1. المعادلات التفاضلية
2. المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الاولى
3. المعادلة التفاضلية لبرنولي (Bernoulli)
4. المعادلة التفاضلية لركاتي (Riccati)
5. المعادلة التفاضلية للقرونج (Lagrange)
6. المعادلة التفاضلية لكليرو(Clairaut)

1. المعدلات التفاضلية (les équations différentielles) :

تعريف :

معادلة تفاضلية هي معادلة تحتوي على مشتقة واحد او اكثرلدالة المجهولة اذن غالبا ما يكون المجهول فيها هو دالة نرمز اليها بالرمز y

وتنقسم الى نوعين :

معادلات تفاضلية عادية (équation différencielle ordinaire) :

معادلات تفاضلية جزئية (équation différencielle parcielle) :

1.1 معادلات تفاضلية عادية (équation différencielle ordinaire) :

المعادلة التفاضلية العادية هي عبارة عن علاقة التي تربط بين الدالة المجهولة لمتغير واحد فقط وبين مشتقة او اكثر والتي تاخذ الشكل التالي :

$$F\left(x, y', y'', \dots \dots \dots \dots \dots \dots . y^{(n)}\right) = 0$$

ملاحضة :

نرمز عادة الى المشتقة من الدرجة الاولى للمتغير التابع y بانسبة ل x بالرمز :

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

نرمز عادة الى المشتقة من الدرجة الثانية للمتغير التابع y بانسبة ل x بالرمز :

$$y'' = \frac{d^2y}{(dx^2)}$$

نرمز عادة الى المشتقة من الدرجة الثالثة للمتغير التابع y بانسبة ل x بالرمز :

$$y''' = \frac{d^3y}{(dx^3)}$$

اذن نرمز الى المشتقة من الدرجة n للمتغير التابع y بانسبة ل x بالرمز :

$$y^n = \frac{d^ny}{(dx^n)}$$

1.2. المعادلة التفاضلية الجزئية:

هي المعادلة التي تحتوي على أكثر من متغير مستقل ومشتقاتها الجزئية.

a. رتبة معادلة تفاضلية :

تعرف رتبة المعادلة التفاضلية على انها اعلى مشتقة في المعالة التفاضلية.

b. درجة المعادلة التفاضلية :

تعرف درجة المعادلة التفاضلية على انها اعلى اس لاعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية.

الدرجة	الرتبة	المعادلة
1	1	$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}$
1	2	$2y'' - 3y'^{(2)} = \sin x$
3	1	$(y')^3 + 4x^2 = 0$
2	3	$(y''')^2 + (y'')^4 = 4x^2$

المصدر : من تاليف الكاتب

1.3. انوع حلول المعادلة التفاضلية :

a. الحل العام (solution générale) :

الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة n هو الحل الذي يحتوي على n عدد من الثوابت الاختيارية والذي يحقق المعادلة التفاضلية .

b. الحل الخاص(solution particulière) :

هل الحل الذي يتم الحصول عليه اعتمادا على الحل العام من خلال الشرط الابتدائي و بتالي تحديد قيم الثوابت الاختيارية. اي الحل الخاص لا يحتوي على الثوابت الاختيارية.

1.4. المعدالة التفاضلية الخطية من الرتبة n :

المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة n هي المعادلة التي تاخذ الشكل التالي :

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots a_n(x)y^n = g(x)$$

1.5.تكوين المعادلة التفاضلية :

يمكننا تكوين معادلة تفاضلية و ذلك بحذف الثوابت الاختيارية من الحل العام باستخدام المشتقات المختلفة للمتغير التابع.

اذن لتشكيل معادلة تفاضلية نتبع ما يلي :

- نحسب عدد الثوابت التي توجد في الحل العام .
- اذن رتبة المعادلة التفاضلية هي عدد الثوابت الموجودة في الحل العام.

مثال :

كون المعادلة التفاضلية التي حلها العام :

$$y = c_1 . \sin x$$

بمان عدد الثوابت هو 1 اذن المعادلة التفاضلية هي من الرتبة 1.

نشتق الحل العام مرة واحدة فنجد :

$$y' = c_1 . \cos x$$

نبحث عن قيمة c_1 :

$$c_1 = \frac{y}{\sin x}$$

$$y' = \frac{\cos x}{sin\, x} . y$$

$$y' = \frac{1}{\tan x} . y$$

$$y' = \cot x \,. y$$

مثال :

كون المعادلة التفاضلية التي يكون حلها العام :

$$y^2 = ax + bx^2$$

العلاقة $y^2 = ax + bx^2$ تحتوي على ثابتين اختياريين اذن المعادلة التفاضلية من الرتبة 2 لذلك نشتق العلاقة مرتين فنجد :

$$2yy' = a + 2bx$$

$$2yy' = 2b$$

نحذف الثابت الاختياري b :

$$\begin{cases} y^2 = ax + bx^2 \\ \\ 2yy' = a + 2bx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = ax + bx^2 \\ \\ 2xyy' = ax + 2bx^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xyy' - y^2 = bx^2 \\ \\ b = \dfrac{2xyy' - y^2}{x^2} \end{cases}$$

$$yy' = \frac{2xyy' - y^2}{x^2}$$

$$x^2yy' - 2xyy' + y^2 = 0$$

$$xyy'(x-2) + y^2 = 0$$

2. المعدلات الخطية من الدرجة الاولي (équations différentielle linéaire de première ordre) :

