Chapitre 1 : Échantillonnage et Reconstitution

M1 Electrotechnique

Université de Khemis Miliana
Dr. ABDELKADER Rabah

Table des matières

Objectifs

Le chapitre "Échantillonnage et Reconstitution" vise à :

- Définir le mot échantillonnage et la reconstitution
- Connaître l'échantillonnage, la différence entre système continu, système échantillonné et système discret.
- Montrer les principes fondamentaux de l'échantillonnage
- Expliquer comment on reconstruit un signal analogique à partir de données à temps échantillonné
- Appliquer le théorème de Shannon à l'échantillonnage et la reconstitution
- Expertiser l'opération d'échantillonnage et la reconstitution sur des exemples de signaux usuels

Introduction

Dans la réalité industrielle, la complexité des systèmes, ainsi que celle des traitements à réaliser, nécessite souvent le recours à des outils numériques de traitement : ordinateurs, calculateurs, systèmes numériques en tout genre. De tels outils ne peuvent en aucun cas s'accommoder de signaux continus ; ceux-ci doivent être transformés en suites de nombres pour pouvoir être traités. De même, ces systèmes délivrent, à leur sortie, des suites de valeurs numériques, autrement dit, des signaux numériques.

Pour transformer un signal continu en une suite de nombres compatible avec un système de traitement numérique, on a recours à deux opérations successives (figure 1.1):

1. l'échantillonnage qui consiste à prélever, à intervalles de temps réguliers, des valeurs discrètes du signal,
2. la *conversion analogique numérique*∗ qui transforme ces échantillons en nombres, généralement codés sous forme binaire

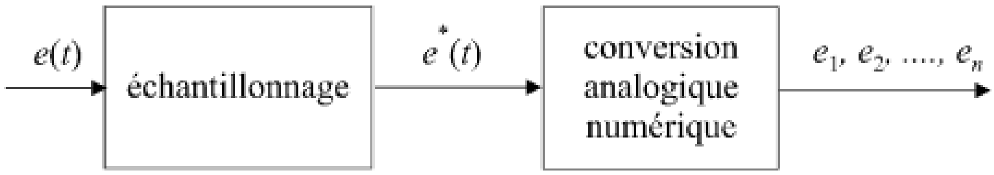


Figure 1.1 Échantillonnage et conversion analogique numérique d'un signal.

Échantillonnage

1. Principe fondamentaux de l'échantillonnage

Définition

L'échantillonnage d'un signal temporel $s(t)$ consiste à transformer celui-ci en une suite discrète $s(kT_e)$ de valeurs prises à des instants kT_e. T_e est appelée période d'échantillonnage. Les instants kT_e sont appelés les instants d'échantillonnages. L'échantillonnage produit donc, à partir d'un signal $s(t)$, la suite d'échantillons $s(kT_e)$:

$$s(kT_e)=\{s(0), s(T_e), s(2T_e), \dots, s(kT_e)\}$$

que l'on note, en général :

$$s^*(t)=\{s_0, s_1, s_2, \dots, s_k\}$$

Ou encore :

$$s(k)=\{s_0, s_1, s_2, \dots, s_k\}$$

k :variable entière positive

Méthode

Pratiquement, échantillonner un signal revient à le multiplier par une fonction d'échantillonnage $p(t)$, nulle partout, sauf au voisinage des instants kT_e. Cette fonction, qui porte souvent le nom de peigne, est représentée sur la figure 1.2. Le résultat d'une opération d'échantillonnage, visible sur la figure 1.3 *[1]*∗:

$$s^*(t)=p(t)s(t)$$

la fonction peigne $p(t)$ est donnée par expression :

$$p(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_e)$$

avec δ est un impulsion de Dirac

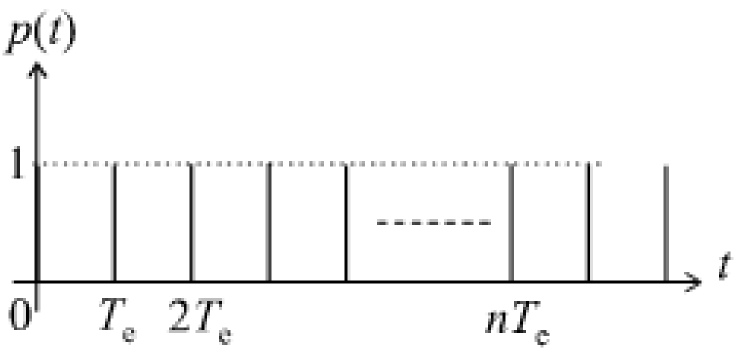


Figure 1.2 : Fonction d'échantillonnage.

