Chapitre 1

Fonctions spéciales

1.1 Définition des fonctions Gamma et Béta

1.1.1 Fonction Gamma

La fonction Gamma est simplement la généralisation de la factorielle, cette fonction est l'un des outils de base du calcul fractionnaire.

Fonction factorielle

On calcule les valeurs de certaines intégrales. Pour $\alpha > 0$, on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha}. \tag{1.1}$$

On dérive les deux membres de (1.1) par rapport à α, on aura :

$$\int_0^{+\infty} -t e^{-\alpha t} dt = -\frac{1}{\alpha^2},$$

ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} t e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha^2}. \tag{1.2}$$

Maintenant, on dérive (1.2), on obtent :

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-\alpha t} dt = \frac{2}{\alpha^3}.$$

Pour la dérivée d'ordre 3, on a :

$$\int_0^{+\infty} t^3 e^{-\alpha t} dt = \frac{2.3}{\alpha^4} = \frac{3!}{\alpha^4}.$$

En générale

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} dt = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}.$$

Pour $\alpha = 1$, on a :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!.$$

Définition 1.1 *La fonction Gamma est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\, e^{-t} dt, \quad \alpha > 0. \tag{1.3}$$

Proposition 1.1 *La fonction Gamma est bien définie pour tout $\alpha > 0$.*

Preuve. On montre que l'integrale $\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\, e^{-t} dt$ existe.

Soit $\alpha > 0$, on peut déstingue 3 cas :

Si $\alpha = 1$, on a :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$$

Si $\alpha > 1$, on a :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\, e^{-t} dt = \int_0^{C} t^{\alpha-1}\, e^{-t} dt + \int_C^{+\infty} t^{\alpha-1}\, e^{-t} dt.$$

La premiére integrale existe puisque la fonction $t^{\alpha-1}e^{-t}$ est continue sur $[0, C]$, alors

$$\lim_{x\to+\infty} t^2 t^{\alpha-1} e^{-t} = 0 \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists B(\varepsilon) > 0;\ t > B(\varepsilon) \Rightarrow t^2 t^{\alpha-1} e^{-t} < \varepsilon,$$

pour $\varepsilon = 1$; $\exists\ B(1) > 0$ tq : $\forall t > B(1)$, on a $t^{\alpha-1}e^{-t} < \dfrac{1}{t^2}$; comme $\int_C^{+\infty} \dfrac{1}{t^2} dt$ existe, il en résulte que l'integrale $\int_C^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ existe, d'où $\Gamma(\alpha)$ est bien définie.

Si $0 < \alpha < 1$ on a :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\, e^{-t} dt = \int_0^{C} t^{\alpha-1}\, e^{-t} dt + \int_C^{+\infty} t^{\alpha-1}\, e^{-t} dt,$$

l'integrale $\int_C^{+\infty} t^{\alpha-1}\, e^{-t} dt$ existe (même preuve que $\alpha > 1$) et pour l'intégrale $\int_0^{C} t^{\alpha-1}\, e^{-t} dt$ on a : $e^{-t} \sim 1$ au voisinage de 0, d'ou $t^{\alpha-1}e^{-t} \sim t^{\alpha-1}$, donc les intégrales $\int_0^{C} t^{\alpha-1}\, e^{-t} dt$ et $\int_0^{C} t^{\alpha-1} dt$ sont de même nature et comme

$$\int_0^{C} t^{\alpha-1} dt = \left[\frac{t^\alpha}{\alpha}\right]_0^C = \frac{C^\alpha}{\alpha},$$

on en déduit que : $\int_0^{C} t^{\alpha-1}\, e^{-t} dt$ existe, alors $\Gamma(\alpha)$ est définie pour tout $\alpha > 0$. ■

Exemple 1.1 *Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$*

Par définition, on a :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt.$$

On pose $t = x^2$ alors

$$dt = 2x dx,$$

d'où

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} e^{-x^2} 2x dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Maintenant, on calcule $\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\left[2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dy\right]^2=\left[2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\right]\left[2\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy\right]$$

$$=4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-\left(y^2+x^2\right)}dydx.$$

