Chapitre 2

Minimisation sans contraintes

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On appelle problème de minimisation sans contraintes le probléme suivant :

$$(P_{cs}) \quad \begin{cases} \min f(x) \\ \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases},$$

c'est-a dire on cherche a minimiser f sur $\mathbb{R}^n$. On cherche $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) . \left(f(x^*) \leq f(x), \forall x \in C \subset \mathbb{R}^n\right).$$

Définition 2.1 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable et $x^* \in \mathbb{R}^n$.On dit que x^* est un minimum global de (P_{cs}) si et seulement si :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \; f(x^*) \leq f(x).$$

Définition 2.2 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable et $x^* \in \mathbb{R}^n$.On dit que x^* est un minimum local de (P_{cs}) si et seulement si il existe un voisinage $V(x^*)$ de x^* tel que :*

$$\forall x \in V(x^*), \; f(x^*) \leq f(x).$$

Définition 2.3 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable et $x^* \in \mathbb{R}^n$.On dit que x^* est un minimum local strict de (P_{cs}) si et seulement si il existe un voisinage $V(x^*)$ de x^* tel que :*

$$\forall x \in V(x^*), \; f(x^*) < f(x), \; x \neq x^*.$$

2.1 Résultats d'existence et d'unicité

Avant d'étudier les propriétés de la solution du problème (P), il faut assurer de leur existence.

2.1.1 Existence de la solution

Définition 2.4 *On dit que la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est coercive si*

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Exemple 2.1 *Soit* $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + 3y^2$.

On a :

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) + 3y^2 = \frac{1}{2}\|(x,y)\| + 3y^2.$$

Alors

$$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y) = \lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\|(x,y)\|^2 + 3y^2\right) = +\infty,$$

donc la fonction f est coercive.

Exemple 2.2 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = x^4 + y^4 - 3xy$.*

On a :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^4 + y^4 - 3xy = x^4 + y^4 - \frac{3}{2}\left[(x+y)^2 - \left(x^2+y^2\right)\right] \\ &\leq x^4 + y^4 + \frac{3}{2}\left(x^2+y^2\right) \leq \left(x^2+y^2\right)^2 + \frac{3}{2}\left(x^2+y^2\right) \\ &= \|(x,y)\|^4 + \frac{3}{2}\|(x,y)\|^2, \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y) = +\infty.$$

D'où f est coercive.

Théorème 2.1 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonctione continue et coercive, alors le problème (P_{sc}) ademet au moins une solution.*

Preuve. Soit $d = inf(P_{sc})$, $d < +\infty$ et $(x_q)_{q\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ une suite minimisante ($\lim_{q\to+\infty} f(x_q) = d$).

Montrons que (x_q) est bornée.

Si ce n'était pas le cas on pourrait extraire de cette suite une sous-suite (encore notée (x_q)) telle que

$$\lim_{q\to+\infty} \|x_q\| = +\infty.$$

Par coercivité de f on aurait $\lim_{q\to+\infty} f(x_q) = +\infty$ ce qui contredit le fait que $\lim_{q\to+\infty} f(x_q) = d < +\infty$.

Comme (x_q) est bornée, on peut alors en extraire une sous-suite (x_q) qui converge vers $x^* \in \mathbb{R}^n$. Par continuité de f, on a

$$d = \lim_{q\to+\infty} f(x_q) = f(x^*).$$

En particulier $d > -\infty$ et x^* est une solution du problème (P_{sc}). ■

2.1.2 Unicité de la solution

Théorème 2.2 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe, alors le problème (P_{sc}) ademet une solution unique.*

Preuve. Supposons qu'il existe deux solutions x_1^* et x_2^* de la fonction sur $\mathbb{R}^n$ tels que

$$x_1^* \neq x_2^* \text{ et } f(x_1^*) = f(x_2^*) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x).$$

Soit $x^* = \alpha x_1^* + (1-\alpha)x_2^* \in \mathbb{R}^n$ avec $\alpha \in [0,1]$ et f strictement convexe, alors

$$f(x^*) < \alpha f(x_1^*) + (1-\alpha) f(x_2^*) = f(x_2^*) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x),$$

Ceci fournit une contradiction, ce qui est impossible ; donc $x_1^* = x_2^*$. ■

Exemple 2.3 *Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) + 3y^2.$$

Vérifier que le probléme : $\begin{cases} \min f(x) \\ x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$ *admet une solution unique.*

1. Existence : *On a :*

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) + 3y^2 = \frac{1}{2}\|(x,y)\| + 3y^2.$$

Alors

$$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y) = \lim_{\|(x,y)\|\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\|(x,y)\|^2 + 3y^2\right) = +\infty,$$

donc la fonction f est coercive.

