République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Djilali Bounaama–Khemis Miliana

Faculté des Sciences et de la Technologie

Notes de cours
Mathématiques 2
(L1 ST-SM)

Présenté par : Dr. Leila Slimane

Année Universitaire-2021-2022

Table des matières

Chapitre 1

Matrices et Déterminants

1.1 Matrices

1.1.1 Définitions et notions

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{k}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n et p deux entiers naturels non nuls.

Définition 1.1.1 *On appelle matrice A de dimension (taille) $n \times p$ à coéfficients dans $\mathbb{k}$ un tableau rectangulaire de nombres dans $\mathbb{k}$ comportant n lignes et p colonnes. Ces nombres sont appelés coéfficients de la matrice A.*

Notation

1. Les matrices sont représentées par des lettres majuscules $(A, B, C, \cdots \text{etc.})$.
2. Une matrice A est représentée entre deux parenthèses ou deux crochets :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

ou encore $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ ou $A = (a_{ij})$.

3. On note a_{ij} l'élément ou le coéfficient de la matrice situé sur la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne (ces indices donnent l'adresse ou la position de chaque élément).
4. La dimension (la taille, l'ordre) de la matrice est notée par $\dim A$: $\dim A = n \times p$, n désigne le nombre de lignes et p le nombre de colonnes.
5. L'ensemble des matrices de dimension $n \times p$ à coéfficients dans $\mathbb{k}$ est noté $M_{n,p}(\mathbb{k})$.

Remarque 1.1.1 *On ne doit pas confondre* a_{ij} *qui est un élément avec* (a_{ij}) *qui est une matrice dont les éléments sont les* a_{ij}.

Exemple 1.1.1 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ \pi & -2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} i & 3+2i & 0 \\ 1 & 0 & e \\ -7 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.

On a $\dim A = 2 \times 3$ *et* $\dim B = 3 \times 3$. *On a par exemple :* $a_{12} = 0$, $a_{23} = 1 + \sqrt{5}$, $b_{11} = i$, $b_{12} = 1$, $b_{33} = 11$.

1.1.2 Matrices particulières

1. La matrice nulle de dimension $n \times p$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, on la note $0_{n,p}$. Par exemple :
$$0_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
2. La matrice A est une matrice ligne (vecteur-ligne) si $\dim A = 1 \times p$ $(n = 1)$: $A = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1p})$ .Par exemple : $A = \left(-7, 4, \sqrt{3}\right)$.
3. La matrice A est une matrice colonne (veteur-colonne) si $\dim A = n \times 1$ $(p = 1)$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$. Par exemple : $A = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix}$.

4. La marice A est dite matrice carée si $n = p$ (le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes). On note $M_{n,n}(\mathbb{k})$ par $M_n(\mathbb{k})$. Les éléments $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ forment la diagonale principale.

5. La matrice identité (ou unité) I_n est une matrice carrée d'ordre n où $a_{ij} = 1$ si $i = j$ et $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Par exemple : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. La matrice A est une matrice diagonale si A est carrée et si $a_{ij} = 0$ quand $i \neq j$. Par exemple : $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7. A est une matrice triangulaire supérieure si A est une matrice carée et $a_{ij} = 0$ si $i > j$. Par exemple : $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 11 \\ 0 & \sqrt{2} & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

8. A est une matrice triangulaire inférieure si A est une matrice carée et $a_{ij} = 0$ si $i < j$. Par exemple : $A = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & -1 \end{pmatrix}$.

1.1.3 Egalité de deux matrices

Deux matrices sont égales si elles ont même dimension et si les coefficients (ou les éléments) situés à la même place sont égaux :

$\dim A = \dim B = n \times p$ et $a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall\, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p.$

Exemple 1.1.2 *Soit* $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

On a $\dim A = 2 \times 3$ *et* $\dim B = 3 \times 2$. *Donc* $A \neq B$ *car* $\dim A \neq \dim B$.

Exemple 1.1.3 *Trouver les valeurs des réels x et y tels que $A = B$, où :*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ y^2 - 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2x - 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme les deux matrices ont la même dimension, on a $A = B$ si et seulement si :

$$\begin{cases} y^2 - 3 = 6 \\ 2x - 1 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm 3 \\ x = 4 \end{cases}.$$

1.1.4 Opérations sur les matrices

Dans cette section on va définir quelques opérations sur l'ensemble des matrices $M_{n,p}(\mathbb{k})$.

Addition des matrices

Définition 1.1.2 *Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de même dimension $n \times p$. Leur somme est la matrice $C = (c_{ij})$ de dimension $n \times p$ définie par :*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

(On additionne les éléments qui ont la même position). On note $C = A + B$.

Remarque 1.1.2 – *On ne peut pas additionner deux matrices de dimension différentes.*

– *De même on peut définir la soustraction de deux matrices : $C = A - B$ est la matrice de dimension $n \times p$ définie par $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.*

Produit d'une matrice par un scalaire

Définition 1.1.3 *Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{k})$ une matrice et $\alpha \in \mathbb{k}$ un scalaire. Le produit de la matrice A par le scalaire α donne une matrice notée $\alpha A \in M_{n,p}(\mathbb{k})$ et définie par : $\alpha A = \alpha\,(a_{ij}) = (\alpha a_{ij})$ (i.e. on multiplie chaque coefficent de A par α).*

Exemple 1.1.4 *Soit :* $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.
Evaluons $A+2B$, $B+C$. *Les matrices* A *et* B *ont la même dimension* $(\dim A = 2\times 2 = \dim B)$ *par la suite* A *et* $2B$ *ont aussi la même dimension donc* $A+2B$ *est bien définie :*

$$A+2B=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 2-6 & 5+0 \\ -1+4 & 0+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\dim B = 2\times 2 \neq \dim C = 2\times 3$, $B+C$ *n'est pas définie (elle ne peut pas être calculée).*

Proposition 1.1.1 *Soit* $A,B,C\in M_{n,p}(\mathbb{k})$ *et* $\alpha,\beta\in\mathbb{k}$. *On a les propriétés suivantes :*

1. *Commutativité :* $A+B=B+A$.
2. *Associativité :* $(A+B)+C=A+(B+C)$.
3. *Elément neutre pour la somme :* $A+0_{n,p}=0_{n,p}+A=A$.
4. *Elément symétrique :* $A-A=A+(-A)=(-A)+A=0_{n,p}$.
5. *Associativité du produit par un scalaire :* $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$.
6. *Distributivité sur l'addition des scalaires :* $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.
7. *Elément neutre pour le produit par un scalaire :* $1A=A$.

Remarque 1.1.3 *On peut montrer que l'ensemble* $M_{n,p}(\mathbb{k})$ *muni des deux opérations précédentes est un* $\mathbb{k}$*-espace vectoriel.*

Produit (multiplication) matriciel

Soit $A=(a_{ij})\in M_{n,p}(\mathbb{k})$ et $B=(b_{ij})\in M_{p,q}(\mathbb{k})$ deux matrices. Le produit matriciel de ces deux matrices $C=AB$ est une matrice de $M_{n,q}(\mathbb{k})$ dont les coéfficients c_{ij} sont définis par :

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}.$$

Autrement dit l'élément c_{ij} est le résultat du produit scalaire de la ligne i de la matrice A avec la colonne j de la matrice B.