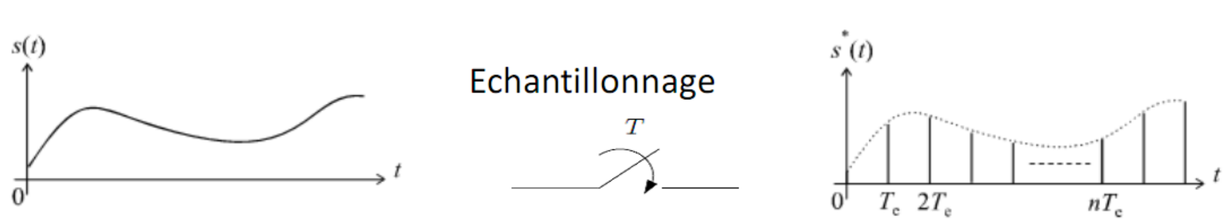


Figure 1.3 : Échantillonnage d'un signal quelconque.

Remarque

Cette suite ne correspond pas encore à des valeurs numériques. Ce signal échantillonné est un signal analogique à temps discret. Toutefois, on notera de la même manière la suite numérique obtenue après conversion analogique numérique.

Échantillonnage réel ***Complément***

L'échantillonnage idéal consiste à prélever la valeur d'un signal continu de façon instantanée, c-à-d en une durée infiniment courte. En pratique, les CANs ne peuvent pas acquérir un signal instantanément. Ils acquièrent le signal sur une fenêtre de durée finie, et le signal continu est le plus souvent moyenné sur cette fenêtre. Le signal résultant est donné par la figure 1.4 :

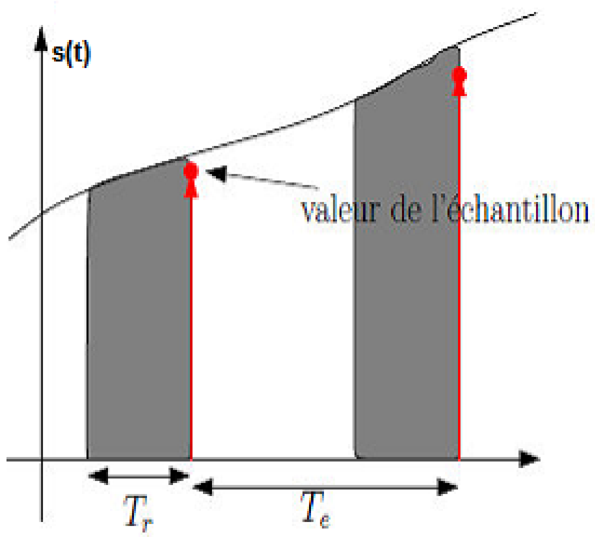
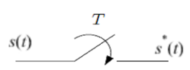


Figure. 1.4. échantillonnage réel

Remarque

Pour un échantillonnage idéal il faut que $T_r \ll T_e$ (période d'échantillonnage)

Dans la suite de ce cours, nous utiliserons pour l'´échantillonneur idéal le symbole indiqué sur la figure suivante :



Échantillonneur idéal

2. Transformée de Laplace d'un signal échantillonné

Nous présentons deux formulations de la transformée de Laplace d'un signal échantillonné. Nous considérons par la suite, sauf indication contraire, que les signaux sont causaux (c`ad $s(t)=0$ pour tout $t<0$).

Étant donnée qu'un signal échantillonné est une fonction `a temps continu, nous pouvons calculer sa transformée de Laplace :

$$S^*(p)=L\{s^*(t)\}=\int_0^{+\infty} s^*(t)e^{-pt}\,dt$$

En utilisant cette relation et la causalité du signal $s^*(t)$, nous déduisons que :

$$S^*(p)=\sum_{k=0}^{\infty} s(kT_e)\int_0^{\infty} \delta(t-kT_e)e^{-pt}\,dt=\sum_{k=0}^{\infty} s(kT_e)L\{(\delta(t-kT_e))\}$$

o`u la transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac est donnée par :

$$L\{\delta(t-kT_e)\}=\left\{e^{-kT_e}, k\geq 0, sinon, 0\right\}$$

Cela implique que :

$$S_e(p)=\sum_{0}^{+\infty} s(kT_e)e^{-kT_e p}$$

3. Spectre d'un signal échantillonné

Supposons qu'un signal $s(t)$ à échantillonner soit à énergie finie et possède, par conséquent, une transformée de Fourier :

$$S(f)=\int_0^{\infty} s(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\,dt$$

avec $\omega=2\pi f$.