هي المعدلات التفاضلية التي تاخذ الشكل التالي :

$$a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

بحيث : $a(x)\,;(x);f(x)$ هي عبارة عن دوال مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$ مع $a(x) \neq 0$

2.1.المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (équation homogène) :

المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة هي المعادلة التي تنعدم فيها الدالة $f(x)$ من اجل كل قيم x اي :

$f(x) = 0 \;\; \forall x \in R$ وتاخذ الشكل التالي :

$$a(x)y' + b(x)y = 0$$

اذا كانت $f(x) \neq 0$ نقول عن المعادلة انها غير متجانسة او تامة

2.2.معادلات تفاضلية قابلة للفصل (ED à variables séparables) :

هي معادلات تفاضلية تاخذ غالبا الشكل :

$$\theta(y)\frac{dy}{dx} = \mu(x) \quad ou \quad \mu(x)\frac{dy}{dx} = \theta(y) \quad ou \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\mu(x)}{\theta(y)}$$

اذا امكننا فصل المتغيرات في المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة 1 تصبح المعادلة من الشكل :

$$\mu(x)dx + \theta(y)dy = 0$$

في هذة الحالة يكون الحل من اشكل :

$$\int \mu(x)dx + \int \theta(y)dy = c$$

وعليه نلاحض ان حل المعادلة يحتوي على ثابت اختياري واحد لان المعادلة من الرتبة 1.

مثال :

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$e^x \cos y\, dx + (1 + e^x)\sin y\, dy = 0$$

باستعمال طريقة فصل المتغيرات تصبح المعادلة من الشكل التالي :

$$\frac{e^x}{(1+e^x)}dx + \frac{\sin y}{\cos y}dy = 0$$

بالمكاملة :

$$\int \frac{e^x}{(1+e^x)}dx + \int \frac{\sin y}{\cos y}dy = 0$$

$$\ln(1+e^x) - \ln(\cos y) = c$$

$$\ln\left(\frac{1+e^x}{\cos y}\right) = c$$

مثال :

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$(4x + xy^2)dx + (y + yx^2)dy = 0$$

باستعمال طريقة فصل المتغيرات تصبح المعادلة من الشكل التالي :

$$x(4 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0$$

$$\frac{x}{(1+x^2)}dx + \frac{y}{(4+y^2)}dy = 0$$

بالمكاملة :

$$\int \frac{x}{(1+x^2)}dx + \int \frac{y}{(4+y^2)}dy = 0$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}ln(1+y^2) = c$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)(1+y^2) = c$$

اوجد الحل الخاص لما يكون : $y(1) = 0$

2.3.معادلات يمكن تحويلها الى معدلات يمكن فصل متغيرتها :

هناك بعض المعادالات لا يمكن فصل متغيرتها ولكن اذا قمنا ببعض التغيرات يمكن فصل متغيراتها وهي معادلات يكون شكلها كا يلي:

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$$

و هذه المعادلة يمكن فصلها باستعمال المتغير : $z = ax + by + c$

وعليه يسهل علينا فصل المتغيرات في هذه الحالة :

$$z' = a + by'$$

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = f(z)$$

$$\frac{dz}{dx} = a + bf(z)$$

وبتالي نستطيع فصل المتغيرات كما يوضح الشكل التالي :

$$\int \frac{dz}{a + bf(z)} = \int dx$$

بعد المكاملة نعوض قيمة z ب $ax + by + c$

مثال :

حل المعادلة التفاضلية المعرفة باشكل التالي :

$$(x + 2y)dx + dy = 0$$

نلاحض انه لايمكن فصل المتغيرات بسهولة ولكن باجراء بعض تغيرات يسهل فصل المتغيرات .

نضع : $z = x + 2y$

$$z' = 1 + 2y'$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 + 2\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx} - 1\right) = \frac{dy}{dx}$$

$$dy = -(z)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = -(z)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx} - 1\right) = -z$$

$$\left(\frac{dz}{dx} - 1\right) = -2z$$

وعليه نفصل المتغيرات بكل سهولة :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -2z + 1$$

$$\frac{dz}{-2z + 1} = dx$$

$$\int \frac{dz}{-2z+1} = \int dx$$

$$\frac{-1}{2}\ln(-2z+1) = x + c$$

$$\frac{1}{2}\ln(-2(x+2y)+1) = -x - c$$

$$\ln(1-2x-4y)^{\frac{1}{2}} = -(x+c)$$

$$(1-2x-4y)^{\frac{1}{2}} = e^{-(x+c)}$$

$$1-2x-4y = e^{2\left(-(x+c)\right)}$$

$$1-2x-4y = e^{-2c}.e^{-2x}$$

$$\frac{1-2x-k}{4e^{2x}} = y$$

K ثابت اختياري.