Exemple 1.1.5 *Soit :* $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.

Effectuons le produit matrciel AB *et* AC *si c'est possible.*

On a : $\dim A = 2 \times 3$ *et* $\dim B = 3 \times 2$. *Alors le nombre de colonnes de* A *est égal au nombre de lignes de* B *donc le produit* AB *est bien défini avec* $\dim AB = 2 \times 2$ *et on a :*

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \times (-3) + 5 \times 2 + 4 \times 0 & 2 \times 0 + 5 \times 1 + 0 \times (-7) \\ -1 \times (-3) + 0 \times 2 + 3 \times 4 & (-1) \times 0 + 0 \times 1 + 3 \times (-7) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 15 & -21 \end{pmatrix}.$$

Comme le nombre de colonnes de A *n'est pas égal au nombre de lignes de* C, *car* $\dim A = 2 \times 3$ *et* $\dim C = 2 \times 2$, *alors le produit* AC *n'est pas défini.*

Le produit matriciel a des propriétés différentes de celles du produit de deux réels :

- Le produit AB n'est pas toujours défini : il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.
- En géneral $AB \neq BA$: le produit n'est pas commutatif, même dans le cas de deux matrices carrées. Prenons : $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

  On a $AB = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}$.
- $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ ou $B = 0$, *i.e.* il existe A et B non nulles telles que $AB = 0$. On a par exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

– $AB = AC \not\Rightarrow B = C$. Comme exemple on a : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}$.

Proposition 1.1.2 *Soient A, B et C des matrices de dimension $n \times p$, $p \times q$ et $q \times m$ respectivement et α et β deux scalaires. On a les propriétés suivantes :*

1. *Associativité du produit matriciel* $A(BC) = (AB)C$.
2. *Distributivité à gauche sur l'addition matricielle :* $A(B + C) = AB + AC$.
3. *Distributivité à droite sur l'addition matricielle :* $(A + B)C = AC + BC$.
4. *Associativité pour la multiplcation par un scalaire :* $(\alpha A)(\beta B) = \alpha\beta(AB)$.
5. $I_n A = AI_p = A$, $A0_{p,r} = 0_{n,r}$ *et* $0_{r,n}A = 0_{r,p}$.

Définition 1.1.4 *Soit $A \in M_n(\mathbb{k})$ une matrice carrée. On définit les puissances succecives de A par :* $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^{k+1} = A^k A$, $k \in \mathbb{N}$. *C'est-à-dire :*

$$A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ fois}}.$$

Proposition 1.1.3 *Soit $A, B \in M_n(\mathbb{k})$. On a*

1) $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$,

2) $(A + I_n)^2 = A^2 + 2A + I_n$.

Exemple 1.1.6 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- *Calculer* A^2, A^3, A^4.

- *Déduire* $A^p, p \geq 4$.

On trouve $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$,

$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$

- *D'après les calculs précédents on peut déduire que*

$A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}$. *Cette formule peut être démontrée par le principe de récurrence.*

Transposition de matrices

Définition 1.1.5 *Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{k})$. La matrice transposée de A, notée A^t est obtenue en permutant les lignes et les colonnes de A :*

$A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{k}) \Rightarrow A^t = (a_{ji}) \in M_{p,n}(\mathbb{k})$.

Exemple 1.1.7 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. *Alors sa transposée* $A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. *De plus* $\dim A = 2 \times 3 \Rightarrow \dim A^t = 3 \times 2$.

Proposition 1.1.4 *Soit A et B deux matrices et $\alpha \in \mathbb{k}$ un scalaire. On a :*

1. $(A^t)^t = A$,
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$,
3. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$,
4. $(AB)^t = B^t A^t$.

Définition 1.1.6 *Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{k})$, une matrice carrée.*

1) A est dite "symétrique" si et seulement si $A^t = A$.

2) A est dite "antisymétrique" si et seulement si $A^t = -A$.

Exemple 1.1.8 *1) Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. *On a* $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} = A$, *donc la matrice* A *est symétrique.*

2) Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -5 & 3 & -6 \\ -7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$. *On a* $B^t = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 \\ 5 & 3 & 6 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix} = -B$, *donc la matrice* B *est antisymétrique.*

Définition 1.1.7 *La trace de la matrice carrée* $A \in M_n(\mathbb{k})$, *notée* trA, *est le nombre obtenu en additionnant les éléments diagonaux de* A. *Autrement dit :* $trA = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.

Exemple 1.1.9 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -7 \\ 2 & 6 & 3 \\ 8 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. *Alors :* $trA = a_{11}+a_{22}+a_{33} = 2+6+5 = 13$.

Proposition 1.1.5 *Soit* $A, B \in M_n(\mathbb{k})$, *alors :*

1. $tr(A + B) = trA + trB$,
2. $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$,
3. $tr(A^t) = tr(A)$,
4. $tr(AB) = tr\,(BA)$.

1.2 Déterminants

Le déterminant est un nombre que l'on associe à une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{k})$. Le déterminant est un outil très important dans le calcul matriciel et la résolution de systèmes linéaires. Avant de donner son expression dans le cas générale on commence par donner sa formule pour des matrices de petites tailles.

Cas d'une matrice d'ordre 1

Dans ce cas $A = a_{11}$ et le déterminant est défini par : $\det A = a_{11}$.

Cas d'une matrice d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Le déterminant de A est le nombre :

$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Cas d'une matrice d'ordre 3

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Dans ce cas le déterminant est défini par :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

On définit le déterminant dans le cas général d'une manière récursive.

Définition 1.2.1 *Soit $A \in M_n(\mathbb{k})$ une matrice carrée. On note A_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, la matrice obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A. En développant suivant une ligne i quelconque, le déterminant est le nombre :*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij} \det A_{ij}, \qquad 1 \leq i \leq n,$$

ou d'une manière équivalente en développant suivant une colonne j quelconque :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij} \det A_{ij}, \qquad 1 \leq j \leq n.$$

Le nombre $\det A_{ij}$ est appelé le mineur d'ordre $n-1$ de la matrice A et $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ est appelé le cofacteur de A relatif au coéfficient a_{ij}. Le terme $(-1)^{i+j}$ donne une distribution des signes $+$ et $-$ analogue à la distribution des cases noirs et blans sur un damier :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}.$$

Exemple 1.2.1 *Soit* $B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. *Alors* $\det(B) = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 5 \times 7 - 3 \times 9 = 8.$

Exemple 1.2.2 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

En développant suivant la prmière ligne on obtient :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 3(-6+3) + (-3-12) + 0 = -24.$$

Développant maintenant suivant la troixième colonne :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -24.$$

Règle de Sarrus

Cette règle s'applique uniquement pour les matrices d'ordre 3 :

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ alors on a :

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - [a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}].$$

Exemple 1.2.3 *Calculons le déterminant suivant par la règle de Sarrus :* $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

On a :

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = [2 \times (-1) \times 1 + 1 \times 3 \times 3 + 0 \times 1 \times 2] - [0 \times (-1) \times 3 + 2 \times 3 \times 2 + 1 \times 1 \times 1]$
$= -6.$

Proposition 1.2.1 *Le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire supérieure (ou inférieure) A est égal au produit des termes diagonaux :*

$$\det(A) = a_{11} \times a_{22} \times \cdots \times a_{nn}.$$

Exemple 1.2.4 *On a :* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times (-8) \times 4 = -32.$

C'est facile à voir que $\det(I_n) = 1$ et $\det(0_n) = 0$.