Calculons alors la transformée de Fourier $|S^*(f)|$ du signal échantillonné $s^*(t)$. Le signal $p(t)$ étant périodique,il possède une décomposition en série de Fourier que nous pouvons écrire:

$$p(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k\mathrm{e}^{jk\omega_e t}$$

avec $\omega_e=\dfrac{2\pi}{T_e}$

On a alors :

$$s^*(t)=s(t)p(t)=s(t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k\mathrm{e}^{jk\omega_e t}$$

Donc la transformée de Fourier de $s^*(t)$ est donnée par :

$$S^*(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[s(t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k\mathrm{e}^{jk\omega_e t}\right]\mathrm{e}^{j\omega t}\,dt$$

soit :

$$S^*(f)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[A_k S(f-kf_e)\right]$$

avec $f_e=\dfrac{1}{T_e}$ étant la fréquence d'échantillonnage choisie.

La transformée de Fourier du signal échantillonné apparaît donc comme une superposition des transformées de Fourier de $s(t)$ aux points $f-f_e$. Pour $k=0$, on retrouve le spectre $|S(f)|$ du signal initial. Pour k non nul, on retrouve ce même spectre, mais décalé, par rapport à $|S(f)|$ de kT_e avec $k \in \mathbb{Z}$. On dit aussi que $|S(f)|$ est périodique de fréquence f_e. La figure 1.4 présente les spectres comparés de $s(t)$ et de $s^*(t)$ *[1].*∗

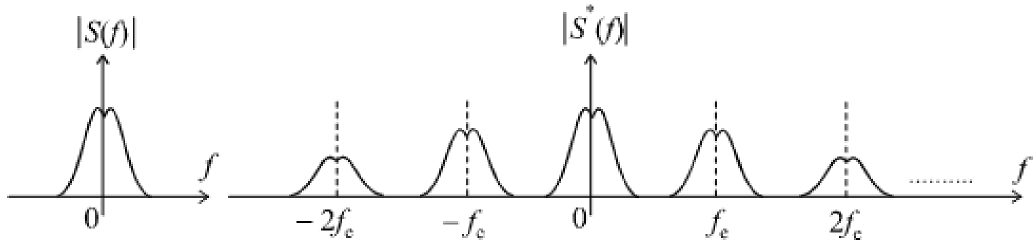


Figure 1.4 : Spectre d'un signal échantillonné.

4. Théorème de Shannon

À partir du spectre du signal échantillonné représenté sur la figure 1.4, il est possible de mettre en évidence l'un des résultats les plus fondamentaux de l'étude des signaux échantillonnés. Un des objectifs essentiels de l'échantillonnage consiste à ne pas perdre d'information lors de la discrétisation dans le temps, ce qui peut se traduire par le fait qu'il doit être possible, à partir du spectre du signal échantillonné, de reconstituer simplement celui du signal original. Un simple coup d'œil au spectre $|S^*(f)|$ nous montre que cela est possible s'il n'existe aucun recouvrement entre les différents segments de spectre.

