TD 02 : La Transformée en Z

Exercice 1 : La suite de Fibonacci est définie par : $f_{k+2}=f_{k+1}+f_k$, avec $f_0=0$ et $f_1=1$

1. En utilisant le théorème de l'avance, monter que la transformée en z de la suite de Fibonacci s'écrit sous la forme : $F(z) = \frac{z}{z^2-z-1}$
2. On définit un système échantillonné G(z) tel que, soumis à une entrée en échelon U(z), sa sortie est le signal F(z). Donner la transmittance opérationnelle de G(z).

Exercice 2 : On considère un signal échantillonné f(t) défini par :

$$f(k) = \begin{cases} 1 \;\; pour \; 0 \le k \le k_0 \\ 0 \;\; pour \; k < 0 \; et \; pour \; k > k_0 \end{cases}$$

Soit Te la période d'échantillonnage, calculer la transformée en z de ce signal

Exercice 3 : Considérons la suite x(k) définie par :

$$x(k) = \begin{cases} 1 & si \; k \in \{0,1,2,3,4,5\} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. Calculer la transformée en z de x(k), notée X(z) à partir de la définition
2. Retrouver ce résultat à l'aide des suites échelons et du théorème de retard.

Exercice 4 : Calculer les transformées en z des suites suivantes :

- $x_n = \cos(\omega nT)$ avec ω la pulsation et T la période d'échantillonnage
- $f(t) = \begin{cases} \sin(\omega t) \; pour \; t > 0 \\ 0 \;\; pour \; t < 0 \end{cases}$
- $x(k) = (k^2 + k)u(k)$
- $y(k) = e^{2k}u(k-1)$

Exercice 5 : Un système échantillonné est décrit par l'équation aux différences ci-dessous :

$$2y(k) + 5y(k-1) + 2y(k-2) = x(k)$$

Avec $x(0) = y(0) = 0$

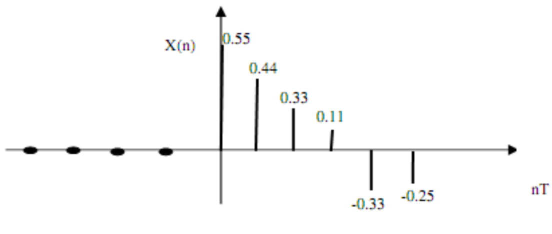
1. Déterminer la transmittance échantillonnée G(z) de ce système $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$
2. Pour $x(k) = u(k)$ (échelon unitaire), déterminer $Y(z)$ puis $\lim_{z\to 1}(z-1)Y(z)$
3. Décomposer en éléments simples le dénominateur de G(z) et en déduire que le théorème de valeur finale ne s'applique pas.

Exercice 6 : Résoudre, en utilisant la transformée en z, l'équation récurrente d'ordre 2

$$x_k - 3x_{k-1} + 2x_{k-2} = \delta_0(k)$$

Pour tout entier naturel n, avec x(-1)=x(-2)=0

Exercice 7 : Donner la transformée en z de la fonction numérique discrète x(n) représentée par graphique ci-dessous (elle est nulle dans les parties non représentées)



Exercice 8 : Calculer la transformée en z des fonctions discrètes suivantes :

$$x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \qquad y(n) = n\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Exercice 9 :

1. Calculer la transformée en Z de la fonction de transfert suivante : $F(p) = \frac{P+3}{p(p-1)^2(p+5)}$
2. Retrouver alors l'original $f(nT)$