On pose

$$\begin{cases} y=r\cos\theta \\ x=r\sin\theta \end{cases},\ r\in[0,+\infty[\ \ et\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],$$

alors

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=4\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{+\infty}e^{-r^2}rdrd\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{+\infty}d\theta$$

$$=4\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=4\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\pi,$$

ce qui implique que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

Proporiétés de la fonction Gamma

Proposition 1.2 *Pour tout* $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\{0,\ -1,\ -2,...\}$ *et* $n\in\mathbb{N}$, *la fonction Gamma satisfait les propriétés suivantes :*

(1) :

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha).$$

(2) :

$$\Gamma(\alpha+n)=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)...(\alpha+n-1)\Gamma(\alpha).$$

(3) :

$$\Gamma(n)=(n-1)!,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

(4) :

$$\Gamma(\alpha+n+1)=\Gamma(\alpha)\prod_{i=0}^{n}(\alpha+i),\forall n\in\mathbb{N}.$$

Preuve. Propriété (1) : La preuve de cette propriété se fait par une intégration par partie. On a :

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha) &= \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\, e^{-t} dt \\
& \left[\frac{t^\alpha e^{-t}}{\alpha}\right]_0^\infty + \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} t^\alpha\, e^{-t} dt \\
&= \frac{1}{\alpha}\Gamma(\alpha+1).
\end{aligned}$$

D'où la formule (1).

Propriété (2) : D'après (1), on a :

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha) &= \frac{1}{\alpha}\Gamma(\alpha+1) \\
&= \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha+1}\Gamma(\alpha+2)\right] \\
&= \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\alpha+1}\left[\frac{1}{\alpha+2}\Gamma(\alpha+3)\right] \\
&= \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\alpha+1}\frac{1}{\alpha+2}\left[\frac{1}{\alpha+3}\Gamma(\alpha+4)\right] \\
&= \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\alpha+1}\frac{1}{\alpha+2}\frac{1}{\alpha+3}\left[\frac{1}{\alpha+4}\Gamma(\alpha+5)\right].
\end{aligned}$$

En répétant le processus n fois, on obteint la relation suivante :

$$\Gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\alpha+1}\frac{1}{\alpha+2}\frac{1}{\alpha+3}\cdots\frac{1}{\alpha+n-1}\Gamma(\alpha+n).$$

Ce qui achève la preuve de (2).

Propriété (3) : Pour démontrer que $\Gamma(n) = (n-1)!$, en utilisant la récurrence.

$\bullet$: Pour $n = 1$, on a :

$$\Gamma(1) == \int_0^{+\infty} t^{1-1}\, e^{-t} dt = 1 = 0!.$$

$\bullet\bullet$: On suppose que $\Gamma(n) = (n-1)!$ et on montre que $\Gamma(n+1) = n!$. d'après la propriété (1), on a :

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\
&= n(n-1)! = n!.
\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est démontrée.

Propriété (4) : Montrons par récurrence.

• : Pour $n = 1$, on a :

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

•• : On suppose que

$$\Gamma(\alpha + n + 1) = \Gamma(\alpha) \prod_{i=0}^{n} (\alpha + i)$$

et on montre que

$$\Gamma(\alpha + n + 2) = \Gamma(\alpha) \prod_{i=0}^{n+1} (\alpha + i)$$

d'après la propriété (1), on a :

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha + n + 2) &= (\alpha + n + 1)\Gamma(\alpha + n + 1) \\ &= (\alpha + n + 1)\Gamma(\alpha) \prod_{i=0}^{n} (\alpha + i) \\ &= \Gamma(\alpha) \prod_{i=0}^{n+1} (\alpha + i). \end{aligned}$$

■

Quelque valeurs particulières de la fonction Gamma

On donne quelques valeurs particuliéres de la fonction Gamma :
1 : $\Gamma(1) = 0! = 1.$
2 : $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$
3 : $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$
4 : $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right) ... - \frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$
$= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}.$

1.1.2 Fonction Bêta

Définition 1.2 *La fonction Bêta est donnée par :*

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt, \ \alpha > 0, \ \beta > 0. \tag{1.4}$$