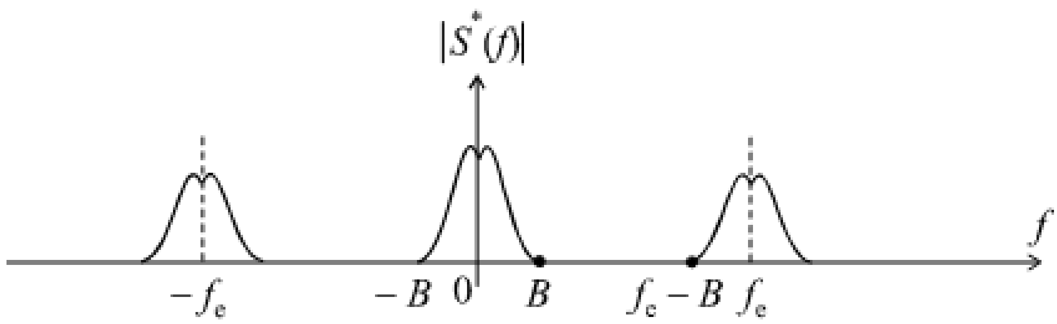


Figure 1.5 : Spectre d'un signal échantillonné

Si B est la largeur spectrale du signal $s(t)$, autrement dit sa limite fréquentielle supérieure, le premier segment décalé, dans le spectre de $s^*(t)$, qui se trouve centré sur la fréquence f_e, s'étend de $f_e - B$ à $f_e + B \rightarrow f_e > B$. La condition de non recouvrement est donc, de toute évidence :

$$B < f_e - B \rightarrow f_e > 2B$$

Cette inégalité constitue le théorème de *Shannon*∗ qui peut également s'énoncer de la manière suivante *[2]:*∗

Pour préserver, lors de son échantillonnage, l'information contenue dans un signal, la fréquence d'échantillonnage fe doit être supérieure au double de la largeur spectrale du signal.

5. Filtre anti-repliement

Si pour une fréquence d'échantillonnage fixée le signal comporte des composantes spectrales `a des fréquences supérieures `a la fréquence de Nyquist (du bruit par exemple) alors il faut filtrer le signal analogique avant l'échantillonnage de manière à assurer que le repliement soit négligeable. Le filtre passe-bas réalisant cette tache est appel´e filtre anti-repliement (“antialiasing filter” en anglais).

6. Exemples de signaux usuels échantillonnés

Impulsion unité

On définit l'impulsion unité échantillonnée par le signal :

$$\delta^*(t)=\{1,0,0,\ldots,0\}\rightarrow\left\{\delta^*(kT_e)=1,\, pour:k=1,\delta^*(kT_e)=0,\, pour:k\neq 0\right\}$$

La figure 1.6 présente une représentation schématique de cette impulsion unité.

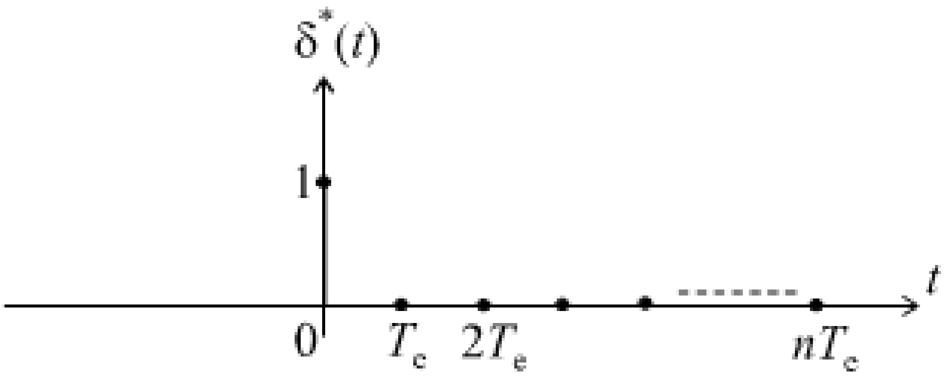


Figure 1.6 Impulsion unité.

Échelon unité

On définit l'échelon unité échantillonné par la formule suivante:

$$u^*(t)=\{1,1,1,\ldots.1\}$$

autrement dit :

$$\{u(k)=1\,,\forall\, k\geq 0\,, et\, u(k)=0,\,\forall\, k<0\}$$

La figure 1.7 présente une représentation schématique de cet échelon unité.