D'où probléme : $\begin{cases} \min f(x) \\ x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$ *admet au moins une solution.*

2. Unicité : *On calcul la matrice hessienne :*

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix},$$

les mineurs principaux sont strictement positifs, donc f est strictement convexe.

D'où la solution est unique.

2.2 Condition d'optimalité

2.2.1 Cas différentiable

Condition nécessaire d'optimalité du premier ordre

Théorème 2.3 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $x^* \in \mathbb{R}^n$. Si x^* est un minimum local de f sur $\mathbb{R}^n$, alors $\nabla f(x^*) = 0$.*

Preuve. Soit $d \in \mathbb{R}^n$ pour $\alpha > 0$ (α assez petite), on a : ■

$$f(x^* + \alpha d) = f(x^*) + \alpha \nabla^T f(x^*) d + o(\|\alpha d\|).$$

Si on choisit $d = -\nabla f(x^*)$, on obtient $\nabla f(x^*) d = \|\nabla f(x^*)\|^2 < 0$.

Si $\nabla f(x^*) \neq 0$, alors $f(x^* + \alpha d) < f(x^*)$,

ce qui contredit le fait que x^* est un minimum local, d'où $\nabla f(x^*) = 0$.

Condition nécessaire d'optimalité du deuxième ordre

Théorème 2.4 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable et $x^* \in \mathbb{R}^n$. Si x^* est un minimum local de f sur $\mathbb{R}^n$, alors*

$$\nabla f(x^*) = 0 \text{ et } y^T \nabla^2 f(x^*)\, y \geq 0,\ \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Preuve. Soit $d \in \mathbb{R}^n$ pour $\alpha > 0$ (α assez petite), alors

$$f(x^* + \alpha d) = f(x^*) + \alpha \nabla^T f(x^*)\, d + \frac{\alpha^2}{2} d^T \nabla^2 f(x^*)\, d + o(\|\alpha d\|).$$

Puisque x^* est un minimum local de f, on a

$$f(x^* + \alpha d) \geq f(x^*),$$

et d'après (1), on obtient

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

Par consequent

$$d^T \nabla^2 f(x^*)\, d \geq 0,$$

ce qui implique que $\nabla^2 f(x^*)$ *S.D.P.* ■

Exemple 2.4 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par :*

$$f(x, y) = x^2 - y^2.$$

On cherche a vérifier que $x^* = (0, 0)$ est un minimum local de f sur $\mathbb{R}^2$.

On a :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ \\ 2y \end{pmatrix} \text{ et } \nabla f(0, 0) = 0.$$

Aussi on a :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \nabla^2 f(0, 0).$$

Les mineurs principaux sont 2 et -4, $\nabla^2 f(0, 0)$ n'est pas semi-définie positive.

D'où $x^* = (0, 0)$ n'est pas un minimum local de f sur $\mathbb{R}^2$.

Conditions suffisantes d'optimalité

Théorème 2.5 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable et $x^* \in \mathbb{R}^n$. Si*

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) = 0, \\ \text{et} \\ \\ y^T \nabla^2 f(x^*)\, y > 0,\ \forall y \in \mathbb{R}^n, y > 0, \end{cases}$$

alors x^* est un minimum local strict de f sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 2.5 *Considérons la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x,y) = (x-2y)^2 .$$

$x^* = (0,0)$ *est un minimum local de* f *sur* $\mathbb{R}^2$?.

On a :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x-2y) \\ \\ -4(x-2y) \end{pmatrix} \text{ et } \nabla f(0,0) = 0.$$

et

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} = \nabla^2 f(0,0).$$

Les mineurs principaux sont 2 *et* 8, *donc* $\nabla^2 f(0,0)$ *est définie positive.*

D'où $x^* = (0,0)$ *est un minimum local strict de* f *sur* $\mathbb{R}^2$.