المعادلات التي تاخذ الشكل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'} \quad avec\ \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

في هذه الحالة لكي نستطيع فصل المتغيرات نضع :

$$z = ax + by$$

مثال 2:

اوجد حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-1}{x+y+1}$$

نضع :

$$z = x + y$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} - 1 = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{z-1}{z+1} = \frac{2z}{z+1}$$

$$\frac{(z+1)dz}{z} = 2dx$$

$$\frac{dz}{z} + dz = 2dx$$

$$\ln z + z = 2x + c$$

اذن الحل العام للمعادلة هو :

$$\ln(x+y) - x + y = c$$

3. طريقة حل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة و الدرجة الاولى :

البحث عن الحل العام للمعادلة بدون الطرف الثاني نرمز له بالرمز y_h : (solution homogène)

الحل العام يعتمد على تشكيل المعادلة الصفرية وذلك بوضع $f(x) = 0$

اذن :

$$a(x)y' + b(x)y = 0$$
$$a(x)y' = -b(x)y$$
$$a(x)\frac{dy}{dx} = -b(x)y$$
$$\frac{dy}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)}dx$$
$$\ln|x| = -\int -\frac{b(x)}{a(x)}dx + k$$
$$y_h = e^k e^{-\int -\frac{b(x)}{a(x)}dx}$$
$$y_h = K.h(x)$$

3.1. البحث عن الحل الخاص: (solution particulière)

للبحث عن الحل الخاص والذي نرمز له بارمز y_p نستعمل طريقة تغيير الثابت (la variation de la constante)

والتي يكون مبدئها تغير الثابت في الحل المتجانس اي :

$$y_p = K(x).h(x)$$

$h(x)$. دالة معلومة يبقى البحث عن الدالة الاصلية ل $K(x)$

وعليه يصبح الحل العام الذي يرمز له بالرمز g (solution générale) :

$$y_g = \boldsymbol{y_p} + \boldsymbol{y_h}$$

مثال :

حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$|-x|y' + xy = x$$

لحل هذه المعادلة نقسم الحلول الى مجالين بحيث :

$$I = I_1 =]-\infty; 0[\ \cup I_2 =]0; \ +\infty[$$

الحالة الاولى : $I_1 =]-\infty; 1[$ تكتب المعادلة من الشكل :

$$(-x)y' + xy = x \ \Leftrightarrow -y' + y = 1$$

اولا نبحث عن الحل المتجانس y_h:

نتبع الخطوات التالية :

$$-y' + y = 0$$
$$-y' = -y$$
$$\frac{dy}{dx} = y$$
$$\frac{dy}{y} = dx$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int dx \Leftrightarrow ln|y| = x + c$$
$$e^{ln|y|} = e^c e^{[x]}$$

$$y_h = K[e^x] \ \Leftrightarrow$$

اذن الحل المتجانس y_h:

$$y_h = K[e^x]$$

نبحث عن الحل الخاص y_p:

نتبع الخطوات التالية :

$$y_p = K(x)[e^x]$$
$$y_p{}' = K'(x)[e^x] + K(x)[e^x]$$

$$\begin{cases} -K'(x)[e^x] - K(x)[e^x] + K(x)[e^x] = 1 \\ K'(x) = \dfrac{-1}{e^x} \\ K(x) = e^{-x} \\ y_p = 1 \end{cases}$$

اذن الحل العام للمعادلة التفاضلية على المجال الاولى :

$$y_g = 1 + ke^x$$

الحالة الاولى : $I_2 =]0;+\infty[$ تكتب المعادلة من الشكل :

$$(x)y' + xy = x \Leftrightarrow y' + y = 1$$

اولا نبحث عن الحل المتجانس y_h :

نتبع الخطوات التالية :

$$y' + y = 0$$
$$y' = -y$$
$$\frac{dy}{dx} = -y$$
$$\frac{dy}{y} = -dx$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int -dx \Leftrightarrow ln|y| = -x + c$$
$$e^{ln|y|} = e^{c}e^{[-x]}$$

$$y_h = K[e^{-x}] \Leftrightarrow$$

اذن الحل المتجانس y_h :

$$y_h = K[e^{-x}]$$

نبحث عن الحل الخاص y_p :

نتبع الخطوات التالية :

$$y_p = K(x)[e^{-x}]$$
$$y_p{}' = K'(x)[e^{-x}] - K(x)[e^{-x}]$$

$$\begin{cases} K'(x)[e^{-x}] - K(x)[e^{-x}] + K(x)[e^{-x}] = 1 \\ K'(x) = \dfrac{1}{e^{-x}} \\ K(x) = e^{x} \\ y_p = 1 \end{cases}$$

اذن الحل العام للمعادلة التفاضلية على المجال الاولى :

$$y_g = 1 + ke^{-x}$$

4. مسالة كوشي (Problème de cauchy)

مشكلة كوشي مرتبطة بالمعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الاولى حيث انها تقبل حل وحيد اذا اعطي الشرط الابتدائي.

اذن لتكن المعادلة التفاضلية الخطية من الشكل :

$$a(x)y' + b(x)y = f(x) \qquad (E)$$

بحيث : $a(x)\,;(x);f(x)$ هي عبارة عن دوال مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$ مع $a(x) \neq 0$

اذا كانت الدالة $a(x)$ لا تنعدم على المجال I اذن :

$$\forall x_0 \in I \quad et\ \alpha \in R$$

يوجد حل وحيد للدالة المجهولة في المعادلة E بحيث :

$$f(x_0) = \alpha$$

النموذج $\begin{cases} a(x)y' + b(x)y = f(x) \\ f(x_0) = \alpha \end{cases}$

يسمى مشكل كوشي.