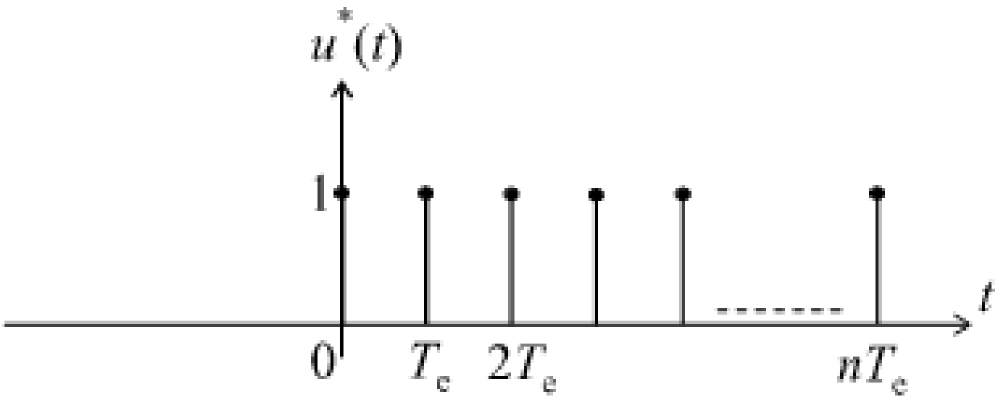


Figure 1.7 : Échelon unité

Cet échelon unité n'est rien d'autre que la somme d'impulsions unités décalées dans le temps :

$$u^*(t)=\delta^*(t)+\delta^*(t-T_e)+\delta^*(t-2T_e)+\ldots$$

soit :

$$u^*(t)=\sum_{k=0}^{n}\delta^*(t-kT_e)$$

On pose parfois :

$$\delta^*(t-kT_e)=\delta_k$$

ce qui nous conduit à la notation :

$$u^*(t)=\sum_{k=0}^{n}\delta_k$$

Remarque

Nous considérerons comme nuls pour t négatif, tous les signaux que nous étudierons.

Reconstitution

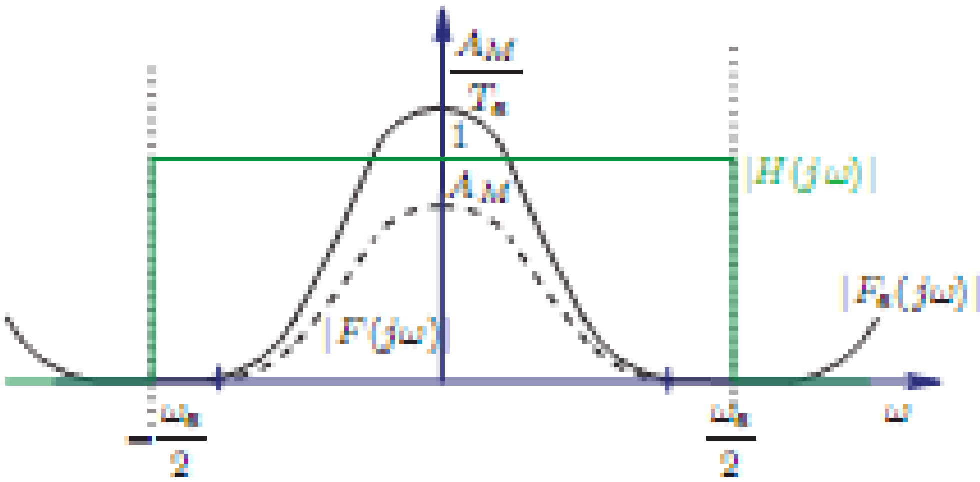
1. Principe de la reconstitution

Définition

L'opération inverse de l'échantillonnage, c'est-à-dire la transformation d'une suite d'échantillons en un signal continu acceptable technologiquement par les actionneurs, est appelée reconstitution, restitution ou encore extrapolation. Cette étape est indispensable en commande numérique ; en effet, à partir des nombres générés par l'ordinateur (généralement un calculateur numérique), une grandeur de commande analogique doit être construite afin d'activer le système à commander. En fait, cette opération est réalisée à l'aide de filtres ou de bloqueurs *[2]*∗.

2. Reconstruction idéale

La reconstruction idéale est basée sur l'utilisation d'un filtre passe-bas idéal de réponse harmonique $H(j\omega)$ qui coupe toutes les composantes spectrales correspondant aux pulsations supérieures à la pulsation de Nyquist. Comme illustré sur la figure 1.9, cette réponse harmonique correspond `a une fonction fenêtre rectangulaire, centrée et de largeur ω_e.



Spectre d'un signal à temps continu

Alors, $S(j\omega)=T_e S^*(j\omega)H(j\omega)$ et, en utilisant la transformée de Fourier inverse, on obtient :

$$s(t)=T_e TF^{-1}\{S^*(j\omega)H(j\omega)\}=T_e(f_e*h)(t)$$

o`u : $h(t)=TF^{-1}\{H(j\omega)\}$ et * désigne le produit de convolution.