2.2.2 Cas différentiable

Théorème 2.6 *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction deux fois différentiable et convexe sur* $C \subset \mathbb{R}^n$ *convexe. Alors* x^* *est un minimum global de* f *ssi*

$$\nabla f(x^*)(y - x^*) > 0, \ \forall y \in C.$$

Si $C = \mathbb{R}^n$ *alors la condition se réduit à* $\nabla f(x^*) = 0$.

Exemple 2.6 *Considérons la fonction*

$$f(x,y) = x^2 + y^2,$$

et

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0\right\}.$$

$x^* = (0,0)$ *est un minimum global ?.*

On a :

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \nabla^2 f(0,0).$$

Les mineurs principaux sont positifs ou nuls, donc f *est convexe.*

Sois $y = (y_1, y_2) \in C$, *alors*

$$\nabla^T f(0,0) \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - (0,0) \right) = (0,1) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_2 \geq 0.$$

Donc $x^* = (0,0)$ *est un minimum global de* f.

2.3 Exercices corrigés

Exercice 2.1 *On considére la fonctionla fonction $f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par :*

$$f(x,y) = x^2 + y^2.$$

Montrer que $x^* = (0,0)$ est un minimum strict.

———————————————————————

Solution : *On a :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y,$$

et

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0).$$

Alors

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

et

$$(x,y)\nabla^2 f(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x,y)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\left(x^2 + y^2\right).$$

Si

$$(x,y) \neq (0\,(,0)),$$

alors

$$2\left(x^2 + y^2\right) > 0.$$

Donc $\nabla^2 f(0,0)$ est définie positive. D'où $x^* = (0,0)$ est un minimum local strict.

Exercice 2.2 *Etudier les solutions optimales locales de la fonction f définie par :*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + 3x - 2y + 1.$$

———————————————————————

Solution : *Calculons les points stationnaires de f :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x - y + 3, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -x + 2y - 2, \end{aligned}$$

alors

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ \\ -x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

On calcul

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)\ \ et\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right).$$

On a

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2\ \ et\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-1.$$

Par conséquent

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)\right)^2=4-1=3>0.$$

D'autre part

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)=2>0.$$

Donc $x^*=(0,0)$ *est un minimum local strict.*

Exercice 2.3 *Soit* $a\in\mathbb{R}$. *On considére la fonction* $f_a:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *définie par :*

$$f_a(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2+ax_1x_2-2x_1-2x_2.$$

1 : *Etudier la convexité de la fonction* f_a *selon les valeurs de* a.

2 : Déterminer en fonction des valeurs du paramètre a les points critiques de la fonction f_a et préciser leur nature.

Solution : 1: On a : $\nabla^2 f(x)=\begin{pmatrix}2 & a\\ a & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\Delta_1=2\\ \Delta_2=4-a^2\end{cases}$

donc f est convexe si $a\in[-2,2]$.

2 : Les points critiques : $\nabla f(x)=\begin{pmatrix}2x+ay-2\\ 2y+ax-2\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}2x+ay-2=0\\ 2y+ax-2=0\end{cases}\Rightarrow$ $\begin{cases}x=y\\ x=\frac{a}{2+a}\end{cases}$,

la nature du points critiques : $\nabla^2 f(x)=\begin{pmatrix}2 & a\\ a & 2\end{pmatrix}$.

si $a\in\,]-2,2[\,\Rightarrow\begin{cases}\Delta_1>0\\ \Delta_2>0\end{cases}\Rightarrow\nabla^2 f$ est D.P sur $\mathbb{R}^2\Rightarrow\left(\frac{a}{2+a},\frac{a}{2+a}\right)$ est un minimum local strict de f

et comme f est convexe alors le point $\left(\frac{a}{2+a},\frac{a}{2+a}\right)$ est un minimum globale de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.4 1) : *Montrer que la fonction* $f:\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n\to\mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i\log x_i,\ \ est\ convexe.$$

2) : Trouver un minimum global de f sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$.

3) : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction differentiable au point x^*. Montrer que si x^* est un minimum local de $\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$ alors $\nabla f(x^*) = 0$.

Solution : On calcul le gradient et la matrice hessienne

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 1+\log x_1 \\ 1+\log x_2 \\ \vdots \\ 1+\log x_n \end{pmatrix}, \text{ et } \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{x_n} \end{pmatrix}.$$

Puisque $\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} >, \prod_{i=2}^{n} \frac{1}{x_i} >, ..., \frac{1}{x_1} > 0$, alors $\nabla^2 f$ $S.D.P$

donc f est convexe.

