# Symétries et lois de conservation

## 2.1 Introduction

Dans cette section, on supposera que la densité lagrangienne ne dépend pas explicitement de $(x_\mu)$. On supposera aussi que les équations de mouvement (donc de l'action) restent inchangées lors d'une transformation (continue) infinitésimale définit par,

$$\begin{cases} x_\mu \longrightarrow x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu \\ \phi(x_\mu) \longrightarrow \phi'(x'_\mu) = \phi(x_\mu) + \delta\phi(x_\mu) \end{cases} \tag{2.1}$$

Avec,

$$\begin{cases} x_\mu \longrightarrow \text{position spatio-temporelle (coordonnées)} \\ \delta x_\mu \longrightarrow \text{variation infinitisimale (deplacement l'espace et dans le temps)} \\ \phi(x_\mu) \longrightarrow \text{champ scalaire (variable)} \\ \delta\phi(x_\mu) \longrightarrow \text{variation de phase (dûe à une rotation)} \end{cases}$$

### 2.1.1 Exemple de transformation

**Transformation spatio-temporelle**

Une transformation spatio-temporelle est définit par

$$\begin{cases} x_\mu \longrightarrow x'_\mu = x_\mu + a_\mu \ , \quad (a_\mu = \delta x_\mu) \\ \phi(x_\mu) \longrightarrow \phi'(x'_\mu) = \phi(x_\mu) \ , \quad (\delta\phi(x_\mu) = 0) \end{cases} \tag{2.2}$$

Avec $a_\mu$ représente le quadri-vecteur déplacement dans l'espace-temps.
D'après la transformation infinitésimale donnée dans l'équation (2.2),

$$\phi'(x'_\mu) = \phi'(x_\mu + a_\mu) = \phi(x_\mu) \tag{2.3}$$

donc,

$$\phi^{'}(x_\mu + a_\mu) = \phi(x_\mu) \tag{2.4}$$

**Transformation de phase globale** $(\phi(x_\mu) \neq \phi^*(x_\mu))$

Cette transformation est donnée par,

$$\begin{cases} x_\mu \longrightarrow x^{'}_\mu = x_\mu \;, \quad (\delta x_\mu = 0) \\ \phi(x_\mu) \longrightarrow \phi^{'}(x^{'}_\mu) = \phi(x_\mu) + \delta\phi(x_\mu) = e^{-iq\theta(x_\mu)}\phi(x_\mu) \end{cases} \tag{2.5}$$

Avec $\theta(x_\mu)$ est un scalaire réel.
D'après la transformation infinitésimale donnée dans l'équation (2.5),

$$\phi^{'}(x^{'}_\mu) = \phi^{'}(x_\mu) = \phi(x_\mu) + \delta\phi(x_\mu) = e^{-iq\theta(x_\mu)}\phi(x_\mu) \tag{2.6}$$

donc,

$$\phi^{'*}(x_\mu) = e^{+iq\theta(x_\mu)}\phi^*(x_\mu) \tag{2.7}$$

**Transformation de phase locale** $(\phi(x_\mu) = \phi^*(x_\mu))$

Cette transformation est donnée par,

$$\begin{cases} x_\mu \longrightarrow x^{'}_\mu = x_\mu \;, \quad (\delta x_\mu = 0) \\ \phi(x_\mu) \longrightarrow \phi^{'}(x^{'}_\mu) = \phi(x_\mu) + \delta\phi(x_\mu) = e^{-iq\theta(x_\mu)}\phi(x_\mu) \end{cases} \tag{2.8}$$

Avec $\theta(x_\mu)$ est un scalaire réel.
D'après la transformation infinitésimale donnée dans l'équation (2.8),

$$\phi^{'}(x^{'}_\mu) = \phi^{'}(x_\mu) = \phi(x_\mu) + \delta\phi(x_\mu) = e^{-iq\theta(x_\mu)}\phi(x_\mu) \tag{2.9}$$

donc,

$$\phi^{'*}(x_\mu) = e^{+iq\theta(x_\mu)}\phi(x_\mu) \tag{2.10}$$

### 2.1.2 Théorème de Noether

**Énoncé**

Pour toute transformation continue de l'action $S$, il existe un courant $J_\mu$ vérifiant l'équation

$$\partial_\mu J_\mu = 0 \tag{2.11}$$

Ceci implique qu'il existe une charge qui se conserve, définit par

$$Q = \int \rho \, d^3x \tag{2.12}$$

**Démonstration**

On dit que les équations de mouvement sont invariantes si l'action $S$ est stationnaire

$$\delta S = S^{'} - S \simeq 0 \tag{2.13}$$

On a

$$S = \int d^4x \, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \Rightarrow S^{'} = \int d^4x^{'} \, \mathcal{L}(\phi^{'}, \partial^{'}_\mu \phi^{'}) \tag{2.14}$$

Avec $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ (la densité lagrangienne ne dépend pas explicitement de $x_\mu$).
Considérons des transformations infinitésimales de la forme,

$$\begin{cases} x_\mu \longrightarrow x^{'}_\mu = x_\mu + \delta x_\mu \\ \phi(x_\mu) \longrightarrow \phi^{'}(x^{'}_\mu) = \phi(x_\mu) + \delta\phi(x_\mu) \end{cases} \tag{2.15}$$

où

$$\delta\phi(x) = \phi^{'}(x^{'}) - \phi(x) \tag{2.16}$$

Avec $\delta\phi(x_\mu)$ représente la variation du champ dû à la fois à la transformation du champ (variable) et la transformation de la coordonnées $(x_\mu)$.
Donc, la variation en un point fixe de l'espace à 4-dimensions est donnée par

$$\delta_o\phi(x) = \phi^{'}(x) - \phi(x) \;\; , \quad \text{pour } x^{'} = x \tag{2.17}$$

