha} f(t)\right] \\
&= \left(-\frac{d}{dt}\right)^m \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)\, ds\right], t < b, m-1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N}^*.
\end{aligned}
$$

Si l'on prend $\alpha = m$, alors

$$
{}_{RL}D_{a^+}^{0}[f(t)] = {}_{RL}D_{b^-}^{0}[f(t)] = f(t)
$$

et

$$
{}_{RL}D_{a^+}^{n}[f(t)] = f^{(n)}(t), \ {}_{RL}D_{b^-}^{n}[f(t)] = (-1)^n f^{(n)}(t),
$$

où $f^{(n)}(t)$ est la dérivée usuelle de $f(t)$ d'ordre n.

Exemple 2.11 *Calculer les dérivées ${}_{R.L}D_{a^+}^{\alpha}[f(t)]$ et ${}_{R.L}D_{b^-}^{\alpha}[f(t)]$ de la fonction suivante :*

$$
f(t) = (t-a)^{\beta}, \beta > -1.
$$

Par définition, on a :

$$
{}_{RL}D_{a^+}^{\alpha}[f(t)] = {}_{RL}D_{a^+}^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha},
$$

et

$$
{}_{RL}D_{b^-}^{\alpha}[f(t)] = {}_{RL}D_{b^-}^{\alpha}[f(t)] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(b-t)^{\beta-\alpha}.
$$

Pour $\beta = 0$, on a :

$$_{R.L}D^{\alpha}_{a^+}[1] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha},$$

et

$$_{R.L}D^{\alpha}_{b^-}[1] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(b-t)^{-\alpha}.$$

iS $f(t) = C$, alors :

$$_{R.L}I^{\alpha}_{a^+}[C] = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha},$$

et

$$_{R.L}I^{\alpha}_{b^-}[C] = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(b-t)^{-\alpha}.$$

2.3.2 Dérivée-Caputo à gauche et à droite

Les définitions de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo à gauche et à droite sont donnée par :

Définition 2.7 *Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Les dérivées fractionnaires de Caputo à gauche et à droite ${}_{C}D^{\alpha}_{a^+}[f(t)]$ et ${}_{C}D^{\alpha}_{b^-}[f(t)]$ sont définie par [1] :*

$${}_{C}D^{\alpha}_{a^+}[f(t)] = {}_{R.L}D^{\alpha}_{a^+}\left[f(t) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(0)}{j!}(t-a)^j\right],$$

et

$${}_{C}D^{\alpha}_{b^-}[f(t)] = {}_{R.L}D^{\alpha}_{b^-}\left[f(t) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(0)}{j!}(b-t)^j\right].$$

Pour $0 < \alpha < 1$, on a :

$${}_{C}D^{\alpha}_{a^+}[f(t)] = {}_{R.L}D^{\alpha}_{a^+}f(t) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha},$$

et

$${}_{C}D^{\alpha}_{b^-}[f(t)] = {}_{R.L}D^{\alpha}_{b^-}f(t) - \frac{f(b)}{\Gamma(1-\alpha)}(b-t)^{-\alpha}.$$

Exemple 2.12 *Trouver les dérivées ${}_{C}D^{\alpha}_{a^+}[f(t)]$ et ${}_{C}D^{\alpha}_{b^-}[f(t)]$ de la fonction : $f(t) = (t-a)^{\beta}, \beta > -1$.*

On a :

$${}_{C}D^{\alpha}_{a^+}[f(t)] = {}_{C}D^{\alpha}_{a^+}\left[(t-a)^{\beta}\right] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha},$$

et

$${}_{C}D^{\alpha}_{b^-}[f(t)] ={}_{C} D^{\alpha}_{b^-}\left[(t-a)^{\beta}\right] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(b-t)^{\beta-\alpha},$$

Pour $\beta = 0$, on a :

$${}_{R.L}D^{\alpha}_{a^+}[1] = {}_{R.L}D^{\alpha}_{b^-}[1] = 0,$$

Si $f(t) = C$, alors :

$${}_{R.L}I^{\alpha}_{a^+}[C] = {}_{R.L}D^{\alpha}_{b^-}[C] = 0.$$