Théorème 1.2.1 *Soit A, $B \in M_n(\Bbbk)$ deux matrices et $\lambda \in \Bbbk$ un scalaire. Alors :*

1. $\det(AB) = \det(A) det(B)$.
2. $\det(A^t) = \det(A)$.
3. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
4. $\det A = 0$ *si A contient une colonne (resp. ligne) nulle.*
5. $\det A = 0$ *si A contient deux colonnes (resp. lignes) égales.*
6. $\det A = 0$ *si une des colonnes (resp. lignes) de A est une combinaison linéaire d'autres colonnes (resp. lignes).*
7. *Le déterminant de A ne change pas de valeur si on ajoute à une colonne (resp. ligne) une combinaison linéaire d'autres colonnes (resp. lignes).*

8. *Un déterminant change de signe si l'on éffectue un nombre impair de permutations (si par exemple, on permute deux lignes uniquement ou deux colonnes uniquement).*

Exemple 1.2.5 *1) Le déterminant* $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}$ *est nul car la deuxième colonne C_2 est une combinisant linéaire des autres colonnes : $C_2 = C_1 + 2C_3$.*

2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 5 \times 2 \times (-1) = -10.$

On a multiplié par -1 car on a permuté entre la première colonne et la troixième colonne.

1.3 Matrices Inverses

Définition 1.3.1 *Soit $A \in M_n(\mathbb{k})$ une matrice carrée. On dit que A est inversible s'il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{k})$ telle que :*

$$AB = I_n \qquad et \qquad BA = I_n.$$

On appelle B l'inverse de A et on la note A^{-1}.

C'est facile à vérifier que la matrice I_n est inversible avec $I_n^{-1} = I_n$ et que la matrice nulle 0_n n'est pas inversible.

Exemple 1.3.1 *Déterminer si la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ est inversible. On va étudier l'existence d'une matrice $B \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_2$ et $BA = I_2$. On a :*

$AB = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2c=1 \\ b+2d=0 \\ 5c=0 \\ 5d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-\frac{2}{5} \\ c=0 \\ d=\frac{1}{5} \end{cases}.$$

Donc $B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$. *De plus on a bien* $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *c'est-à-dire* $BA = I_2$. *Donc* A *est inversible et son inverse est* $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

Théorème 1.3.1 *La matrice* $A \in M_n(\Bbbk)$ *est inversible si et seulement si* $\det A \neq 0$.

Exemple 1.3.2 *Soit* $A = \begin{pmatrix} \alpha & 3 \\ 9 & \alpha^2 \end{pmatrix}$. *On a* $\det(A) = \alpha^3 - 27$. *La matrice* A *est inversible si* $\det(A) = \alpha^3 - 27 \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 3$.

Proposition 1.3.1 *Soit* $A, B, C \in M_n(\Bbbk)$. *On a les propriétés suivantes :*

1. *Si* A *est inversible, alors son inverse est unique et* $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
2. *Si* A *est inversible, alors* A^{-1} *est aussi inversible et on a* $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. *Si* A *est inversible, alors* A^t *est aussi inversible et on a* $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
4. *Si* A *et* B *sont inversibles, alors* AB *est aussi inversible et on a* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
5. *Si* C *est inversible, alors* $AC = BC \Longrightarrow A = B$.

Soit $A \in M_n(\Bbbk)$ une matrice inversible et $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1 \in \mathbb{R}$. Si

$$a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A = I_n$$

alors :

$$A\left(a_nA^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\cdots+a_1I_n\right)=I_n \Longrightarrow A^{-1}=\left(a_nA^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\cdots+a_1I_n\right).$$

Exemple 1.3.3 *Soit* $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. *Calculer* $2A-A^2$ *et déduire* A^{-1}.

On a $A^2=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -4 & 0\\ 4 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,

donc $2A-A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Par la suite $2A-A^2=I_3 \Rightarrow A(2I_3-A)=I_3 \Rightarrow A^{-1}=(2I_3-A)$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

1.3.1 Calcul de la matrice inverse par la méthode de cofacteurs

On présente ici une méthode pratique pour calculer la matrice inverse.

Définition 1.3.2 *Soit* $A\in M_n(\mathbb{k})$. *On appelle matrice des cofacteurs* $C=com(A)$ *(ou la comatrice) la matrice de coéfficients* $c_{ij}=(-1)^{i+j}\det A_{ij}$ *où* A_{ij} *est la matrice obtenue en supprimant la* $i^{\text{èmé}}$ *ligne et la* $j^{\text{ème}}$ *colonne de* A.

Théorème 1.3.2 *Si* A *est inversible alors* $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\left(com(A)\right)^t$.

Exemple 1.3.4 *Appliquons ce théorème pour une matrice d'ordre 2. Soit* $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.
Supposons que $\det(A)=ad-bc\neq 0$, *donc* A^{-1}*existe.*

On a $com(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +d & -c \\ -b & +a \end{pmatrix}$, $(com(A))^t = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. *Finalement* $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (com(A))^t = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exemple 1.3.5 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *On a* $\det(A) = -2 \neq 0$, *alors* A *est inversible.*

Evaluons la comatrice de A :

$com(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ *avec* $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

$c_{11} = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \qquad c_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad c_{13} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$c_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad c_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad c_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$c_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \qquad c_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \qquad c_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

donc $com(A) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow com(A)^t = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Alors : $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (com(A))^t = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Chapitre 2

Systèmes d'Équations Linéaires

2.1 Définitions et notations

Définition 2.1.1 *Soit $n, p \geq 1$ deux entiers. On appelle système d'équations linéaires à n équations et p inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p$ le système :*

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{array}\right. . \qquad (S)$$

Les coefficients a_{ij} et les seconds membres b_i sont des éléments donnés de $\mathbb{k}$. Les inconnues $x_1, x_2, ..., x_p$ sont à chercher dans $\mathbb{k}$.

