Formulation lagrangien de la théorie des champs

1.1 Rappel du formalisme de Lagrange

Le formalisme de Lagrange représente un outil extrêmement puissant pour décrire l'évolution d'un problème physique. Initialement aborder sous la forme du principe de moindre action, il permet de déterminer le comportement d'un système, dès que l'expression d'une grandeur physique, le lagrangien, est connue.
L'objectif de ce rappel est de revoir les notions fondamentales de la théorie lagrangienne, tout d'abord dans le cadre de l'étude d'une particule massive, puis dans celui de la théorie des champs.

1.1.1 Principe de moindre action

Étant dans un état initial donné, un système physique a une infinité de façons d'évoluer jusqu'à un état final donné: Pour tant, lors d'une transformation réelle une seule de ces transformations

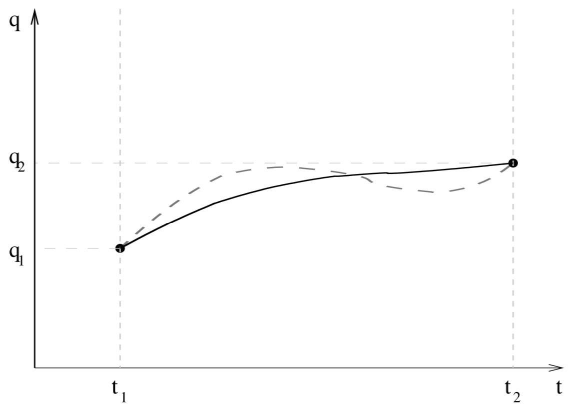

Figure 1.1: Transformation dans l'espace des coordonnées généralisées.

(évolutions) est effectivement réalisées. Comment peut-on déterminer cette évolution privilégiée

et la différentiée des autres? C'est à cette question que répond le principe de moindre action, qui peut être considérer comme l'un des postulats de la physique.
D'après le principe de moindre action, il existe une quantité appelée "Action" définit par,

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt\ L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) \qquad , \qquad i = 1 - - - - N \tag{1.1}$$

dont la valeur change lors de l'évolution du système et qui doit être minimale le long de la transformation réelle. L'action S est définie comme l'intégrale d'une quantité appelée "Lagrangien", et qui est fonction des coordonnées généralisées q et des vitesses généralisées $\dot{q}(t) = \frac{dq}{dt}$.

1.1.2 Équations d'Euler-Lagrange

Parmi toutes les trajectoires qui passent par les deux points fixes ($\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$) de coordonnées généralisées $Q_1 = q(t_1)$ et $Q_2 = q(t_2)$, les trajectoires physiques sont celles qui rendent l'action S minimale $\Delta S \simeq 0$.

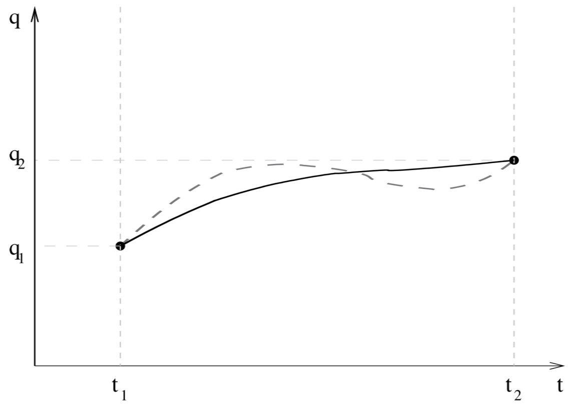

Figure 1.2: Transformation dans l'espace des coordonnées généralisées.

Si $\delta(q(t))$ est une fonction infinitésimale, alors

$$\Delta S[q] \simeq S(q + \delta q) - S(q) \tag{1.2}$$

On a

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt\ L(q, \dot{q}, t) \quad \Longrightarrow \quad \Delta S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt[\ L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) -\ L(q, \dot{q}, t)] \tag{1.3}$$

Or,

$$L(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} \tag{1.4}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\Delta S[q] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[L(q,\dot{q},t) + \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} - \ L(q,\dot{q},t)\right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right] \simeq 0 \end{aligned}\tag{1.5}$$

Si on pose

$$\delta\dot{q} = \frac{d}{dt}(\delta q) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}(\delta q) \tag{1.6}$$

On aussi,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}(\delta q) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}(\delta q) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]\delta q \tag{1.7}$$

En remplaçant dans l'équation (1.5), on retrouve,

$$\begin{aligned}\Delta S[q] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]\delta q\right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\delta q \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]\right] + \int_{t_1}^{t_2} dt\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right] \simeq 0\end{aligned} \tag{1.8}$$

Où

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right] = \int_{t_1}^{t_2} d\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right] = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right] = 0 \tag{1.9}$$

Finalement, les équations d'Euler-Lagrange sont données par,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \tag{1.10}$$

1.1.3 Choix du lagrangien

Le choix du lagrangien n'est pas unique.

- Si on remplace le lagrangien L par (αL), où α est un réel, alors les équations de mouvement restent inchangées.

- Si on remplace le lagrangien L par $(\beta + L)$, où β est une constante, alors les équations de mouvement restent inchangées.
- Si on remplace le lagrangien L par $(L + \frac{dF}{dt})$, où $F = F(q, \dot{q}, t)$ est un lagrangien, alors les équations de mouvement restent inchangées.

Exercice 1 :
Montrer que la variation ΔS reste invariante par changement du lagrangien L par $L + \frac{dF}{dt}$.

1.1.4 Formulation hamiltonienne

L'hamiltonien H est donné par

$$H(p, q, t) = P_i \dot{q}_i - L \tag{1.11}$$

L'impulsion généralisée est donnée par

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{1.12}$$

Exercice 2 :
Montrer que si le lagrangien L ne dépend pas explicitement du temps t, alors $\frac{dH}{dt} = 0$