Forme trigonométrique de la fonction Bêta

Pour obtenir la forme trigonométrique de la fonction Béta, on pose :

$$t = \sin^2\theta, \ \text{alors } dt = 2\sin\theta\cos\theta d\theta, \begin{cases} t = 1 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \\ t = 0 \Longrightarrow \theta = 0, \end{cases}$$

et on a :

$$1-t=1-\sin^2\theta=\cos^2\theta.$$

En remplacant dans (1.4) on obtient

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2\theta\right)^{\alpha-1}\left(\cos^2\theta\right)^{\beta-1}(2\sin\theta\cos\theta)d\theta$$

$$B(\alpha,\beta)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2(\alpha-1)}(\cos\theta)^{2(\beta-1)}(\sin\theta\cos\theta)d\theta,$$

d'où

$$B(\alpha,\beta)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2\alpha-1}(\cos\theta)^{2\beta-1}d\theta.$$

Proposition 1.3 *Pour tout $a,b\in\mathbb{R}^+$, on a :*

$$\int_a^b(b-t)^{\alpha-1}(t-a)^{\beta-1}dt=(b-a)^{\alpha+\beta-1}B(\beta,\alpha).$$

Preuve. On pose $y=\dfrac{t-a}{b-a}$, alors $(b-a)\,dy=dt$, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^1 y^{\beta-1}(b-a)^{\beta-1}(b-a-(b-a)y)^{\alpha-1}(b-a)\,dy\\ =\;&(b-a)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 y^{\beta-1}(1-y)^{\alpha-1}dy=(b-a)^{\alpha+\beta-1}B(\beta,\alpha).\end{aligned}$$

■

Quelques propriétés de la fonction Bêta

Proposition 1.4 *La fonction Bêta est symétrique ($B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha)$).*

Preuve. On pose :

$$x=1-t\Rightarrow dx=-dt,$$

et

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx=-\int_1^0(1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}dt=\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}dt,$$

d'où

$$B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha).$$

■

Proposition 1.5 *La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :*

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Preuve. On a :

$$\Gamma\left(\alpha\right)=\int_{0}^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt,$$

on pose : $t=y^{2}\Rightarrow dt=2ydy$, et

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\alpha\right) &= \int_{0}^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt=2\int_{0}^{+\infty}y^{2(\alpha-1)}e^{-y^{2}}ydy \\ &= 2\int_{0}^{+\infty}y^{2\alpha-1}e^{-y^{2}}dy.\end{aligned}$$

Si on pose $y=x$, alors

$$\Gamma\left(\beta\right)=2\int_{0}^{+\infty}x^{2\beta-1}e^{-x^{2}}dx.$$

Maintenant, on multiple les deux membres de deux équations et on passe en coordonnées polaires

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\beta\right) &= 4\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}y^{2\alpha-1}e^{-y^{2}}x^{2\beta-1}e^{-x^{2}}dxdy \\ &= 4\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}y^{2\alpha-1}x^{2\beta-1}e^{-\left(x^{2}+y^{2}\right)}dxdy \\ &= 4\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(r\cos\theta\right)^{2\beta-1}\left(r\sin\theta\right)^{2\alpha-1}e^{-r^{2}}rdrd\theta \\ &= 4\int_{0}^{+\infty}r^{2(\alpha+\beta)-1}e^{-r^{2}}dr\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\theta\right)^{2\beta-1}\left(\sin\theta\right)^{2\alpha-1}d\theta \\ &= 2\int_{0}^{+\infty}r^{2(\alpha+\beta)-1}e^{-r^{2}}dr2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\theta\right)^{2\beta-1}\left(\sin\theta\right)^{2\alpha-1}d\theta \\ &= \Gamma\left(\alpha+\beta\right)B\left(\alpha,\beta\right).\end{aligned}$$

Donc

$$\beta\left(\alpha,\mu\right)=\frac{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\mu\right)}{\Gamma\left(\alpha+\mu\right)}. \tag{1.5}$$

■

Exemple 1.2 *Calculer* $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

On a :

$$\begin{aligned}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1\right)}=\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}=\pi.\end{aligned}$$