Définition 2.1.2

1. *On appelle solution du système (S) tout vecteur $X = (x_j)_{1 \leq j \leq p}$, $x_j \in \mathbb{k}$ vérifiant les équations du système simultanément.*
2. *Résoudre (S) signifie déterminer toutes les solutions possibles.*
3. *Deux systèmes sont dit équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.*

Exemple 2.1.1 *Le vecteur* $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *est solution du système :*

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases},$$

car le vecteur X vérifie les deux équations du système simultanément :

$$\begin{cases} 2 \times 2 - 3 = 1 \\ 5 \times 2 - 2 \times 3 = 4 \end{cases}.$$

Proposition 2.1.1 *Un système d'équations linéaires n'a soit aucune solution, soit une seule solution, soit une infinité de solutions.*

Un système linéaire qui n'a aucune solution est dit incompatible ou impossible.

2.1.1 Forme matricielle (écriture matricielle)

Le système (S) peut être écrit sous la forme matricielle suivante : $AX = B$ où :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}.$$

$X = (x_j)_{1 \leq j \leq p}$: le vecteur des inconnues,

$B = (b_j)_{1 \leq j \leq p}$: le vecteur du second membre,

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$: la matrice des coéfficients de (S).

Exemple 2.1.2 *La forme matricielle du système d'équations linéaires suivant :*

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 5 \\ 5x - y + 2z = -7 \\ x + 2y + 6x = 11 \end{cases}$$

est : $AX = B$ *où :* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 11 \end{pmatrix}$.

2.2 Méthodes de résolution

On s'intéresse à la résolution du système (S) dans le cas $n = p$. Dans ce cas le système (S) peut prendre la forme matricielle : $AX = B$, $A \in M_n(\mathbb{k})$ une matrice carrée. On distingue deux cas :

I) si $\det(A) = 0$ le système (S) n'a pas de solution ou le système possède une infinité de solutions,

II) si $\det(A) \neq 0$ le système (S) admet une solution unique. On va présenter dans la suite deux méthodes différentes pour calculer cette solution.

2.2.1 Méthode de l'inverse

Cette méthode fait appel à linverse de la matrice des coéfficients. Comme $\det(A) \neq 0$ implique que la matrice A est inversible (A^{-1} existe) alors on peut calculer la solution comme suit :

$$\begin{aligned} AX = B \quad & \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \\ & \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \\ & \Leftrightarrow I_n X = A^{-1}B \\ & \Leftrightarrow X = A^{-1}B. \end{aligned}$$

Exemple 2.2.1 *Considérons le système :* $\begin{cases} x+3y+4z=50 \\ 3x+5y-4z=2 \\ 4x+7y-2z=31. \end{cases}$.

La forme matricielle du système est :

$$AX = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & -2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 50 \\ 2 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

On a $\det A = -8 \neq 0$ *donc le système possède une solution unique* $X = A^{-1}B$. *Calculons la matrice inverse* A^{-1} :

$$com(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -10 & 1 \\ 34 & -18 & 5 \\ -32 & 16 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\left(com(A)\right)^t = \frac{1}{-8}\begin{pmatrix} 18 & 34 & 1 \\ -10 & -18 & 16 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Alors $X = A^{-1}B = \frac{1}{-8}\begin{pmatrix} 18 & 34 & 1 \\ -10 & -18 & 16 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 50 \\ 2 \\ 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$

2.2.2 Méthode de Cramer

Si $\det(A) \neq 0$ le système (S) qui est équivalent à : $AX = B$, $A \in M_n(\mathbb{k})$ possède une solution unique donnée par :

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}, \quad \text{pour } 1 \le i \le n.$$

La matrice A_i est obtenue en remplacant la $i^{\text{ème}}$ colonne de A par la colonne du second membre B.

Exemple 2.2.2 *Considérons le système :* $\begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16. \end{cases} \quad (S_1)$

La forme matricielle de (S_1) *est :*

$$AX = B \text{ où } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(A) = 26 \neq 0$ *donc* (S_1) *admet une solution unique que l'on peut obtenir par la méthode de Cramer :*

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 16 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{26} = 1,$$

$$y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 16 & -1 \end{vmatrix}}{26} = -3,$$

$$z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 16 \end{vmatrix}}{26} = -2.$$

La solution est donc $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Exemple 2.2.3 *Résoudre* $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases}$.

La matrice des coéfficients est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. *On a* $\det(A) = 0$ *donc ce système soit possède une infinité de solutions ou n'admet aucune solution. De la première ligne du système on a :*

$$y = 2x - 3.$$

Remplaçant la valeur de y *dans la deuxième ligne nous obtenons :*

$$4x - 2(2x - 3) = 5 \Leftrightarrow 6 = 5,$$

ce qui est impossile. Donc le système n'a pas de solution.

Exemple 2.2.4 *Soit :* $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 3x - 9y = 3 \end{cases}$.

La matrice des coéfficients est $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$. *On a* $\det(A) = 0$. *De la première ligne du système on a :*

$$x = 3y + 1.$$

Remplaçant la valeur de x *dans la deuxième ligne nous obtenons :*

$$3(3y + 1) - 9y = 3 \Leftrightarrow 3 = 3,$$

ce qui est toujours vrai $\forall y \in \mathbb{R}$. *Par la suite ce système possède une infinité de solutions* *données par :*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3y+1 \\ y \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Chapitre 3

Primitives et Intégrales

3.1 Primitives et intégrales indéfinies

Dans toute la suite I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

Définition 3.1.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On appelle primitive de f toute fonction dérivable telle que : $F'(x) = f(x), \ \forall x \in I$.*

Exemple 3.1.1 *La fonction $F(x) = x^5$ est une primitive de la fontion $f(x) = 5x^4$ car $F'(x) = f(x)$.*

Définition 3.1.2 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue alors f admet une primitive F sur I. De plus toutes les primitives de f sont de la forme $F(x) + C$ où C est une constante dans $\mathbb{R}$.*

Trouver une primitive est l'opération inverse de la dérivation.

Définition 3.1.3 *L'intégrale indéfinie, notée $\displaystyle\int f(x)dx$, est la fonction définie par :*

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

où F est une primitive de f c'est-à-dire : $F'(x) = f(x)$.

Exemple 3.1.2 *On a :* $\displaystyle\int 5x^4 dx = x^5 + C$ *et* $\int e^x dx = e^x + C.$

Tables des intégrales indéfinies (primitives) des fonctions usuelles

$\displaystyle\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$	$\displaystyle\int af(x)dx = a\int f(x)dx$
$\displaystyle\int x^r dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C,\ r \in \mathbb{R},\ r \neq -1.$	$\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$	$\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ \ a > 0.$
$\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C$
$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$	$\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$
$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$	$\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos x + C$
$\int \sinh x dx = \cosh x + C$	$\int \cosh x dx = \sinh x + C$

Exemple 3.1.3 *Calculer :* $\displaystyle\int \left(\sqrt[5]{x} + 7\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}\right) dx.$

On a :

$$\begin{aligned}\int \left(\sqrt[5]{x} + 7\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}\right) dx &= \int \sqrt[5]{x}dx + \int 7\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}dx = \int x^{\frac{1}{5}}dx + 7\int \frac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}}dx \\ &= \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}} + C_1 + 7\int x^{\frac{5}{3}}dx = \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}} + C_1 + \frac{21}{8}x^{\frac{8}{3}} + C_2 \\ &= \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}} + \frac{21}{8}x^{\frac{8}{3}} + C.\end{aligned}$$

3.2 Intégrales définies

Définition 3.2.1 *Soit f une fonction définie et continue sur l'intevalle $[a,b]$, alors l'intégrale définie de f de a à b est le réel $\int_a^b f(x)dx$ défini par :*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f c'est-à-dire : $F'(x) = f(x)$.