5. **المعادلة التفاضلية لبرنولي (ED de bernoulli) :**

هي معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الاولى تاخذ الشكل التالي :

$$a(x)y' + b(x)y = f(x)y^{\alpha} \qquad \alpha \in \mathbb{R} - \{0;1\}$$

بحيث : $a(x), b(x), f(x)$ هي دوال مستمرة على مجال $I \subset \mathbb{R}$

نلاحض اذا كانت قيمة $\alpha = 0$ تصبح المعادلة تفاضلية خطية من الدرجة الاولى.

$$a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

اذا كانت قيمة $\alpha = 1$ تصبح المعادلة تفاضلية خطية متجانسة.

$$a(x)y' + b(x)y - f(x)y = 0$$

$$a(x)y' + y\big(b(x) - f(x)\big) = 0$$

$$a(x)y' + yQ(x) = 0$$

عندما نقوم ببعض التغيرات على معادلة برنولي تصبح معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الاولى.

لتصبح معادلة برنولي معادلة خطية نتبع الخطوات التالية :

نقسم اطراف المعادلة على القيمة y^{α} فتصبح المعادلة باشكل :

$$\frac{a(x)}{y^{\alpha}}y' + \frac{b(x)}{y^{\alpha}}y = f(x)$$

$$a(x).y^{-\alpha}y' + b(x).y^{1-\alpha} = f(x)$$

نضع : $\boldsymbol{y^{1-\alpha} = z}$

$$\boldsymbol{z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}.y'}$$

بتعويض :

$$(1-\alpha)a(x).z' + b(x).z = f(x)$$

مثال :

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$dy + 2xydx = xe^{-x^2}y^3dx$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = xe^{-x^2}y^3$$

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}y^3$$

نلاحض ان المعادلة هي المعادلة التفاضلية لبرنولي بحيث $\alpha = 3$

نقسم اطراف المعادلة على القيمة y^3 فيصبح شكل المعادلة :

$$\frac{y'}{y^3} + 2x\frac{1}{y^2} = xe^{-x^2}$$

نضع :

$$\frac{1}{y^2} = z$$

$$z' = -2\frac{y'}{y^3}$$

$$-\frac{z'}{2} + 2xz = xe^{-x^2}$$

اصبحت المعادلة تفاضلية خطية من الرجة و الرتبة 1.

اذن لحلها نتبع الخطوات التالية :

$$-\frac{z'}{2} + 2xz = 0$$

$$-z' + 4xz = 0$$

$$z' = 4xz$$

$$\frac{dz}{dx} = 4xz$$

$$\frac{dz}{z} = 4xdx$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int 4xdx$$

$$\ln z = 2x^2 + c$$

$$z = ke^{2x^2}$$

نعتمد على طريقة تغيير الثابت للحصول على الحل الخاص z_p:

$$z_p = k(x)e^{2x^2}$$

$$z'_p = k'(x)e^{2x^2} + 4xk(x)e^{2x^2}$$

$$-\frac{k'(x)e^{2x^2} + 4xk(x)e^{2x^2}}{2} + 2xk(x)e^{2x^2} = xe^{-x^2}$$

$$-k'(x)e^{2x^2} - 4xk(x)e^{2x^2} + 4xk(x)e^{2x^2} = 2xe^{-x^2}$$

$$k'(x) = -2xe^{-x^2-2x^2}$$

$$k(x) = \int -2xe^{-3x^2}dx$$

$$k(x) = \frac{1}{3}e^{-3x^2}$$

اذن الحل الخاص هو :

$$z_p = \left(\frac{1}{3}e^{-3x^2}\right)e^{2x^2}$$

$$z_p = \frac{1}{3}e^{-x^2}$$

ومنه الحل العام هو :

$$z_g = \frac{1}{3}e^{-x^2} + ke^{2x^2}$$

لدينا :

$$\frac{1}{y^2} = z$$

$$\frac{1}{\sqrt{z}} = y$$

وعليه :

$$y_p = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}e^{-x^2} + ke^{2x^2}}}$$

6. المعادلة التفاضلية لركاتي (Riccati) :

معادلة ركاتي هي المعادلة التفاضلية التي تاخذ اشكل التالي :

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

اذا كان الحل الخاص معلوم يصبح حل هذه المعادلة من اشكل :

$$y = y_p + z$$

$$y' = y'_p + z'$$

بتعويض :

$$y' = a(x)\left(y_p + z\right)^2 + b(x)\left(y_p + z\right) + c(x)$$

$$y'_p + z' = a(x)\left(y^2{}_p + z^2 + 2y_p.z\right) + b(x)\left(y_p + z\right) + c(x)$$

$$y'_p + z' = a(x)y^2{}_p + b(x)y_p + c(x) + a(x)z^2 + 2.a(x)y_p.z + b(x)z$$

بالمطابقة :

$$y'_p = a(x)y^2{}_p + b(x)y_p + c(x)$$

$$z' = a(x)z^2 + 2.a(x)y_p.z + b(x)z$$

$$z' - \left(2.a(x)y_p. + b(x)\right)z = a(x)z^2$$

تحصلنا على معادلة تفاضلية لبرنولي بحيث $\alpha = 2$

تطبيق :