Proposition 1.6 *Pour tout* $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, *on a :*

$$B(\alpha,\beta)=B(\alpha+1,\beta)+B(\alpha,\beta+1).$$

Preuve. En utilisant (1.5), on obtient :

$$\begin{aligned} B(\alpha,\beta+1) &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}=\frac{\Gamma(\alpha)\beta\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ &= \frac{\beta\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta), \end{aligned}$$

ce qui implique

$$(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta+1)=\beta B(\alpha,\beta),$$

alors

$$\begin{aligned} B(\alpha,\beta) &= \frac{\alpha}{\beta}B(\alpha,\beta+1)+B(\alpha,\beta+1) \\ &= \frac{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\beta\Gamma(\alpha+\beta+1)}+B(\alpha,\beta+1) \\ &= \frac{\beta\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\beta\Gamma(\alpha+\beta+1)}+B(\alpha,\beta+1) \\ &= B(\alpha+1,\beta)+B(\alpha,\beta+1). \end{aligned}$$

Donc

$$B(\alpha,\beta)=B(\alpha+1,\beta)+B(\alpha,\beta+1).$$

■

Proposition 1.7 *Pour tout* $(\alpha,\mu)\in\mathbb{R}^2$, *on a :*

$$B(\alpha,\beta+1)=\frac{\beta}{\alpha}B(\alpha+1,\beta)=\frac{\beta}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta).$$

et

$$B(\alpha,\alpha)=2^{1-2\alpha}B\left(\frac{1}{2},\alpha\right).$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} B(\alpha,\beta+1) &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}=\frac{\beta\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ &= \frac{\beta\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\alpha\Gamma(\alpha+\beta+1)}=\frac{\beta\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\alpha\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ &= \frac{\beta}{\alpha}B(\alpha+1,\beta). \end{aligned}$$

Donc

$$B(\alpha,\beta+1)=\frac{\beta}{\alpha}B(\alpha+1,\beta).$$

■

1.2 Fonction Mittag-Leffler

1.2.1 Fonction Mittag-Lefler à un seul paramétre

Définition 1.3 *La fonction Mittag-Lefler à un seul paramétre, est définie par :*

$$E_{\alpha}(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^{k}}{\Gamma(\alpha k+1)},\ \ \alpha>0. \tag{1.5}$$

Exemple 1.3 *Pour $\alpha=1$, on a :*

$$E_{\alpha=1}(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^{k}}{\Gamma(k+1)}=e^{t}.$$

1.2.2 Fonction Mittag-Lefler à un deux paramétres

Définition 1.4 *La fonction Mittag-Lefler à deux paramétres, est définie par :*

$$E_{\alpha,\beta}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k}}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\ \ \alpha>0,\ \ \beta>0. \tag{1.6}$$

Exemple 1.4 *Pour $\alpha=1$ et $\beta=2$, on a :*

$$\begin{aligned}
E_{1,1}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k}}{\Gamma(k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k}}{k!}=e^{t}.\\
E_{1,2}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k}}{\Gamma(k+2)}=\frac{1}{t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{e^{t}-1}{t}\ \ t\neq 0.\\
E_{2,1}\left(t^{2}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{\Gamma(2k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{2k!}=\cosh(t).
\end{aligned}$$

1.2.3 Généralisation de la fonction de Mittag-Leffler

Définition 1.5 *La fonction de Mittag-Leffler généralisée $E_{\alpha,\beta}^{\delta}$, est donnée par la formule suivante :*

$$E_{\alpha,\beta}^{\delta}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\delta)_{k}\,t^{k}}{\Gamma(\alpha k+\beta)\,k!},\alpha>0,\beta>0,\delta>0, \tag{1.7}$$

avec $(\delta)_{k}=\delta(\delta+1)\ldots(\delta+n-1)=\dfrac{\Gamma(\delta+n)}{\Gamma(\delta)}.$

Pour $\delta=1$,la formule (1.7) est réduite à Mittag-Leffler à deux paramètres.