Remarque 3.2.1 *Il faut distinguer entre intégrale définie et intégrale indéfinie. Une intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$ est un nombre alors qu'une intégrale indéfine $\int f(x)dx$ est une fonction.*

Exemple 3.2.1 *Evaluons :* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$. *La fonction* $f(x) = \cos x$ *est continue sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *et on sait que sa primitive est* $F(x) = \sin x$. *Donc :*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \tfrac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Propriétés de l'intégrale définie

- $\int_a^b c dx = c(b-a)$.
- $\int_a^a f(x)dx = 0$ et $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
- $\int_a^b \left[f(x) + g(x)\right] dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
- $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.
- $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.
- Si $f(x) \geq 0$, sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Si $f(x) \geq g(x)$, sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.
- Si $m \leq f(x) \leq M$, sur $[a,b]$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Proposition 3.2.1 *On suppose que* f *est continue sur* $[-a,a]$.

- *Lorsque* f *est paire* $(f(-x) = f(x))$, *alors* $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.
- *Lorsque* f *est impaire* $(f(-x) = -f(x))$, *alors* $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.
- *Si* f *est une fonction périodique de période* T *alors :*

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Exemple 3.2.2 *Claculer* $\int_{-10\pi}^{10\pi} x^4 \sin^3 x dx$ *et* $\int_{-3}^{3} |5x|\, dx$.

Pour la première intégrale, on remarque que la fonction $x^4 \sin^3 x$ *est impaire, donc on déduit que :*

$$\int_{-10\pi}^{10\pi} x^4 \sin^3 x dx = 0.$$

Concernant la deuxième intégrale, on constate que la fonction $|5x|$ *est paire, donc :*

$$\int_{-3}^{3} |5x|\, dx = 2\int_{0}^{3} |5x|\, dx = 10\int_{0}^{3} xdx = 5x^2\Big]_0^3 = 45.$$

3.3 Règles d'intégration

3.3.1 Intégration par changement de variables

Proposition 3.3.1 *Si* $u = g(x)$ *est une fonction dérivable où son ensemble image est l'intervalle* I *et si* f *est une fonction continue sur* I*, alors :*

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du.$$

Le but de cette méthode est de remplacer une intégrale peu difficile par une autre plus facile. La difficulté majeure de cette méthode est de trouver le bon changement de variable. Il faut essayer de choisir u égal à une certaine fonction qui apparait sous le symbole d'intégration et dont la dérivée s'y trouve aussi.

Exemple 3.3.1 *Pour calculer* $\int 2x\sqrt{1+x^2}dx$*, on pose* $u = 1 + x^2$ *et* $du = 2xdx$*. On obtient :*

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}dx = \int \sqrt{u}du = \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Exemple 3.3.2 *Calcul de* $I = \int \cos^4 x \sin^3 xdx$*. Soit le changement de variable :*
$u = \cos x,\ \ du = \sin xdx$*. On obtient :*

$$\begin{aligned} I &= \int \cos^4 x \sin^2 x \sin xdx = \int \cos^4 x \left(1 - \cos^2 x\right) \sin xdx = \int u^4 \left(1 - u^2\right) du \\ &= \int \left(u^4 - u^6\right) du = \tfrac{1}{5}u^5 - \tfrac{1}{7}u^7 + C = \tfrac{1}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C. \end{aligned}$$

Proposition 3.3.2 *Si la fonction g et sa derivée g' sont continues sur $[a,b]$ et si la fonction f est continue sur l'esemble $g([a,b])$, alors on a l'égalité :*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

Exemple 3.3.3 *Evaluons :*

$$J = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx.$$

Posons :

$$u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx.$$

Par la suite, si $x = 1$ on a : $u = \ln 1 = 0$ et quand $x = e$ on a $u = \ln e = 1$.

Donc : $J = \int\limits_0^1 u du = \left.\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.

En utilisant la méthode de changement de variables et la table des primitives des fonctions usuelles on obtient les formules suivantes :

$\int f'(x)f(x)^r dx = \frac{1}{r+1} f(x)^{r+1} + C,\ r \in \mathbb{R},\ r \neq -1$ $\quad$ $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$

$\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C$ $\quad$ $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C$

$\int f'(x)\sin(f(x))dx = -\cos(f(x)) + C$ $\quad$ $\int f'(x)\cos(f(x))dx = \sin(f(x)) + C$

$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} dx = \arctan(f(x)) + C$ $\quad$ $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = \arcsin(f(x)) + C$

3.3.2 Intégration par parties

Proposition 3.3.3 *Soient u et v deux fonctions dérivables sur I telles que u' et v' soient continues sur I. Alors :*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Symboliquement, on écrit : $\quad \int udv = uv - \int vdu.$

Remarque 3.3.1 *1. L'intégration par parties n'est efficace que si l'on obtient une intégrale plus simple que l'intégrale initiale.*

2. Le choix des fonctions doit être judicieux et ce n'est que par la pratique qu'on pourra plus facilement faire ce choix.

Exemple 3.3.4 *Pour calculer* $\int \arcsin x dx$, *on utilise une itégration par parties où on pose :* $u = \arcsin x$, $dv = dx$ *donc* $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $v = x$.
Alors on a :

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\begin{aligned}\int \arcsin x dx &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x \arcsin x + \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$

Des fois on aura besoin de faire appel à l'intégration par parties plusieurs fois.

Exemple 3.3.5 *Evaluons :* $\int x^2 \sin x dx$.

On pose : $u = x^2$, $dv = \sin x dx$ donc $du = 2xdx$, $v = -\cos x$. Alors on a :

$$\begin{aligned}&\int udv = uv - \int vdu \\ &\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx.\end{aligned}$$

Pour calculer la deuxième intégrale on entame une deuxième intégration par parties, avec cette fois $u = 2x$, $dv = \cos x dx$ donc $du = 2dx$, $v = \sin x$. On aura :

$$\int 2x \cos x dx = 2x \sin x - \int 2 \sin x dx = 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

En remplaçant ce résultat dans l'intégrale initiale on trouve :

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

Exemple 3.3.6 *Calculer* $I = \int e^x \sin x dx$. *Posons :* $u = e^x$, $dv = \sin x dx$ *donc* $du = e^x dx$, $v = -\cos x$. *L'intégration par parties nous donne :*

$$I = -\cos x e^x + \int e^x \cos x dx. \tag{3.1}$$

Une deuxième intégration par parties, avec le choix :