لدينا المعادلة التفاضلية التالية :

$$E_1: 2y'\cos x - 2y\sin x = y^2$$

ما طبيعة هاتي المعادلة ؟

اوجد حل عام للمعادلة E_1؟

لتكن معادلة Riccati معرفة كما يلي :

$$2y'\cos x = y^2 + 2\cos^2 x - \sin^2 x$$

بين ان : $y_0 = \sin x$ هو حل خاص لمعادلة Riccati

اوجد الحل العام لمعادلة Riccati

الحل :

E_1 هي عبارة عن معادلة Bernoulli بحيث $\alpha = 2$

وعلية لحلها نتبع الخطوات التالية :

نقسم اطراف المعادلة على y^2 فتصبح من الشكل :

$$2\frac{y'}{y^2}\cos x - 2\frac{1}{y}\sin x = 1$$

بوضع :

$$z = \frac{1}{y}$$

$$z' = -\frac{y'}{y^2}$$

بتعويض :

$$-2z'\cos x - 2z\sin x = 1$$

اذن حل هذه المعادلة يعتمد على :

$$-2z'\cos x - 2z\sin x = 0$$

$$-2z'\cos x = 2z\sin x$$

$$-2\frac{dz}{dx}\cos x = 2z\sin x$$

$$-\frac{dz}{z} = \frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$$-\int\frac{dz}{z} = \int\frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$$\ln z = \ln(\cos x) - c$$

$$e^{ln\, z} = e^{ln(cos\, x)-c}$$

$$z = k.\cos x$$

باستعمال طريقة تغيير الثابت :

$$z_p = k(x).\cos x$$

$${z_p}' = k'(x).\cos x - k(x).\sin x$$

$$-2k'(x).\cos^2 x + 2k(x).\cos x\,.\sin x - 2k(x).cos\, x\,.\sin x = 1$$

$$-2k'(x).\cos^2 x = 1$$

$$k'(x) = -\frac{1}{2.cos^2\, x}$$

$$k(x) = -\frac{1}{2}\tan x$$

$$z_p = -\frac{1}{2}tan\, x\,.\cos x$$

$$z_p = -\frac{1}{2}\sin x$$

اذن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو :

$$z_g = -\frac{1}{2}sin\, x + \ k.\cos x \qquad k \in R$$

مع : $y = \frac{1}{z}$

$$y = \frac{2}{-\sin x + 2k\cos x} \qquad k \in R$$

لكي يكون $y_0 = \sin x$ هو حل خاص لمعادلة Riccati يجب ان تتحقق المساواة التالية :

$$y'_0 = \cos x$$

$$2(\cos^2 x) = \sin^2 x + 2\,cos^2\, x - sin^2\, x$$

$$2(\cos^2 x) = 2\,cos^2\, x$$

اذن : $y_0 = \sin x$ هو حل خاص لمعادلة Riccati

بمان حل معادلة Riccati يعتمد على حلها الخاص نضع :

$$y = y_0 + z = \sin x + z$$

$$y' = \cos x + z'$$

نعوض في معادلة Riccati :

$$2(cos\, x + z')\cos x = (sin\, x + z)^2 + 2\cos^2 x - \sin^2 x$$

$$2\,cos^2\, x + 2z'\cos x = sin^2\, x + z^2 + 2\,sin\, x\,.z + 2\cos^2 x - \sin^2 x$$

$$2z'\cos x - 2\,sin\, x\,.z = z^2$$

نلاحض اننا تحصلنا على نفس معادلة Bernoulli

اذن الحل العام هو :

$$y = y_0 + z = \sin x + z$$

$$y = \sin x + \frac{2}{-\,sin\, x + 2k\,cos\, x} \qquad k \in R$$

7. معادلات تفاضلية من الشكل :

$$f'(y)\frac{dy}{dx}+p(x)f(y)=q(x)$$

حيث : $p(x);q(x)$ دوال بالنسبة للمتغير x $f(y)$دالة بانسبة للمتغير y فقط $f'(y)$ هو مشتق الدالة $f(y)$ بانسبة لy

لحل هذا النوع من المعادلات نستخدم التعويض :

$$z=f(y)$$

نشتق بانسبة ل x :

$$\frac{dz}{dx}=f'(y)\frac{dy}{dx}$$

وعلي تصبح المعادلة من الشكل :

$$\frac{dz}{dx}+p(x)z=q(x)$$

وهي عبارة عن معادلة تفاضلية خطية من الدرجة والرتبة الاولى.