2.2. $\nabla f(x) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+\log x_1 \\ 1+\log x_2 \\ \vdots \\ 1+\log x_n \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = e^{-1} \\ x_2 = e^{-1} \\ \vdots \\ x_n = e^{-1} \end{cases}$, on pose $x^* = (e^{-1}, e^{-1}, ..., e^{-1})$.

$\nabla^2 f(x^*) = \begin{pmatrix} e & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & e \end{pmatrix}$ $S.D.P$, $f \in C^1\left(\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n.\right)$ et $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$ est convexe, donc $\forall y \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$, $\nabla f(x^*)(y - x^*) = 0$.

D'où $x^* = (e^{-1}, e^{-1}, ..., e^{-1})$ est un minimumu global de f.

Exercice 2.5 *On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par la relation suivante :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = x^2 + y^2 + xy.$$

1 : Montrer que la fonction f est coercive et strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.

2 : En déduire que f possède un unique minimum sur $\mathbb{R}^2$.

Solution : 1 : Montrer que la fonction f est coercive.

On a

$$f(x,y) = \left(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \geq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}\|x,y\|,$$

donc

$$\begin{array}{rcl} \lim f(x,y) & = & +\infty, \\ \|x,y\| & \to & +\infty \end{array}$$

d'où f est coercive.

2.1 : Montrer que la fonction f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$. La matrice hessienne de f en tout point x de $\mathbb{R}^2$ est égal à

$$H_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = 3 > 0.$$

Cette matrice est définie positive et donc f est strictement convexe.

2 : La fonction f est continue et coercive donc possède au moins un minimum sur $\mathbb{R}^2$. De plus, f est strictement convexe donc ce minimum est unique. Le minimum est $(x,y) = (0,0)$.

Exercice 2.6 *Soit f la fonction définie pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ par :*

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y.$$

1 : (a) *Calculer les dérivées partielles première de f.*

(b) *En déduire que le seul point critique de f est $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.*

2 : *Montrer que f présente un minimum local en $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ est donner la valeur de ce minimum.*

3 : *On considère la fonction g définie pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ par :*

$$g(x,y) = 2e^{x^2} + 2e^{y^2} + 2e^{x+y} - e^x - e^y.$$

En déduire que la fonction g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et péciser en quel point ce minimum est atteint.

———————————————————————

Solution : *Soit f la fonction définie pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ par :*

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y.$$

1 : (a) : f *est de classe C^2 sur* $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 4x + 2y - 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2x + 4y - 1, \end{aligned}$$

(b) : (x,y) *est un point critiques ssi*

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y - 1 = 0 \ldots (L_1) \\ 2x + 4y - 1 = 0 \ldots (L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6y - 1 = 0 \ldots L_1 - 2L_2 \\ 2x + 4y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{6} \\ x = \frac{1}{6} \end{cases}.$$

Donc le seul point critique de f est $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

2 : *f est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$ *et*

$$a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 4, b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2 \text{ et } c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 4.$$

En $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ *on a* $ac - b^2 = 16 - 4 = 12$ *et* $a = 2 > 0$, *donc la matrice hessienne de* f *en* $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ *est définie positive. Sur* $\mathbb{R}^2$ *le point critique* $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ *est un minimum local et la valeur de ce minimum est*

$$f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) = 2\frac{1}{36} + 2\frac{1}{36} + 2\frac{1}{36} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}.$$

3 : *On considère la fonction* g *définie pour tout couple* (x, y) *de* $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$g(x, y) = 2e^{x^2} + 2e^{y^2} + 2e^{x+y} - e^x - e^y.$$

On remarque que $g(x, y) = f(e^x, e^y)$ *et comme* $f(x, y) \geq -\frac{1}{6}$ *pour tout couple* (x, y), *alors*

$$g(x, y) \geq -\frac{1}{6}, \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Et comme $g\left(\ln\left(\frac{1}{6}\right), \ln\left(\frac{1}{6}\right)\right) = f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ *alors ce minorant est atteint.*

Donc la fonction g *possède un minimum global sur* $\mathbb{R}^2$ *en* $(-\ln 6, -\ln 6)$.