$u = e^x$, $dv = \cos x dx$ donc $du = e^x dx$, $v = \sin x$, nous donne :

$$\int e^x \cos x dx = \sin x e^x - \int e^x \sin x dx. \tag{3.2}$$

Remplaçant (3.2) dans (3.1), on obtient :

$$I = -\cos x e^x + \sin x e^x - I$$
$$2I = -\cos x e^x + \sin x e^x \Rightarrow I = \tfrac{1}{2}\left(-\cos x e^x + \sin x e^x\right).$$

La formule d'intégration par parties pour les intégrales définies est donnée par :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

ou symboliquement, par : $\int_a^b udv = uv]_a^b - \int_a^b vdu.$

3.4 Intégration des fonctions rationnelles par décomposition en éléments simples

Définition 3.4.1 *Une fonction rationnelle* f *est un rapport de deux polynômes* P *et* Q *de degré respectivement* m *et* k : $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

i) Si $\deg(P) = m \geq \deg(Q) = k$ *on dit que* f *est une fonction rationnelle impropre.*

ii) Si $\deg(P) = m < \deg(Q) = k$ *on dit que* f *est une fonction rationnelle propre.*

Pour intégrer une fonction rationnnelle on commence par l'exprimer comme une somme de fractions simples appelés éléments simples, dont l'intégration est immédiate.

Première étape : Dans le cas où f est impropre (i.e. $\deg(P) \geq \deg(Q)$) on effectue la division euclidienne de P par Q jusqu'a obtenir un reste $R(x)$ avec $\deg(R) < \deg(Q)$:

$$f(x) = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \tag{3.3}$$

où S et R sont aussi des p ,00000000lynômes. Dans le cas où f est propre ($i.e.$ $\deg(P) < \deg(Q)$) on passe directement à la deuxième étape avec $P(x) = R(x)$.

Deuxième étape : On factorise le dénominateur $Q(x)$ en un produit de facteurs de la forme $ax + b$ et des facteurs de la forme $x^2 + bx + c$ avec $b^2 - 4c < 0$.

Troisième étape : Exprimer la fonction rationnelle propre $\frac{R(x)}{Q(x)}$ de l'équation (3.3) comme une somme d'éléments simples de la forme :

$$\frac{A}{(ax+b)^i} \text{ ou } \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^j}.$$

Exemple 3.4.1 *Considérons la fonction rationnelle :*

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

I) En effectuant la division euclidienne on trouve :

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

II) On factorise le doniminateur : $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1) = (x-1)^2(x+1)$.

III) Comme le facteur $(x - 1)$ est présent deux fois, la décomposition en élément simple est de la forme :

$$\frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}.$$

Multiplions par le plus petit dominateur commun $(x - 1)^2(x + 1)$, on trouve :

$$4x = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2. \tag{3.4}$$

Posons $x = 1$ dans (3.4) on on obtient : $B = 2$. Posons $x = -1$: $C = -1$ et finalement si on pose $x = 0$ on déduit que $A = 1$. Alors :

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{-1}{x+1}. \tag{3.5}$$

À l'aide de la décomposition en éléments simples, l'intégrale d'une fonction rationnelle se ramène à une combinaison linéaire d'intégrales de la forme $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx$ ou $\int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n} dx$, $n \geq 2$, $b^2 - 4c < 0$. On distingue quatre types de ces intégrales :

Type I :

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + C.$$

Type II :

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \int (x-a)^{-n} dx = \frac{-1}{(n-1)\,(x-a)^{n-1}} + C, \quad n \neq 1.$$

Type III :

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c} dx, \; b^2 - 4c < 0.$$

On remarque que $x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + (c - \frac{b^2}{4})$. Si on pose :

$y = x + \frac{b}{2}$ et $p^2 = c - \frac{b^2}{4} > 0$ on trouve :

$$\begin{aligned}
\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c} dx = \int \frac{A(y-\frac{b}{2})+B}{y^2+p^2} dy &= A \int \frac{y}{y^2+p^2} dy + (B - A\tfrac{b}{2}) \int \frac{1}{y^2+p^2} dy \\
&= \frac{A}{2} \ln(y^2 + p^2) + \frac{2B-Ab}{2p} \arctan(\tfrac{y}{p}) + C \\
&= \frac{A}{2} \ln(x^2 + bx + p^2) + \frac{2B-Ab}{2p} \arctan(\tfrac{2x+b}{2p}) + C.
\end{aligned}$$

Type IV :

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n} dx, \quad b^2 - 4c < 0, \quad n \neq 1.$$

On pose : $y = x + \frac{b}{2}$,on obtient :

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n}dx = A\int \frac{y}{(y^2+p^2)^n}dy + \frac{2B-Ab}{2}\int \frac{1}{(y^2+p^2)^n}dy.$$

La première intégrale est facile à calculer :

$$\int \frac{y}{(y^2+p^2)^n}dy = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(y^2+p^2\right)}{(y^2+p^2)^n} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(n-1)(y^2+p^2)^n-1}\right) + C_1.$$

Le calcul de la seconde intégrale nécessite plus de travail. Soit :
$I_n = \int \frac{dy}{(y^2+p^2)^n}$. Intégrons par parties, en posant
$u = \frac{1}{(y^2+p^2)^n},\;\; dv = dy \Longrightarrow du = \frac{-2ny}{(y^2+p^2)^{n+1}},\;\; v = y$:
$I_n = \frac{y}{(y^2+p^2)^n} + 2n\int \frac{y^2dy}{(y^2+p^2)^{n+1}} = \frac{y}{(y^2+p^2)^n}2n\int \frac{(y^2+p^2-p^2)dy}{(y^2+p^2)^{n+1}}$
$I_n = \frac{y}{(y^2+p^2)^n} + 2n\int \frac{dy}{(y^2+p^2)^n} - 2np^2\int \frac{dy}{(y^2+p^2)^{n+1}}$
$I_n = \frac{y}{(y^2+p^2)^n} + 2nI_n - p^2 I_{n+1}$
Donc : $I_{n+1} = \frac{1}{2np^2}\left(\frac{y}{(y^2+p^2)^n} + (2n-1)I_n\right).$
Ce qui est équivalent à :

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)p^2}\left(\frac{y}{(y^2+p^2)^{n-1}} + (2n-3)I_n - 1\right).$$

Ceci, nous permet de le calculer d'une manière récurrente, sachant que :

$$I_1 = \frac{1}{p}\arctan\frac{y}{p} + C.$$

Exemple 3.4.2 *Calculer :*

$$\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}dx.$$

D'après l'exemple 3.4.1, la décomposition en élements simples de $\frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}$ *est :*

$$\frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1} = x+1+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{-1}{x+1}.$$

Donc :

$$\int \tfrac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}dx = \int (x+1)dx + \int \tfrac{dx}{x-1} + \int \tfrac{2dx}{(x-1)^2} + \int \tfrac{-dx}{x+1}$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1| - 2\tfrac{1}{x-1} - \ln|x+1| + C.$$

Exemple 3.4.3 *Calculer :*

$$J = \int \frac{x+5}{x^2-4x+13}dx.$$

La fonction rationnelle ici est propre, on n'aura pas besoin d'effectuer la division euclidienne. De plus, on remarque que le polynôme $x^2-4x+13$ *est irréductible car* $\triangle = -36 < 0$. *Donc on a une intégrale de type III. On a :*

$$J = \int \frac{x+5}{x^2-4x+13}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+7}{x^2-4x+13}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+13}dx + 7\int \frac{dx}{x^2-4x+13}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+13\right| + 7\int \frac{dx}{(x-2)^2+9}.$$

Pour évaluer la deuxième intégrale on pose : $x-2=3y,\ \ dx=3dy$ *on obtient :*

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2+9} = \frac{1}{3}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{3}\arctan y + C = \frac{1}{3}\arctan(\frac{x-2}{3}) + C.$$

Donc :

$$J = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+13\right| + \frac{7}{3}\arctan(\frac{x-2}{3}) + C.$$

Chapitre 4

Fonctions à Plusieurs Variables

4.1 Notions de base

On commence par donner la notion d'une norme.