La réponse impulsionnelle du filtre peut être calcul´e en utilisant la transformée de Fourier inverse :

$$h(t)=TF^{-1}\{H(j\omega)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\omega_e}{2}}^{\frac{\omega_e}{2}} e^{j\omega t}\,d\omega=\frac{1}{\pi t}\sin\left(\frac{\pi t}{T_e}\right)$$

En utilisant la définition du produit de convolution, on trouve :

$$(s^* * h)(t) = \int_{\Re} s^*(\tau) h(t-\tau) d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s^*(kT_e) \frac{1}{\pi(t-kT_e)} \sin\left(\frac{\pi(t-kT_e)}{T_e}\right)$$

Donc

$$(s^* * h)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT_e)\, sinc\left(\frac{(t-kT_e)}{T_e}\right)$$

ou la fonction “sinc” représente le sinus cardinal.

3. Reconstruction approchée

Bloqueur d'ordre zéro (BOZ)

Le développement important de la théorie des systèmes échantillonnés est dû principalement au développement de la commande par calculateur numérique. Dans ce cas, souvent, le signal fourni par le calculateur numérique est un signal en escalier, c'est-à-dire variant par paliers.

Un bloqueur d'ordre zéro (*BOZ*∗) est caractérisé par le fait que sa sortie entre les instants d'échantillonnage kT_e et $(k+1)T_e$ est constante et égale à $s(kT_e)$. Le BOZ permet de reproduire exactement un signal constant échantillonné. Le bloqueur BOZ étant représenté figure suivante *[2]*∗:

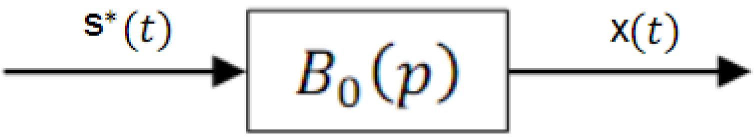


Figure 1.9 : Schéma fonctionnel d'un bloqueur d'ordre zéro (BOZ)

Sa réponse impulsionnelle est définie comme suit :

$$h_{B_0}(t) = u(t) - u(t-T), \forall\, 0 \leqslant t \leqslant T$$

La fonction de transfert continue du bloqueur BOZ s'écrit par :

$$B_0(p) = \frac{1 - e^{Tp}}{p}$$

La figure (1.10) montre la réponse impulsionnelle de $BOZ*$:

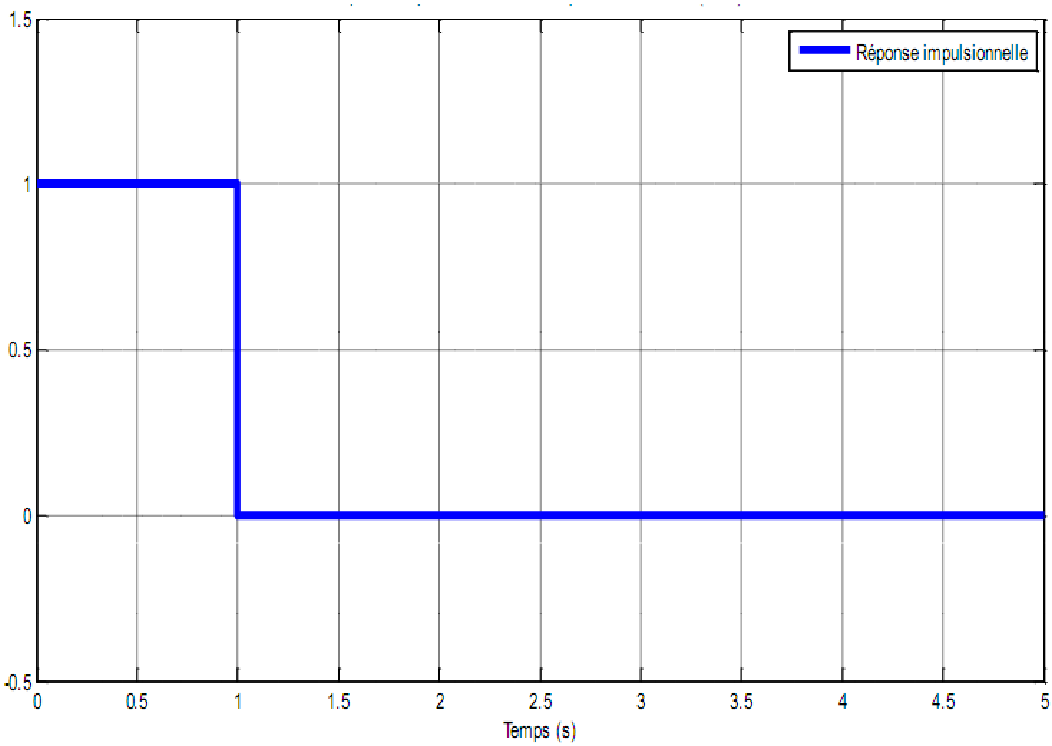


Figure 1.10 : Réponse impulsionnelle d'un BOZ obtenue avec T = 1(s)

L'association échantillonneur-bloqueur d'ordre zéro permet une discrétisation par paliers d'un signal continu (Figure (1.11)).

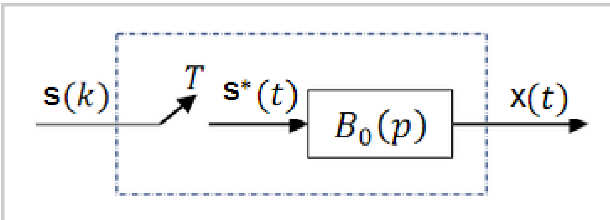


Figure 1.11 : Schéma fonctionnel d'un échantillonneur-bloqueur d'ordre zéro

La figure 1.12 représente deux signaux sinusoïdaux : continu et échantillonné-bloqué. L'échantillonnage a été effectué avec T = 0.25 (s).

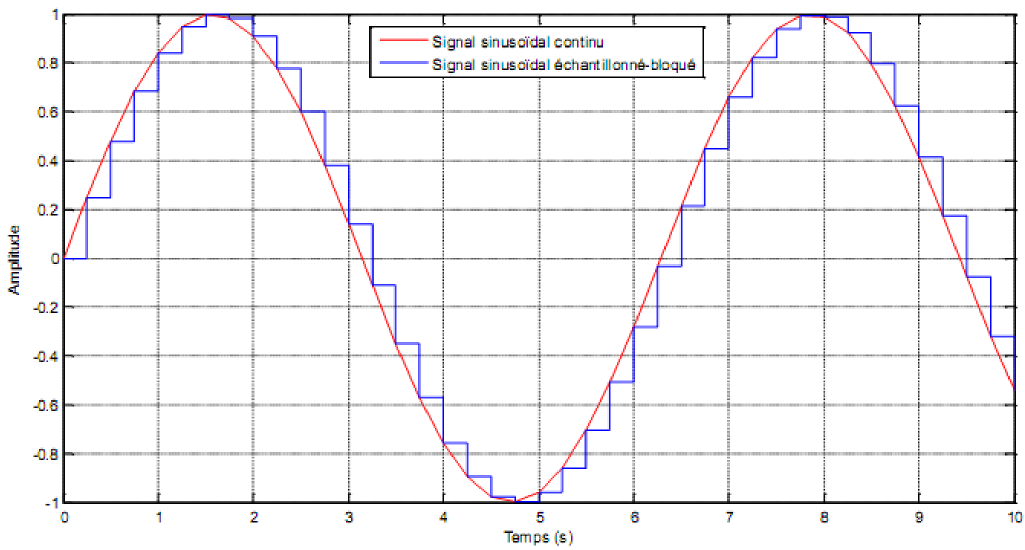


Figure 1.12 : Signal sinusoïdal continu VS Signal sinusoïdal échantillonné- bloqué

Bloqueur d'ordre un (BOU)

Le bloqueur d'ordre un (*BOU*∗) permet l'extrapolation entre les instants d'échantillonnage kT_e et à partir de $s(kT_e)$ et de $s(k+1)T_e$. Il permet donc de reproduire un signal échantillonné. Le bloqueur *BOU*∗ étant représenté par le schéma fonctionnel suivant *[2]*∗:

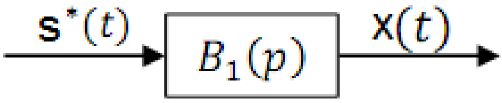


Figure 1.13: Schéma fonctionnel d'un bloqueur d'ordre un (BOU)