Le lien entre les dérivées d'espace-temps est donné par

$$d^4x^{'} = [1 + \partial_\mu(\delta x_\mu)] d^4x \tag{2.18}$$

Cherchons maintenant la relation entre la variation champ en deux points différents $\delta\phi$ et la variation du champ en un point fixe $\delta_o\phi$.
La variation du champ en deux point différents est donnée par

$$\delta\phi(x) = \phi^{'}(x^{'}) - \phi(x) = \phi^{'}(x^{'}) - \phi^{'}(x) + \phi^{'}(x) - \phi(x) \tag{2.19}$$

$$\delta\phi(x) = \phi^{'}(x) + (\partial_\nu\phi)\delta x_\nu - \phi^{'}(x) + \delta_o\phi(x) \tag{2.20}$$

Avec

$$\phi^{'}(x^{'}) = \phi^{'}(x_\mu + \delta x_\mu) = \phi^{'}(x_\mu) + (\partial_\nu\phi)\delta x_\nu = \phi^{'}(x) + (\partial_\nu\phi)\delta x_\nu \tag{2.21}$$

Donc,

$$\delta\phi(x) = \delta_o\phi(x) + (\partial_\nu\phi)\delta x_\nu \tag{2.22}$$

Calculons le terme $\partial^{'}_\mu\phi^{'}$
On a

$$\partial^{'}_\mu\phi^{'}(x^{'}) = \partial^{'}_\mu(\phi + \delta\phi) = \frac{\partial}{\partial x^{'}_\mu}(\phi + \delta\phi) \tag{2.23}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial x^{'}_\mu}(\phi + \delta\phi) = \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\phi + \delta\phi)\frac{\partial x_\nu}{\partial x^{'}_\mu} \tag{2.24}$$

On a aussi

$$x^{'}_\nu = x_\nu + \delta x_\nu \Rightarrow x_\nu = x^{'}_\nu - \delta x_\nu \tag{2.25}$$

Donc,

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial x^{'}_\mu} = \frac{\partial x^{'}_\nu}{\partial x^{'}_\mu} + \frac{\partial}{\partial x^{'}_\mu}(\delta x_\nu) \tag{2.26}$$

Finalement on trouve que,

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial x^{'}_\mu} = \delta_{\mu\nu} - \partial_\mu(\delta x_\nu) \tag{2.27}$$

En remplaçant l'équation (2.27) dans l'équation (2.23), on trouve

$$\partial^{'}_\mu\phi^{'}(x^{'}) = \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\phi + \delta\phi)\frac{\partial x_\nu}{\partial x^{'}_\mu} \tag{2.28}$$

$$= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\delta\phi)\right)(\delta_{\mu\nu} - \partial_\mu(\delta x_\nu)) \tag{2.29}$$

$$= (\partial_\nu \phi + \partial_\nu(\delta\phi))\,(\delta_{\mu\nu} - \partial_\mu(\delta x_\nu)) \tag{2.30}$$

$$= (\partial_\nu \phi)\delta_{\mu\nu} - (\partial_\nu \phi)\partial_\mu(\delta x_\nu) + \partial_\nu(\delta\phi)\delta_{\mu\nu} - \partial_\nu(\delta\phi)\partial_\mu(\delta x_\nu) \tag{2.31}$$

$$\partial'_\mu \phi'(x') = (\partial_\mu \phi) - (\partial_\nu \phi)\partial_\mu(\delta x_\nu) + \partial_\mu(\delta\phi) \tag{2.32}$$

On néglige le terme $\partial_\nu(\delta\phi)\partial_\mu(\delta x_\nu)$, car c'est un terme d'ordre supérieur.
La densité lagrangienne ne dépend pas explicitement de $x_\mu \Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$
Donc

$$\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') = \mathcal{L}(\phi + \delta\phi, (\partial_\mu \phi) - (\partial_\nu \phi)\partial_\mu(\delta x_\nu) + \partial_\mu(\delta\phi)) \tag{2.33}$$

$$= \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}[\partial_\mu(\delta\phi) - (\partial_\nu \phi)\partial_\mu(\delta x_\nu)] \tag{2.34}$$

Donc, on trouve

$$\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\mu(\delta\phi) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}(\partial_\nu \phi)\partial_\mu(\delta x_\nu) \tag{2.35}$$

En remplaçant l'équation (2.18) dans l'équation (2.13), on trouve

$$\delta S = \int d^4x'\, \mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') - \int d^4x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \simeq 0 \tag{2.36}$$

$$= \int [1 + \partial_\mu(\delta x_\mu)] d^4x\, \mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') - \int d^4x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \simeq 0 \tag{2.37}$$

$$\delta S = \int [\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + \partial_\mu(\delta x_\mu)\mathcal{L}] d^4x \simeq 0 \tag{2.38}$$

Calculons le terme: $\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$

$$\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\mu(\delta\phi) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}(\partial_\nu \phi)\partial_\mu(\delta x_\nu) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

$$\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\mu(\delta\phi) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}(\partial_\nu \phi)\partial_\mu(\delta x_\nu) \tag{2.39}$$