مثال :

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التي تاخذ الشكل :

$$e^y\frac{dy}{dx}+e^y=x$$

مضع :

$$e^y=z$$

$$\frac{dz}{dx}=y'e^y$$

$$\frac{dz}{dx}+z=x$$

نبحث عن الحل العام للمعادلة الصفرية :

$$z'+z=0$$

$$\frac{dz}{dx}=-z$$

$$\int\frac{dz}{z}=-\int dx$$

$$\ln z=-x+c$$

$$z=ke^{-x}$$

نبحث عن الحل الخاص z_p :

$$z_p = k(x)e^{-x}$$

$$z'_p = k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x}$$

$$k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x} + k(x)e^{-x} = x$$

$$k'(x) = xe^{x}$$

$$k(x) = xe^{x} - e^{x}$$

$$z_p = (xe^{x} - e^{x})e^{-x} = x - 1$$

اذن الحل العام z_g:

$$z_g = x - 1 + ke^{-x}$$

واخيرا y_g:

لدينا :

$$z = e^{y}$$

$$\ln z = y$$

$$y_g = \ln\big((x-1) + ke^{-x}\big)$$

المعادلات التفاضلية التي تكون من الشكل :

$$\frac{dy}{dx} + p(x)e^{y} = q(x)$$

هذا الشكل من المعادلات يمكن تحويلها الى تفاضلية خطية و ذلك بوضع :

$$z = e^{-y}$$

$$\frac{dz}{dx} = -e^{-y}\frac{dy}{dx}$$

$$-e^{y}\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

$$-e^{y}\frac{dz}{dx} + p(x)e^{y} = q(x)$$

$$-\frac{dz}{dx} + p(x) = e^{-y}q(x)$$

$$-\frac{dz}{dx} + p(x) = zq(x)$$

$$-\frac{dz}{dx} - zq(x) = p(x)$$

اذن هذه معادلة تفاضلية خطية يمكن حلها بالطرق التي تطرقنا اليها.

المعادلة التفاضلية من الدرجة2 (équation déffirentielle du 2ème ordre) :

تسمى معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية كل معادلة من الشكل :

$$y'' = f(y'; y; x)$$

كما يمكن كتابتها بالشكل :

$$f(y''; y'; y; x) = 0$$

بحيث y هي الدالة المجهولة في المعادلة y' و y'' هما المشتق الاولى والثانية لـy

على الترتيب : $y' = \frac{dy}{dx}$; $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$

8. المعادلة التفاضلية للقرونج (lagrange) :

معادلة Lagrange هي كل معادلة من الشكل :

$$y = xf(y') + g(y')$$

بحيث الدالتين $g(y')$; $f(\quad ')$ مستمرتين وقابلتين للاشتقاق على المجال $I \subset R$

طريقة الحل (méthode de résolution) :

نضع : $y' = t$

$$y = xf(y') + g(y')$$

بتعويض تصبح :

$$y = xf(t) + g(t)$$

نشتق الطرفين بانسبة لمتغير x :

$$y' = f(t) + xf'(t).\frac{dt}{dx} + g'(t).\frac{dt}{dx}$$

$$t = f(t) + xf'(t).\frac{dt}{dx} + g'(t).\frac{dt}{dx}$$

$$t - f(t) = [xf'(t) + g'(t)].\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{[xf'(t) + g'(t)]}{t - f(t)}$$

$$x' = \frac{xf'(t)}{t-f(t)} + \frac{g'(t)}{t-f(t)}$$

$$x' - \frac{xf'(t)}{t-f(t)} = \frac{g'(t)}{t-f(t)}$$

$$x' - xq(t) = p(t)$$

حيث :

$$q(t) = \frac{f'(t)}{t-f(t)} \quad ; \quad p(t) = \frac{g'(t)}{t-f(t)}$$

ومنه تحصلنا على معادلة تفاضلية خطية يتم حلها كما سبق ذكره.

مثال :

اوجد الحل العام للمعادلة Lagrange المعرفة بالشكل :

$$y = 2xy' - 3(y')^2$$

الحل :

نضع : $y' = t$

$$y = 2xy' - 3(y')^2$$

بتعويض تصبح :

$$y = 2xt - 3t^2$$

نشتق الطرفين بانسبة لمتغير x :

$$y' = 2t + 2x.\frac{dt}{dx} - 6t.\frac{dt}{dx}$$

$$t = 2t + 2x.\frac{dt}{dx} - 6t.\frac{dt}{dx}$$

$$-t = [2x - 6t].\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{[2x-6t]}{-t}$$

$$x' = \frac{-2x}{t} + 6$$

$$x' - \frac{-2x}{t} = 6$$

ومنه تحصلنا على معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الاولى حلها العام هو :

$$x' - \frac{-2x}{t} = 0$$

$$x' = \frac{-2x}{t}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-2x}{t} \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = -2\frac{dt}{t} \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} = -2\int \frac{dt}{t}$$

$$\ln x = -2\ln t + c \Leftrightarrow \ln x = \ln\frac{1}{t^2} + c$$

$$x = k.\frac{1}{t^2}$$

نستعمل طريقة تغيير الثابت :

$$x = k(t).\frac{1}{t^2}$$

$$x' = \frac{k'(t).t^2 - 2t.k(t)}{t^4}$$

$$x' = \frac{k'(t)}{t^2} - \frac{2k(t)}{t^3}$$

حيث :

$$x' + \frac{2x}{t} = 6$$

بتعويض :

$$\frac{k'(t)}{t^2} - \frac{2k(t)}{t^3} + k(t).\frac{2}{t^3} = 6 \Leftrightarrow \frac{k'(t)}{t^2} = 6 \Leftrightarrow k'(t) = 6t^2$$

$$k(t) = 2t^3$$

اذن :

$$x = k(t).\frac{1}{t^2} \Leftrightarrow x = [2t^3].\frac{1}{t^2} = 2t$$

$$x = 2t \Leftrightarrow x_g = 2t + k.\frac{1}{t^2}$$

بما ان :

$$y = 2xt - 3t^2$$

اذن نعوض الحال العام السابق في المعادلة :

$$y = 2\left[2t + k.\frac{1}{t^2}\right]t - 3t^2 \Leftrightarrow y = t^2 + 2kt^{-1}$$