Sa fonction de transfert continue est donnée par l'équation suivante :

$$B_1(p)=(1-e^{-Tp})^2\left(\frac{1+e^{Tp}}{p^2}\right)$$

La réponse impulsionnelle de *BOU*∗ est donnée par la figure (1.14) :

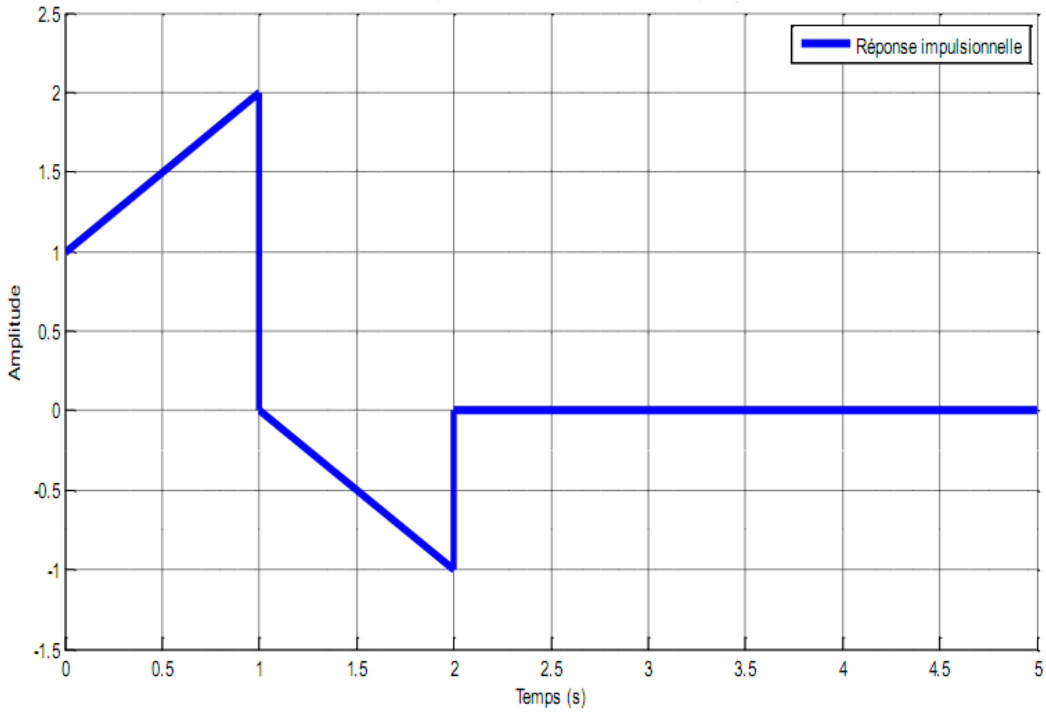


Figure 1.14: Réponse impulsionnelle d'un BOU obtenue avec T = 1(s)

Glossaire

Asservissement

un asservissement est un système dont l'objet principal est d'atteindre le plus rapidement possible sa valeur de consigne et de la maintenir, quelles que soient les perturbations externes1. Le principe général est de comparer la consigne et l'état du système de manière à le corriger efficacement. On parle également de système commandé par rétroaction négative ou en boucle fermée.

Conversion analogique numérique

Un convertisseur analogique-numérique (CAN, parfois convertisseur A/N, ou en anglais ADC pour Analog to Digital Converter ou plus simplement A/D) est un dispositif électronique dont la fonction est de traduire une grandeur analogique en une valeur numérique codée sur plusieurs bits. Le signal converti est généralement une tension électrique

Signaux causaux

En traitement numérique du signal, un signal causal est défini par s(t)=0 pour t<0

Abréviations

BOU : bloqueur d'ordre un
BOZ : bloqueur d'ordre zéro
Shannon : Claude Elwood Shannon (30 avril 1916 à Petoskey2, Michigan - 24 février 2001 à Medford, Massachusetts) est un ingénieur en génie électrique et mathématicien américain. Il est l'un des pères, si ce n'est le père fondateur, de la théorie de l'information

Bibliographie

livre Automatique des systèmes échantillonnés, J. M. Retif, INSA

livre Réglages échantillonnés (T1 et T2), H. Buhler, PPR