Cas particuliers

Dans la formule (1.7), en prenant $\beta=1$ et $\delta=1$, on obtient :

$$E_{\alpha,1}^{1}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1)_{k}\,t^{k}}{\Gamma(\alpha k+1)\,k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k}}{\Gamma(\alpha k+1)}=E_{\alpha}(t),$$

et si on prend $\delta = 1$, et α et β quelconques, on obtient :

$$E^1_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k\, t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)\, k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = E_{\alpha,\beta}(t).$$

Proposition 1.8 *Soit $E_{\alpha,\beta}$ la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres telle que $\alpha = 1$ et $\beta = \gamma \in \mathbb{N}$, Alors :*

$$E_{1,\gamma}(t) = \frac{1}{t^{\gamma-1}} \left(e^t - \sum_{k=0}^{\gamma-2} \frac{t^k}{k!} \right).$$

Preuve. Par définition, on a :

$$E_{1,\gamma}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+\gamma)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+\gamma-1)!},$$

alors

$$\begin{aligned} E_{1,\gamma}(t) &= \frac{1}{t^{\gamma-1}} \left(e^t - \frac{t^{\gamma-2}}{(\gamma-2)!} - \frac{t^{\gamma-3}}{(\gamma-3)!} - \ldots - 1 \right) \\ &= \frac{1}{t^{\gamma-1}} \left(e^t - \sum_{k=0}^{\gamma-2} \frac{t^k}{k!} \right). \end{aligned}$$

■

Proposition 1.9 *Soit Soit $m \in \mathbb{N}^*$, alors la dérivée à l'ordre m de $E_{\alpha,\beta}(t)$ est donnée par :*

$$E^{(m)}_{\alpha,\beta}(t) = E_{\alpha,\beta}(t) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+k)!t^k}{\Gamma(\alpha m + \alpha k + \beta)\, k!}.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer des dérivées successives de $E_{\alpha,\beta}(t)$ jusqu'à la dérivée d'ordre m. ■

1.2.4 Quelques propriétés

Comme conséquences des définitions (1.5) et (1.6), on démontre les résultats suivants :

Théorème 1.1 *Soit $E_{\alpha,\beta}$, la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres. Alors, on a :*
1 : $E_{\alpha,\beta}(t) = tE_{\alpha,\alpha+\beta}(t) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}$.
2 : $E_{\alpha,\beta}(t) = \beta E_{\alpha,\beta+1}(t) + \alpha t \frac{d}{dt} E_{\alpha,\beta+1}(t)$.
3 : $\left(\frac{d}{dt}\right)^m \left(t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(t^\alpha)\right) = t^{\beta-m-1} E_{\alpha,\beta-m}(t^\alpha)$, $\beta > m$, $m \in \mathbb{N}$.

Preuve. 1. On utilise la formule (1.6), on obtient :

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1) + \beta)} \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{\Gamma(\alpha k + (\alpha+\beta))} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + (\alpha+\beta))} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + tE_{\alpha,\alpha+\beta}(t). \end{aligned}$$

2. Pour prouver 2, on procède comme suit :

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta}(t) &= \beta E_{\alpha,\beta+1}(t) + \alpha t \frac{d}{dt} E_{\alpha,\beta+1}(t) \\
&= \beta E_{\alpha,\beta+1}(t) + \alpha t \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta + 1)} \\
&= \beta E_{\alpha,\beta+1}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha k t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta + 1)} \\
&= \beta E_{\alpha,\beta+1}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha k + \beta - \beta) t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.
\end{aligned}$$

3. On applique, la dérivée $m^{éme}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt}\right)^m \left(t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(t^\alpha)\right) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^m \left(t^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \beta)}\right) \\
= \left(\frac{d}{dt}\right)^m \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha k + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)}\right) &= \frac{\Gamma(\alpha k + \beta)}{\Gamma(\alpha k + \beta - m)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha k + \beta - m - 1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \\
= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha k + \beta - m - 1}}{\Gamma(\alpha k + \beta - m)} &= t^{\beta - m - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \beta - m)}.
\end{aligned}$$

■

Théorème 1.2 *Soit $E_{\alpha,\beta}$, la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres. Alors pour tout $\gamma \in \mathbb{N}$, on a :*

$$t^\gamma E_{\alpha,\beta+\alpha\gamma}(t) = E_{\alpha,\beta}(t) - \sum_{k=0}^{\gamma-1} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer les propriétés de Mittag-Leffler. ■