وعليه الحل العام لمعادلة Lagrange :

$$y = t^2 + 2kt^{-1}$$

9. المعادلة التفاضلية لكليرو (clairaut) :

المعادلة التفاضلية لكليرو هي معادلة خاصة من معادلة Lagrange عنما يكون : $f(y') = y'$

اذن المعادلة التفاضلية لكليرو هي المعادلة التي تكون من الشكل :

$$y = xy' + g(y')$$

بحيث : $g(\ \ ')$ هي دالة غير خطية قابلة للاشتقاق على مجال $I \subset R$

طريقة الحل (méthode de résolution) :

نضع : $y' = t$

اذن تصبح المعادلة من الشكل :

$$y = xt + g(t)$$

نشتق اطراف المعادلة :

$$\frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx} + g'(t).\frac{dt}{dx}$$

$$t = t + x\frac{dt}{dx} + g'(t).\frac{dt}{dx}$$

$$0 = x\frac{dt}{dx} + g'(t).\frac{dt}{dx} \Leftrightarrow 0 = [x + g'(t)]\frac{dt}{dx}$$

$$0 = [x + g'(t)]\frac{dt}{dx} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dt}{dx} = 0 \\ ou \\ x + g'(t) = 0 \end{cases}$$

الحالة الاولى :

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{dx} = 0 \Leftrightarrow t = c \\ y = xt + g(t) \\ y = xc + g(c) \end{cases}$$

الحل العام هو :

$$y = xc + g(c)$$

الحالة الثانية :

$$x + g'(t) = 0 \Leftrightarrow x = -g'(t)$$

$$y = \big(-g'(t)\big)t + g(t)$$

الحل العام هو :

$$y = \big(-g'(t)\big)t + g(t)$$

مثال :

اوجد الحل العام للمعادلة :

$$y = xy' + (y')^2$$

الحل :

نضع : $y' = t$

$$y = xt + (t)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx} + 2t.\frac{dt}{dx}$$

$$t = t + x\frac{dt}{dx} + 2t.\frac{dt}{dx}$$

$$0 = x\frac{dt}{dx} + 2t.\frac{dt}{dx} \Leftrightarrow 0 = [x + 2t]\frac{dt}{dx}$$

$$0 = [x + 2t]\frac{dt}{dx} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dt}{dx} = 0 \\ ou \\ x + 2t = 0 \end{cases}$$

الحالة الاولى :

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{dx} = 0 \Leftrightarrow t = c \\ y = xt + t^2 \\ y = xc + c^2 \end{cases}$$

الحل العام هو :

$$y = xc + c^2$$

الحالة الثانية :

$$x + 2t = 0 \Leftrightarrow x = -2t$$

$$y = (-2t)t + t^2 = -t^2$$

الحل العام هو :

$$y = -t^2$$

كما يمكننا ان نعوض ب :

$$x = -2t \Leftrightarrow t = -\frac{x}{2}$$

$$y = \frac{x^2}{4}$$

$$y = x\left(-\frac{x}{2}\right) + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{x^2}{4}$$

لتاكد :

لدينا :

$$y = xy' + (y')^2$$

$$y = -\frac{x^2}{4} \Leftrightarrow y' = -\frac{x}{2}$$

$$y = xy' + (y')^2 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{4} = x.\left(\frac{-x}{2}\right) + \left(\frac{-x}{2}\right)^2 = -\frac{x^2}{4}$$

10. المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية :

تعريف :

هي المعادلة التي تاخذ الشكل التالي :

$$y'' + p(x)y' + q(x) = 0$$

اذا كانت المعادلة التفاضلية المتجانسة من الرتبة الثانية من الشكل :

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad a; b; c \in R$$

حل هذه المعادلة يعتمد على معادلة جبرية تسمى المعادلة المميزة.