Définition 4.1.1 *Soit E un espace véctoriel réel ou complexe. Une norme sur E est une application $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :*

i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$,

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{k}, \forall x \in E : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *(homogénéité),*

iii) $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*

Exemple 4.1.1 *Soit $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. L'espace $\mathbb{R}^n$ peut être muni de l'une des normes suivantes :*

1. $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$.
2. $\|x\|_2 = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_n)^2}$.
3. $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|)$.

Définition 4.1.2 *Une fonction réelle de plusieurs variables est une application :*

$$\begin{aligned} f: \quad & D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ & x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto f(x). \end{aligned}$$

Exemple 4.1.2 *Les fonctions f et g définies respectivement par :*

$$\begin{aligned} f \quad & : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \quad & f(x,y) = 4x - 7y + 1, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g \quad & : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto \quad & g(x,y,z) = \tfrac{\sin(xyz)}{x^2+y^2+(z-1)^2}, \end{aligned}$$

sont des fonctions de plusieurs variables.

Définition 4.1.3 *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de plusieurs variables. Alors :*

- *D est appelé le domaine de définition de la fonction f (l'ensemble de x pour lesquels cette fonction est définie).*
- *L'ensemble $f(D) = \{f(x),\, x \in D\}$ est appelé l'image de D par f.*
- *Si $F \subset \mathbb{R}$, on appelle l'image réciproque de F par f, l'ensemble noté $f^{-1}(F)$ où*

  $f^{-1}(F) = \{x \in D,\ f(x) \in F\}.$

Exemple 4.1.3

1. *Le domaine de définition de la fonction f définie par :*

   $f(x,y) = 4x - 7y + 1$ *est* $D_f = \mathbb{R}^2$.

2. *Soit g la fonction définie par $g(x,y) = \ln(2x - y)$. Alors le domaine de définition de g est :*

   $D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2x - y > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2x > y\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y < 2x\}.$

   D_g est le demi plan situé au dessous de la droite $y = 2x$.

3. *Considérons la fonction h donnée par $h(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Son domaine de définition est donné par :*

   $D_h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 9 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 9\}.$

   Comme $x^2 + y^2 = 9$ est l'équation du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $r = 3$. Le domaine D_h est l'intérieur de ce cercle (le cercle est inclus aussi dans D_h).

4.2 Limites

Dans ce qui suit on munit $\mathbb{R}^n$ d'une normes quelconque des trois normes équivalentes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$. Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage d'un point a sauf peut être en a, et soit $l \in \mathbb{R}$.

Définition 4.2.1 *On dit que la fonction f admet l pour limite au point a si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x - a\| < \delta, \ \|f(x) - l\| < \varepsilon,$$

et on écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

On note que $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ et $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$. Dire que $x \to a$ signifie que toutes les coordonnés de x tendrent vers les coordonnés de a à la fois et indépendamment ; il y'a une infinité de chemins à parcourir pour faire tendre x vers a. Par exemple en dimension 2, un point (x, y) peut tendre vers $(0, 0)$, d'une infinité de manières, par exemple :

- le long de l'axe horizontal, c'est-à-dire $y = 0$ et $x \to 0$,
- le long de l'axe vertical, c'est-à-dire $x = 0$ et $y \to 0$,
- le long d'une courbe quelconque, par exemple la prabole $y = x^2$.

Remarque 4.2.1 *Les opérations algébriques sur les limites concernant somme, différence, produit, quotient et composition déjà vues dans le cas d'une variables restent valables pour le cas d'une fonction à plusiaurs variables.*

Théorème 4.2.1 *Si une fonction admet une limite en un point alors cette limite est unique.*

On donne quelques remarques sur la limite dans le cas de deux variables.

1. La limite de $f(x, y)$ existe quand (x, y) tend vers (a, b) si elle est indépendante du chemin choisi.
2. Pour montrer qu'une limite n'existe pas il suffit de trouver deux chemins différents qui donnent deux valeurs différentes de la même limite.

3. Si on utilise le changement $y = mx$ où m est un paramètre on obtient que $(x, y) \to (0, 0)$ est équivalent à $x \to 0$. Dans ce cas, si on trouve que la limite dépend du paramètre m la limite n'existe pas. Si elle ne dépend pas de m on peut rien conclure.
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) \neq \lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{y\to b} f(x, y))$ en général.
5. Le passage en coordonnées polaires : $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$ est une technique qui nous aide à déterminer si la limite existe ou n'existe pas quand $(x, y) \to (0, 0)$. En effet $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ et par la suite $(x, y) \to (0, 0)$ est équivalent à $r \to 0$. Si la limite existe elle ne doit pas dépendre de θ.

Proposition 4.2.1 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie au voisinage d'un point (a, b), sauf peut être en (a, b), et soit $l \in \mathbb{R}$. Supposons que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ existe et $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = l$. Supposons de plus que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{y\to b} f(x, y)$ existe et que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x, y)$ existe alors :*

$$\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x, y)) = l = \lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x, y)).$$

Exemple 4.2.1 *Calculer la limite suivante :*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tfrac{x^3 y}{x^2+y^2}.$$

Passant en coordonnées polaires :

$$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta),\ r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi[.$$

On aura :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tfrac{x^3 y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \tfrac{r^4\cos^3\theta\sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r^2\cos^3\theta\sin\theta = 0.$$

Donc la limite existe et elle est égale à zéro.

Exemple 4.2.2 *La limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \tfrac{5xy}{x^2+y^2}$ n'existe pas. En effet si on passe en coordonées polaires :*

$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$, *on aura :*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5xy}{x^2 + y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{5r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} 5\cos\theta\sin\theta = 5\cos\theta\sin\theta.$$

Elle dépend de θ, donc la limite n'existe pas.

Exemple 4.2.3 *Calculer* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{7x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

En utilisant le changement $y = mx$ où m est un paramètre ($(x, y) \to (0, 0)$ est équivalent à $x \to 0$) on obtient que :

$$\frac{7x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{7x^2 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{(7 - m^2)x^2}{(1 + m^2)x^2} = \frac{(7 - m^2)}{(1 + m^2)}.$$

Alors on a :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{7x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{7x^2 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{(7 - m^2)}{(1 + m^2)},$$

elle dépend de m donc la limite n'existe pas.

4.3 Continuité

Définition 4.3.1 *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage d'un point a. On dit que la fonction f est continue en a si et seulement si : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ et qu'elle est continue sur D si elle est continue en tout point de D.*

Les fonctions usuelles sont continues sur leur domaine de définition.

Exemple 4.3.1 *Soit $f(x, y) = 3x^2 - 7y + 1$ et $(a, b) = (1, 2)$.*

On a :

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(1,2)} 3x^2 - 7y + 1 = -10 = f(1, 2).$$

Donc f est continue au point $(1, 2)$.

Théorème 4.3.1

1. *La somme et le produit de deux applications continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ sont continues.*
2. *La composée d'une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ par une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue.*

Exemple 4.3.2 *Étudier la continuité de la fonction f définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On remarque que le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}^2$.

1. *La fonction f est continue si $(x,y) \neq (0,0)$ car la fonction $(x,y) \to x^3y$ est continue et la fonction $(x,y) \to x^2+y^2$ est continue, donc leur fraction est continue.*
2. *Le cas $(x,y) = (0,0)$. la fonction f est continue en $(x,y) = (0,0)$ si : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$.*

   On a $f(0,0) = 0$ et d'après l'exemple 4.2.1 la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^2+y^2} = 0$, donc l'égalité $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ est vérifiée, c'est-à-dire f est continue en $(0,0)$.
   Par la suite f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 4.3.3 *Étudier la continuité de la fonction f définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^2$. Elle est continue quand $(x,y) \neq (0,0)$, car c'est une fonction rationnelle. Quand $(x,y) = (0,0)$ la fonction f est discontinue en $(0,0)$ puisque d'après l'exemple 4.2.1 la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^2+y^2}$ n'existe pas. Alors f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0\}$.

4.4 Dérivées partielles

Définition 4.4.1 *Soit f une fonction définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^n$. On dit que f admet une dérivée partielle première (ou d'ordre 1) par rapport à la variable x_i au point $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in D$ si la fonction d'une seule variable $x_i \mapsto f(a_1, a_2, \cdots, x_i, a_{i+1,} \cdots a_n)$*

admet une dérivée en a_i. Autrement dit, la dérivée partielle de f par rapport à x_i au point $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, est défnie par :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,a_2,\cdots,a_i+h,a_{i+1},\cdots a_n)-f(a_1,a_2,\cdots,a_i,a_{i+1},\cdots a_n)}{h}$$

si cette limite existe.

Dans le cas d'une fonction à deux variables $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on a deux dérivées partielles au point (α, β) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\alpha+h,\beta)-f(\alpha,\beta)}{h} \qquad \text{(dérivée partielle suivant } x\text{)},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\alpha,\beta+h)-f(\alpha,\beta)}{h} \qquad \text{(dérivée partielle suivant } y\text{)}.$$

On peut les notées aussi par :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = \partial_x f \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = \partial_y f.$$

Remarque 4.4.1 *Afin d'évaluer la dérivée partielle par rapport à x_i, il suffit de dériver en x_i l'éxprèssion de f en traitant les autres variables comme des constantes.*

Exemple 4.4.1 *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = 2xy^3 + y\sin(z) + z\cos(4x)$.*

Alors : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2y^3 - 4z\sin(4x)$,

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 6xy^2 + \sin(z)$,

$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = y\cos(z) + \cos(4x)$.

Exemple 4.4.2 *Soit :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5xy}{x^2+y^2} & si\ (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & si\ (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

– *Si $(x, y) \neq (0, 0)$ alors :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{5xy}{x^2+y^2}\right) = -5y\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad et \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{5xy}{x^2+y^2}\right) = 5x\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

– *Si $(x, y) = (0, 0)$ il faut passer par la définiton en limite des dérivées partielles afin de déterminer si elles existent ou non. On a :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0.$$

Donc les dérivées partielles existent en $(0,0)$ *(malgrè que* f *n'est pas continue en* $(0,0)$ *d'après l'exemple 4.3.3).*

Remarque 4.4.2 *On sait que si une fonction réelle d'une seule variable est dérivable en un point alors elle est continue en ce point, mais ce n'est pas le cas pour une fonction de plusieurs variables : l'existence des dérivées partielles en un point n'implique pas la continuité en ce point.*

Définition 4.4.2 *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$. *La fonction* $f : U \to \mathbb{R}$ *est dite de classe* $C^1(U)$ *si toutes les fonctions dérivées partielles existent et elles sont continues sur* U.

Proposition 4.4.1 *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$. *Si la fonction* $f : U \to \mathbb{R}$ *est de classe* $C^1(U)$ *alors elle est continue sur* U.

4.5 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Définition 4.5.1 *Soit* f *une fonction définie sur un domaine* D *de* $\mathbb{R}^n$. *Supposons que* f *admet une dérivée partielle par rapport à la variable* x_i *au point* $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in D$. *On dit que* f *admet une dérivée partielle d'ordre* 2, *notée* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, *au point* a *par rapport à* x_j *et* x_i *si la dérivée partielle* $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R}$ *admet elle-même une dérivée partielle* $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})$ *selon* x_j : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})$.

Dans le cas d'une fonction à deux variables on a :

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y))$ on dérive deux fois par rapport à x,
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y))$ on dérive une fois par rapport à x, puis une fois par rapport à y.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y))$ on dérive une fois par rapport à y, puis une fois par rapport à x.

– $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y))$ on dérive deux fois par rapport à y.

Les dérivées secondes peuvent être notées par d'autres notations :

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \partial_{xx} f = f''_{xx}$,
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \partial_{yx} f = f''_{yx}$,
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \partial_{xy} f = f''_{xy}$,
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \partial_{yy} f = f''_{yy}$.

Exemple 4.5.1 *Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction suivante :*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \sin(x^2 + xy).$$

On a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x+y)\cos(x^2+xy)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(x^2+xy)$.

Donc :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}((2x+y)\cos(x^2+xy))$$
$$= 2\cos(x^2+xy) - (2x+y)^2\sin(x^2+xy),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)) = \frac{\partial}{\partial y}((2x+y)\cos(x^2+xy))$$
$$= \cos(x^2+xy) - x(2x+y)\sin(x^2+xy),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(x\cos(x^2+xy)) = \cos(x^2+xy) - x(2x+y)\sin(x^2+y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = \frac{\partial}{\partial y}(x\cos(x^2+xy)) = -x^2\sin(x^2+xy).$$

Définition 4.5.2 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. La fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est dite de classe $C^2(U)$ si toutes les fonctions de dérivées partielles d'ordre* 2 *existent et elles sont continues sur U.*

Théorème 4.5.1 *(de Schwartz) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si la fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $C^2(U)$ alors :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad \textit{pour tout } i = 1, \cdots, n \textit{ et } j = 1, \cdots, n \textit{ tels que } i \neq j.$$