الحل العام للتفاضلية المتجانسة باستخدام طريقة المعادلة المميزة (équation chactéristique) :

اذن نرفق المعادلة :

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad a; b; c \in R$$

بالمعادلة المميزة التالية :

$$ar^2 + br + c = 0$$

اذن يعتمد حل هذه العادلة الجبرية على المميز Δ ونميز ثلاثة حالات :

اذا كان : $b^2 - 4ac > 0$ اذن $r_1 \neq r_2$

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{-2a}$$

$$r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

اذا كان : $b^2 - 4ac = 0$ اذن $r_1 = r_2$

$$r_1 = r_1 = \frac{-b}{2a}$$

اذا كان : $b^2 - 4ac < 0$ اذن $r_1 \text{et } r_2 \in \mathbb{C}$

الحالة الاولي : اذا كان : $\boldsymbol{r_1 \neq r_2}$

الحل العام هو :

$$y_g = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

مثال :

اوجد الحل العام للمعادلة التالية :

$$y'' + 4y' - 2y = 0$$

الحل :

نوجد المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية :

$$r^2 + 4r - 2 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4.(-2) = 24 > 0$$

اذن :

$$r_1 = \frac{-4 - \sqrt{24}}{2} = -2 - \sqrt{6}$$

$$r_2 = \frac{-4 + \sqrt{24}}{2} = -2 + \sqrt{6}$$

ومنه الحل العام :

$$y_g = c_1 e^{(-2-\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x}$$

الحالة الثانية : اذا كان : $\boldsymbol{r_1 = r_2}$

اذا كانت الجذور للمعادلة المميزة $\boldsymbol{r_1 = r_2}$

اذن الحل الخاص هو :

$$y_1 = e^{rx} \qquad y_2 = xe^{rx}$$

وعليه الحل العام :

$$y_g = c_1 e^{rx} + \ c_2 x e^{rx}$$

مثال :

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

الحل :

نوجد المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية :

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

$$\Delta = 36 - 4.(9) = 36 = 0$$

اذن :

$$r_1 = r_2 = \frac{6}{2} = 3$$

ومنه الحل العام :

$$y_g = c_1 e^{(3)x} + c_2 x e^{(3)x}$$

حالة خاصة 1:

اذا كانت المعادلة التفاضلية من الشكل :

$$y'' - y = 0$$

الحل العام هو :

$$y_g = c_1 e^{x} + c_2 x e^{-x}$$

مبرهنة :

المعادلة المميزة للمعادلة $y'' - y = 0$:

$$r^2 - 1 = 0$$

$$r = -1 \ ou \ r = 1$$

ومنه :

$$y_1 = e^{x} \qquad y_2 = e^{-x}$$

الحل العام هو :

$$y_g = c_1 e^{x} + c_2 x e^{-x}$$

10.1.مسالة كوشي : (Problème de cauchy)

مشكلة كوشي مرتبطة بالمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية حيث انها تقبل حل وحيد اذا اعطيت الشرط الابتدائية.

اذن لتكن المعادلة التفاضلية الخطية من الشكل :

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (E)$$

يوجد حل وحيد للدالة المجهولة في المعادلة E بحيث :

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = 0 \\ y(x_0) = \alpha \\ y'(x_0) = \beta \end{cases} \text{النموذج}$$

يسمى مسالة كوشي.

مثال :

اوجد حل لمسالة كوشي التالية :

$$\begin{cases} y'' - 2\sqrt{2}y' + 2y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

حل المعادلة $y'' - 2\sqrt{2}y' + 2y = 0$ يعتمد على مميز Δ المعادلة المتميزة اذن :

$$r^2 - 2\sqrt{2}r + 2 = 0$$

$$\Delta = \left(-2\sqrt{2}\right)^2 - 4.2 = 0$$

اذن :

$$r_1 = r_2 = \sqrt{2}$$

وعليه :

$$y_g = c_1x.e^{\sqrt{2}x} + c_2e^{\sqrt{2}x} = (c_1x + c_2)e^{\sqrt{2}x}$$

$$y_g = (c_1x + c_2)e^{\sqrt{2}x}$$

اذن الحل العام يعتمد على الثابتين $\left(c_1 \text{ و } c_2\right)$ وعليه حسب الشروط الابتدائة الحل الوحيد للمعالة هو :

$$\begin{cases} y_g = (c_1x + c_2)e^{\sqrt{2}x} \\ y'_g = (c_1)e^{\sqrt{2}x} + \sqrt{2}(c_1x + c_2)e^{\sqrt{2}x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (c_2) = 2 \\ (c_1) + 2\sqrt{2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (c_2) = 2 \\ (c_1) = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

اذن الحل الوحيد للمعادلة هو من الشكل :

$$y_g = \left((3 - 2\sqrt{2})x + 2\right) e^{\sqrt{2}x}$$

حالة خاصة 2:

اذا كانت المعادلة التفاضلية من الشكل :

$$y'' + \alpha y' = 0$$

الحل العام هو :

$$y_g = c_1 + c_2 e^{-\alpha x}$$

مبرهنة :

المعادلة المميزة للمعادلة $y'' + \alpha y' = 0$:

$$r^2 + \alpha r = 0 \quad \Leftrightarrow r(r + \alpha) = 0$$

$$r = 0 \; ou \; r = -\alpha$$

ومنه :

$$y_1 = e^{0.x} \qquad y_2 = e^{-\alpha x}$$

الحل العام هو :

$$y_g = c_1 + c_2 e^{-\alpha x}$$

مثال :

$$y'' - 3y' = 0$$

$$r^2 - 3r = 0 \quad \Leftrightarrow r(r - 3) = 0$$

$$r = 0 \,; \; (r = 3)$$

اذن الحل العام هو :

$$y_g = c_1 + c_2 e^{3x}$$